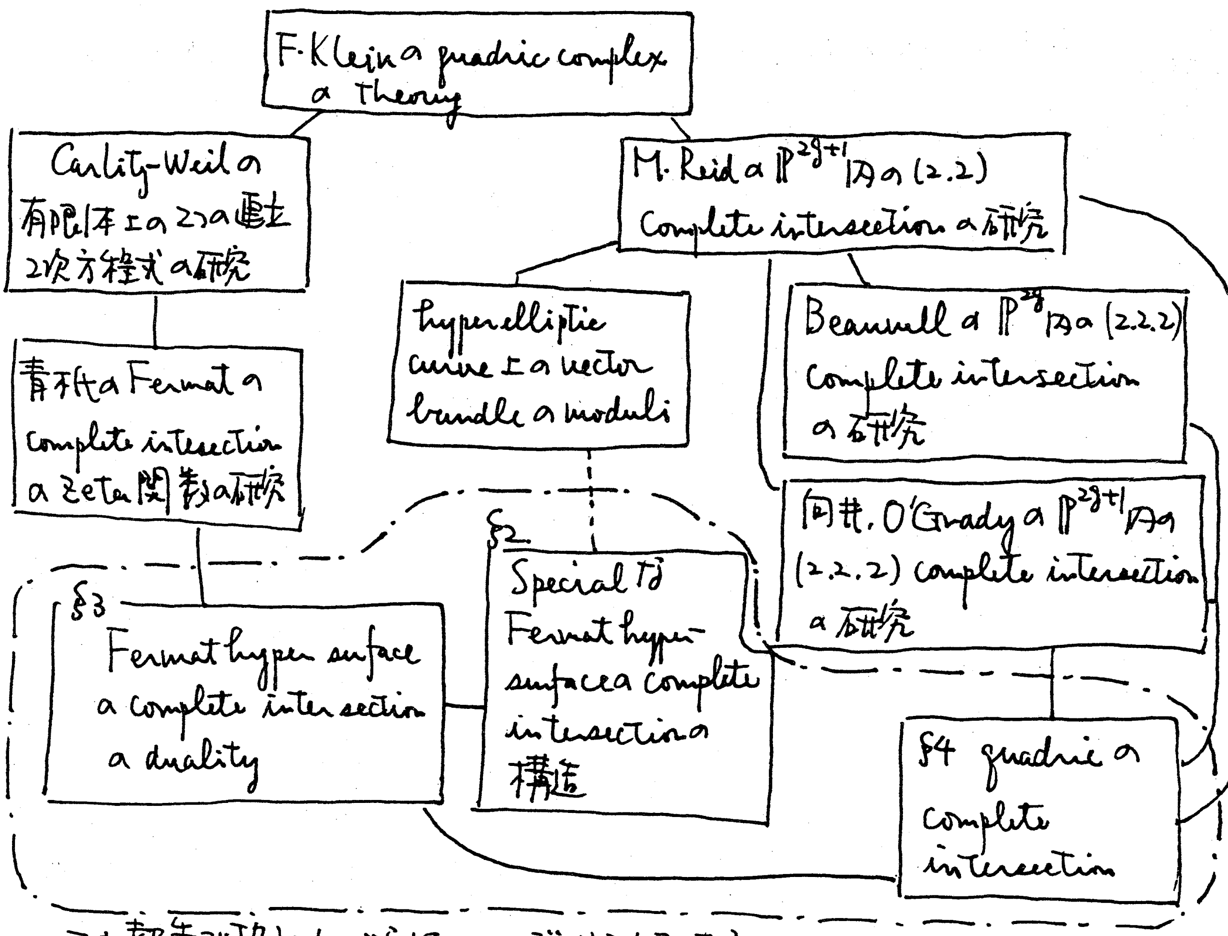
数理解析研究所講究録
634巻 1987年 307-335

Complete intersections of Fermat hypersurfaces

東大理 寺松友秀

§1. Introduction.

Fermat hypersurface の complete intersection, quadric hypersurface の complete intersection について、今まで多くの研究がなされている。まず Felix Klein によって quadric complex の理論が始められたが、その後の発展をまとめると、下のチャートの様になろう。



この報告で扱うことがらは ---で かこんである。

以下．各§の関係について簡単に述べよう。

§2で扱う多様体 $X_{m,l,d}$ は．§3で扱う多様体 $X(A)$ の特殊な場合であり．$X_{m,l,d}$ をspecialなFermat hypersurfaceのcomplete intersectionと呼ぶ。これが．あるcurve Dやその直積．有限による商などを考えることにより構成されることを示すのが．§2の主題である。§3では．もう少し一般的なFermat hypersurfaceのcomplete intersectionについて．のduality theoremを述べた。§4は．quadricのcomplete intersectionに関するもので．くわしくは．数理研講究録「Analytic varieties及び．Stratified spaceにおける諸問題」の中の "ある代数的対応の全射性について"（寺杣友秀）を見て下さい。

§2 Special complete intersections of Fermat hypersurfaces

kを体．dを char kと素な2以上の自然数，l, mを
$m+1 < l-1$を満たす自然数とする．$\lambda_1, \cdots, \lambda_l$を相異なる$k$の元とする時．$X_{l.m.d}$を$\mathbb{P}^{l-1}$内の

$$X_{l.m.d} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{l} x_i^d = 0 \\ \sum_{i=1}^{l} \lambda_i x_i^d = 0 \\ \quad \vdots \\ \sum_{i=1}^{l} \lambda_i^m x_i^d = 0 \end{cases}$$

で定義される variety とすると．これは complete intersection であり．しかも nonsingular であることがわかる．

<u>Non singular となる事の証明</u>

$F_0 = \sum_{i=1}^{l} x_i^d, \cdots, F_m = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i^m x_i^d$ とすると．

(I).

$$D(F) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_0}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_0}{\partial x_l} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_l} \end{pmatrix}$$

の rank が $m+1$ より小さくて．しかも．

(II) $F_0 = F_1 = \cdots = F_m = 0$

となる $(x_1 : \cdots x_l)$ が $X_{l.m.d}$ の singular な集合である。

上の2つを満たす $(x_1, \cdots, x_l)$ があるとして．(I) より．

任意の $\{i_1, \cdots, i_{m+1}\} \subset \{1, \cdots, l\}$ について．

$$\det\begin{pmatrix}\frac{\partial F_0}{\partial x_{i_1}} & \cdots & \frac{\partial F_0}{\partial x_{i_{m+1}}}\\ \vdots & & \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_{i_1}} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_{i_{m+1}}}\end{pmatrix}=\det\left[d\begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\\ \lambda_{i_1} & \cdots & \lambda_{i_{m+1}}\\ \vdots & & \\ \lambda_{i_1}^m & \cdots & \lambda_{i_{m+1}}^m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{i_1}^{d-1} & & \\ & \ddots & \\ & & x_{i_{m+1}}^{d-1}\end{pmatrix}\right]$$

$$=0$$

$\therefore \prod_{j=1}^{m+1} x_{i_j}=0$ ゆえに. 少なくとも$(l-m)$個のx_iは0になる。

たとえばこれを$x_{m+1}=\cdots=x_l=0$として. (II)より.

$$\begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\\ & & \\ \lambda_1^{m-1} & \cdots & \lambda_m^{m-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1^d\\ \vdots\\ x_m^d\end{pmatrix}=0$$

ゆえ. $x_1=\cdots=x_m=0$となる。これから. $X_{m.l.d}$の singular な集合が空であることがわかる。 Q.E.D.

このSectionでは. $X_{l.m.d}$を curve の直積の有限群による商として表わすこと. そしてそれから得られる結果を述べることである。以下簡単のため. kを代数閉体と仮定する。

$k(x)$を$\mathbb{P}^1$に対するk上の一変数代数関数体とした時. Dを. $k\left(x, \left(\frac{x-\lambda_i}{x-\lambda_1}\right)^{\frac{1}{d}}\right)_{i=2,\cdots,l}$に対する$\mathbb{P}^1$の covering とする。今$k$内の1の1つの原始$d$乗根を$\zeta$とする。$\Delta$を$(\mathbb{Z}/d)$から. $(\mathbb{Z}/d)^l$への diagonal map とする。$(\mathbb{Z}/d)^l$の元$(0,\cdots,\overset{i}{1},\cdots,0)$の$D$への action を$(x-\lambda_i)^{\frac{1}{d}}$を$\zeta$倍, $(x-\lambda_j)^{\frac{1}{d}}$ $(j\neq i)$を1倍することによって定めると. これは$H=(\mathbb{Z}/d)^l/\mathrm{Im}\Delta$の$D$への action

を定める。H^{l-m-2}は．各成分ごとへの作用により．D^{l-m-2}へ作用する。また$(l-m-2)$次対称群$\mathfrak{S}_{l-m-2}$は．D^{l-m-2}へ各成分の入れかえによって作用する。この2の作用は．H^{l-m-2}に$\mathfrak{S}_{l-m-2}$が各成分の入れかえで作用する時の半直積 $G=H^{l-m-2}\rtimes\mathfrak{S}_{l-m-2}$ のD^{l-m-2}への作用を定める。H^{l-m-2}からHへのmap Σを．各成分の和をとることによって定義する。Nを$\Sigma: H^{l-m-2}\longrightarrow H$のKernelとする。Nは$\mathfrak{S}_{l-m-2}$の$H^{l-m-2}$へのactionでstableなので．半直積 $G_0=N\rtimes\mathfrak{S}_{l-m-2}$ がGのsubgroupとして考えられる。

<u>Theorem 1</u>　D^{l-m-2}のG_0による商．D^{l-m-2}/G_0は．$X_{l,m,d}$と同型である。

実際にこの同型を与えるmapを構成してこの定理は示される。ここでは．D^{l-m-2}から$X_{l,m,d}$へのrational mapを構成することにしよう。そのためにいくつか準備をする。

$s_{i,j}$ $(i=1,\cdots,l,\ j=0,\cdots,l-1)$を．$x_1\cdots,\check{x}_i\cdots x_l$に関するj次基本対称式とする。（$j=0$の時は．$s_{i,j}=1$とおく。）

Lemma 1.

$$C = \begin{pmatrix} (-1)^{\ell-1} s_{1,\ell-1} & (-1)^{\ell-2} s_{1,\ell-2} & \cdots & s_{1,0} \\ \vdots & & & \vdots \\ (-1)^{\ell-1} s_{\ell,\ell-1} & (-1)^{\ell-2} s_{\ell,\ell-2} & \cdots & s_{\ell,0} \end{pmatrix}$$

$$D = \mathrm{diag}\left(\prod_{i\neq 1} (\lambda_1 - \lambda_i), \cdots, \prod_{i \neq \ell} (\lambda_\ell - \lambda_i) \right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{\ell-1} & \cdots & \lambda_\ell^{\ell-1} \end{pmatrix}$$

とすると. $CA = D$となる。

証明. $\prod_{j\neq i} (x - \lambda_j) = \sum_{j=0}^{\ell-1} (-1)^j s_{i,j}\, x^{\ell-j-1}$ の両辺に $x = \lambda_1, \cdots \lambda_\ell$ を代入して. 上の式を得る。

Corollary 1. $m = 0, \cdots, \ell-2$ に対して.

$$\frac{\lambda_1^m}{\prod_{i\neq 1}(\lambda_1 - \lambda_i)} + \cdots \frac{\lambda_\ell^m}{\prod_{i\neq \ell}(\lambda_\ell - \lambda_i)} = 0$$

が成り立つ。

証明. Lemma より. $AD^{-1}C = I$ となる。これは.

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_l \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{l-1} & \cdots & \lambda_l^{l-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & \cdots & * & \prod_{i\neq 1}(\lambda_1-\lambda_i)^{-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & \cdots & * & \prod_{i\neq l}(\lambda_l-\lambda_i)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

となり．これから Corollary を得る。 Q.E.D.

§2. D^{l-m-2} から $X_{l,m,d}$ への rational map を構成しよう。D^{l-m-2} の関数体を $k(x_k, \frac{y_{k,i}}{y_{k,j}})_{k=1,\cdots,l-m-2,\ i,j=1,\cdots,l}$ とする。ここで．${y_{k,i}}^d = x_k-\lambda_i$ とする。D^{l-m-2} の点 $(x_k, (y_{k,1}:\cdots:y_{k,l}))_{k=1,\cdots,l-m-2}$ に対して．$\mathbb{P}^{l-1}$ の点 $(\delta_1^{-1}\zeta_1:\cdots:\delta_l^{-1}\zeta_l)$ を対応させる。ここで．$\zeta_i = \prod_{k=1}^{l-m-2} y_{k,i}$，${\delta_i}^d = \prod_{j\neq i}(\lambda_i-\lambda_j)$ である。この rational map の Image が．$X_{l,m,d}$ に含まれることを見よう。それには．

$$\frac{\lambda_1^i}{\prod_{j\neq 1}(\lambda_1-\lambda_j)}\prod_{k=1}^{l-m-2}(x_k-\lambda_1)+\cdots+\frac{\lambda_l^i}{\prod_{j\neq l}(\lambda_l-\lambda_j)}\prod_{k=1}^{l-m-2}(x_k-\lambda_l)$$

$$=\sum_{u=0}^{l-m-2}\pm t_u\left(\frac{\lambda_1^{i+u}}{\prod_{j\neq 1}(\lambda_1-\lambda_j)}+\cdots+\frac{\lambda_l^{i+u}}{\prod_{j\neq l}(\lambda_l-\lambda_j)}\right) \quad (i=0,\cdots m)$$

が 0 になる事をいえばよい。ここで t_u は．$x_k\ (k=1,\cdots,l-m-2)$ に関する $(l-m-2-u)$ 次基本対称式である。ところがこれは．Corollary 1 より $i=0,\cdots,m$ の時 0 になる。これから D^{l-m-2} から．$X_{l,m,d}$ への rational map が構成されたが．これは．N の作用．

$\mathfrak{S}_{\ell-m-2}$の作用でstableである。

$$D^{\ell-m-2}/H^{\ell-m-2}\rtimes \mathfrak{S}_{\ell-m-2} \cong (D/H)^{\ell-m-2}/\mathfrak{S}_{\ell-m-2}$$
$$\cong (\mathbb{P}^1)^{\ell-m-2}/\mathfrak{S}_{\ell-m-2} \cong \mathbb{P}^{\ell-m-2}$$

で. $X_{\ell,m,d}$も $\pi : \mathbb{P}^{\ell-1} \longrightarrow \mathbb{P}^{\ell-1} ; (x_1 : \cdots : x_\ell) \mapsto (x_1^d : \cdots : x_\ell^d)$ なるmapにより $\mathrm{Im}\,\pi \cong \mathbb{P}^{\ell-m-2}$ 上のvarietyと見なせる。$D^{\ell-m-2}/G_0$, $X_{\ell,m,d}$ 共に $\mathbb{P}^{\ell-m-2}$ 上のvarietyとみて. finite flatで同じdegreeである。これから. $D^{\ell-m-2}/G_0$と$X_{\ell,m,d}$はbirationalである。$X_{\ell,m,d}$は. nonsingularなので. $D^{\ell-m-2}/G_0$ と $X_{\ell,m,d}$ は同型になる。 Q.E.D.

この定理にはいくつかの系がある。まず$X_{\ell,m,d}$のcohomologyに関する結果をのべる。Kを$\mathbb{Q}_\ell$の有限次拡大体. (ℓはchar kと素な1つの素数)で1の原始d乗根を含んでいるものとする。$H^i(X, K)$ をKに係数をもつXのétale cohomologyとする。

<u>Theorem 2.</u> $H^{\ell-m-2}_{prim}(X_{\ell,m,d}, K)$ を自然なhomomorphism $H^{\ell-m-2}(\mathbb{P}^{\ell-1}, K) \longrightarrow H^{\ell-m-2}(X_{\ell,m,d}, K)$ のcokernelとする。この時. 分解

$$H^{\ell-m-2}_{prim}(X_{\ell,m,d}, K) \cong \bigoplus_{\chi\in \hat{H}} \Lambda^{\ell-m-2} H^1(D, K)(\chi)$$

を得る。ここで. $H^1(D, K)(\chi)$ は. $H^1(D, K)$ をHの表現とみた時

のχ-partである。

証明は．$H^{l-m-2}(D^{l-m-2}, K)$のKünneth分解と．
$H^{l-m-2}(X_{l.m.d}, K) \cong H^{l-m-2}(D^{l-m-2}, K)^{G_0}$なる同型より得られる。$d=2$の時．この定理は次の様になる。まずnontrivialなHのcharacter χに対して$\mathbb{P}^1$のdouble covering C_χが対応するが．$H^1(D, \mathbb{Q}_l)(\chi) \cong H^1(C_\chi, \mathbb{Q}_l)$ $(\chi \in \hat{H}-\{0\})$なる同型と合わせて．次の定理を得る。

<u>Corollary 2</u> $H^{l-m-2}_{prim}(X_{l.m.2}, \mathbb{Q}_l)$は次の分解をもつ

$$H^{l-m-2}_{prim}(X_{l.m.2}, \mathbb{Q}_l) \cong \bigoplus_{\chi \in \hat{H}-\{0\}} \Lambda^{l-m-2} H^1(C_\chi, \mathbb{Q}_l).$$

<u>Remark</u> $k=\mathbb{C}$の時は．$\mathbb{Q}$上のd次円分体Kを係数にもつBetti cohomologyに対しても同様の結果を得る。

Theorem 1のもう1つの重要な系として$l=2g+2$, $d=2$の時．

$$X_{2g+2.m.2} \quad \begin{cases} x_1^2+\cdots+x_{2g+2}^2 = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1^m x_1^2+\cdots+\lambda_{2g+2}^m x_{2g+2}^2 = 0 \end{cases}$$

内に含まれる$(g-m)$次元linear spaceのfamilyに関する結果が

ある。Cを．$y^2=\prod_{i=1}^{2g+2}(x-\lambda_i)$ によって定義されるhyper elliptic curveとする。$S^m(C)$ をCのm階の対称積とする。CのWierstrass point Pをfixして．その点を基点にするAbel-Jacobi mapを．$S^m(C)\longrightarrow J(C)$ とする。これによって．$S^m(C)$をJ(C)上のvarietyと見る。J(C)からJ(C)への2倍mapによりJ(C)をJ(C)上のvarietyと見ることにより．$S^m(C)\times_{J(C)}\underset{\leftarrow 2倍}{J(C)}$ なるfiber productを考えることができる。これを$Y_{2g-m,g}$と書く。以下$Y_{2g-m,g}$によって．parametrizeされる$X_{2g+2,m,2}$内の$(g-m)$次元linear spaceのfamilyを構成する。

$S^m(C)$は．Cのm次のeffective divisor全体と同一視されるので．$C\rightarrow\mathbb{P}^1$によるdivisorのひきもどしによって．$S^{(g-m)}(\mathbb{P}^1)\rightarrow S^{2(g-m)}(C)$ なるmapが定義されるが．これによって．

$$\mathbb{P}^{g-m}\times S^m(C)\longrightarrow S^{(g-m)}(\mathbb{P}^1)\times S^m(C)\rightarrow S^{2(g-m)}(C)\times S^m(C)$$
$$\longrightarrow S^{2g-m}(C).$$

なるmapを得る。この時．commutative diagram

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{P}^{g-m}\times S^m(C) & \longrightarrow & S^{2g-m}(C)\\ & \searrow\quad\swarrow & \\ & J(C) & \end{array}$$

をJ(C)の2倍mapでbase changeして．

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{P}^{g-m}\times Y_{2g-m} & \longrightarrow & Y_{m,g}\\ & \searrow\quad\swarrow & \\ & J(C) & \end{array}$$

なる commutative diagram を得る。

<u>$Y_{2g-m,g}$ の記述</u> H. D は前の通りとする。H_0 を. $H \cong (\mathbb{Z}/2)^{2g+2}/\mathrm{Im}\Delta$ から $\mathbb{Z}/2$ への和をとる map の kernel として. N_0 を H_0^{2g-m} から H_0 への和をとる map の Kernel とする。この時 $G_{H_0} = N_0 \rtimes \mathfrak{S}_{2g-m}$ を N_0 と $\mathfrak{S}_{2g-m}$ の半直積とする。

<u>Lemma 2</u>. $Y_{m.g} \cong D^{2g-m}/G_{H_0}$

この Lemma を認めて. 先に進もう. よって $G_{H_0} \subset G_0$ なので.
$Y_{m.g} = D^{2g-m}/G_{H_0} \longrightarrow D^{2g-m}/G_0 \cong X_{2g+2,m.2}$ なる map を得る。

<u>Theorem 3</u> 今まで定義した map の合成

$$\mathbb{P}^{g-m} \times Y_{2g-m,m} \longrightarrow Y_{m,g} \longrightarrow X_{2g+2,m,2}$$

は. $Y_{m.g}$ で parametrize される $X_{2g+2,m.2}$ 内の $(g-m)$ 次元 linear space の family を与える。

<u>証明の概略</u> $x_{m+1},\cdots,x_g$ の i 次基本対称式 $(i=1,\cdots,g-m)$ を s_i とすれば. $\mathbb{P}^{g-m} \cong S^{g-m}(\mathbb{P}^1)$ の座標は. $\mathbb{P}^1$ の $(g-m)$ 個の直積の座標 $x_{m+1},\cdots,x_g$ を使って. $(s_0:\cdots:s_{g-m})$ と表わせる。

D^m (resp D^{2g-m}) の座標を. x_i, y_{ij} $(i=1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,2g+2,\ y_{i,j}{}^2=x_i-\lambda_j)$ (resp ξ_i, $\zeta_{i,j}$, $i=1,\cdots 2g-m$, $j=1,\cdots,2g+2$, $\zeta_{i,j}{}^2=\xi_i-\lambda_j$) と表わせば. 定理中の morphism

$$\mathbb{P}^{g-m}\times Y_{m,g}\longrightarrow Y_{2g-m,g}\ \text{は.}$$

$$\xi_i=\begin{cases} x_i & (i=1,\cdots,g)\\ x_{i-g+m} & (i=g+1,\cdots,2g-m)\end{cases}$$

$$\prod_{i=1}^{2g-m}\zeta_{ij}=\prod_{i=m+1}^{g}(\lambda_j-x_i)\times\prod_{i=1}^{m}y_{i,j}$$

で与えられる。これを見れば. $X_{2g+2,m,2}$ での image は. $\left(\prod_{i=1}^{2g-m}\zeta_{i,0};\cdots:\prod_{i=1}^{2g-m}\zeta_{i,2g+2}\right)$ となり. 各成分は. $s_0,\cdots,s_{g-m}$ の1次式になっている。 Q.E.D.

<u>Lemma 2 の Corollary</u> ($m=g$ の時). $\mathbb{P}^{2g+1}$ 内の complete intersection

$$X=X_{2g+2,g,2}\quad\begin{cases}\sum_{i=1}^{2g+2}x_i^2=0\\ \quad\vdots\\ \sum_{i=1}^{2g+2}\lambda_i^g x_i^2=0\end{cases}$$

は. $Y_{g,g}$ に dominate されるが. $Y_{g,g}\cong S^m(C)\times_{J(C)}\underset{\text{2倍}}{J(C)}$ より. Jacobi の逆問題より. $Y_{g,g}$ は. Abelian variety $J(C)$ と birational である。しかも $\Theta_X\cong K_X$ となり. irregularity $q(X)=0$ となる。

これは．Kummer surfaceの1つの方向での拡張と思える。
さて Theorem で得た family は．cohomology の対応
$$H^m(Y_{2g-m,g}, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H^{2g-m}(X_{2g+2,m,2}, \mathbb{Q})$$
を定める。自然な全射 $Y_{2g-m,g} \longrightarrow S^m(C)$ から induce される
準同型 $H^m(S^m(C), \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H^m(Y_{2g-m,g}, \mathbb{Q}_\ell)$ を結合した
map に関して次の定理が得られる。

<u>Theorem 4</u>　上の homomorphism の合成
$$H^m(S^m(C), \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H^{2g-m}(X_{2g+2,m,2}, \mathbb{Q}_\ell)$$
の image は．Corollary における分解の．$\Lambda^{2g-m} H^1(C, \mathbb{Q}_\ell)$
の部分になる。ここで前にも書いた様に．$C = C_{x_0}$ である。

<u>証明略</u>

§3 Complete intersection of Fermat hypersurfaces

l, m, dは．§2の通りとする。kを与えとする$(m+1)$行l列行列$A=(a_{ij})$が次の条件を満たすとする。

(Normal crossing condition) Aのすべての$(m+1)\times(m+1)$小行列式が0でない。

この時実は$\mathbb{P}^{l-1}$内のhyperplane $L_i=\{\sum_{j=1}^{l}a_{ij}x_j=0\}$のunion $\bigcup_{i=1}^{m+1}U_i$は．normal crossing divisorになる。Fermat hypersurfaceのcomplete intersection $X(A)$を以下の様に定義する。まずπを$\mathbb{P}^{l-1}$の点$(x_1:\cdots:x_l)$を$\mathbb{P}^{l-1}$の点$(y_1:\cdots:y_l)=(x_1^d:\cdots:x_l^d)$へ送るmapとする。$V$を$e_j$ $(j=1,\cdots,l)$で生成されるベクトル空間．Lを．

$L=\{\sum_{j=1}^{l}e_jy_j\in V\mid \sum_{j=1}^{l}a_{ij}y_j=0\ (i=1,\cdots,m+1)\}$で定義されるVの部分空間とする。$\mathbb{P}(V)$は自然に$\mathbb{P}^{l-1}$と同一視される。$\mathbb{P}(L)\subset\mathbb{P}(V)$を$L$の射影化とした時．Fermat hypersurfaceのcomplete intersection $X(A)$を$\pi^{-1}(\mathbb{P}(L))$で定義する。さらに．explicitには．これは．

$$X(A)\quad\left\{\begin{array}{l}\sum_{j=1}^{l}a_{ij}x_j^d=0\\ \quad\vdots\\ \sum_{j=1}^{l}a_{m+1,j}x_j^d=0\end{array}\right.$$

と表わせる。Vには．e_jをorthogonal basisとする自然な内積

が定義されるが．その内積に関するLの直交補空間をL^*と書く。$\mathbb{P}(L^*)$をL^*の射影化とする時$X(A)$にdualなFermat hypersurfaceのcomplete intersection $X(A^*)$を$\pi^{-1}(L^*)$で定義する。定義より．$X(A)$は$X(A^*)$にdualなFermat hypersurfaceのcomplete intersectionになる。この章の目的は．互いにdualなFermat hypersurfaceのcomplete intersection $X(A)$と$X(A^*)$のそれぞれのcohomologyの間に存在する関係を述べることである。

Hを§2で定義した有限群$H \cong (\mathbb{Z}/d)^l/\mathrm{Im}\,A$とする。$\bar{k}$内の1のd乗根$\zeta$をfixする時．Hの元$(0,\cdots,\overset{i}{1},\cdots,0)$の$X(A)$の作用を$x_i$を$\zeta$倍，$x_j\ (j\neq i)$をそのままにすることにより定めると．HのX(A)への作用が定まる。

<u>Definition</u> (Primitive character) Kを$\mathbb{Q}_\ell$の拡大体で．1の原始d乗根を含むとする。Hのcharacter $\chi\in\mathrm{Hom}(H,K^\times)$が．primitiveであるとは．任意のiに対して$(i=1,\cdots,l)$ $\chi(\sigma_i)\neq 1$となることを言う。ここで$\sigma_i=(0,\cdots,\overset{i}{1},\cdots 0) (\mathrm{mod}\ \mathrm{Im}\,A)$である。

<u>Primitive characterが重要な理由</u> χがprimitiveでないとすると．あるiについて$\chi(\sigma_i)=1$となるので．$H^*(X(A),K)$のχ-part $H^*(X(A),K)(\chi)$は．$H^*(X(A)/\langle\sigma_i\rangle,K)$の中に含まれる。他方$X(A)/\langle\sigma_i\rangle$はやはりFermat hypersurfaceのcomplete intersectionになる。$X(A)/\langle\sigma_i\rangle$がまた再びFermat

hyper surface の complete intersection であることは、以下の様にしてわかる。

$$\begin{cases} a_{11}x_1^d \cdots + a_{1i}y_i + \cdots + a_{1l}x_l^d = 0 \\ \vdots \\ a_{m+1,1}x_1^d + \cdots + a_{m+1,i}y_i + \cdots + a_{m+1,l}x_l^d = 0 \end{cases}$$

から y_i を消去して $X(A)/\langle\sigma_i\rangle$ の定義方程式は得られる。

$a_{j,i}$ $(j=1,\cdots,m+1)$ の中で 0 でないものがあるから それをたとえば、$a_{1,i}$ とすれば、$X(A)/\langle\sigma_i\rangle$ は、

$$a_{ji}(a_{11}x_1^d + \cdots + a_{1i}y_i + \cdots + a_{1l}x_l^d)$$
$$-a_{1i}(a_{j1}x_1^d + \cdots + a_{ji}y_i + \cdots + a_{jl}x_l^d) = 0 \quad (j=2,\cdots,l)$$

で定義される。これは、ある $m\times(l-1)$ 行列から定義される Fermat hyper surface の complete intersection となる。(くわしい証明は、論文[1]にある。) 方程式の数は、もとの $X(A)$ より減っているので、inductive に、考えて、primitive の時を研究することに帰着するのである。

以上の準備を経て、Fermat hyper surface の complete intersection に関する duality theorem を述べる。

<u>Theorem 5</u> χ を H の primitive character とする時、$X(A^*)\times X_d^{l-2}$ と $X(A)\times\mathbb{P}^m$ の間の代数的対応が存在して、それが、

$$H^{\ell-m-2}(X(A), K(-m))(\chi) \cong H^m(X(A^*), K)(\bar{\chi}) \otimes H^{\ell-2}(X^{\ell-2}_{\alpha}, K)(\chi)$$

なる同型をひきおこす．ここで $X^{\ell-2}_{\alpha}$ は．$(\ell-2)$ 次元の d 次 Fermat hyper surface である。

Remark 論文[1] では．χ が primitive でない場合についても述べてあるが．これは前の Remark により．χ が primitive である場合に帰着する。

以下この定理の証明の概略を述べよう。今．$F_1 = a_{11}x_1^d + \cdots + a_{1\ell}x_\ell^d$，$F_{m+1} = a_{m+1,1}x_1^d + \cdots + a_{m+1,\ell}x_\ell^d$ とおく。$\mathbb{P}^m$ の元 $\lambda = (\lambda_1 : \cdots : \lambda_{m+1})$ に対して $\mathbb{P}^\ell$ 内の超曲面 F_λ を．
$F_\lambda = \{\lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_{m+1}F_{m+1} = 0\}$ によって定める。$\mathbb{P}^{\ell-1} \times \mathbb{P}^m$ の subvariety $\mathfrak{X}$ を $\mathfrak{X} = \{(x, \lambda) \in \mathbb{P}^{\ell-1} \times \mathbb{P}^m \mid x \in F_\lambda\}$ によって定め．$f : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathbb{P}^m$，$\varphi : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathbb{P}^{\ell-1}$ をそれぞれ第2，第1射影より誘導されるmap とする。

(I) $R^i f_* K$ の構造

H の元 σ_i は．$\mathfrak{X}$ の元 $((x_1 : \cdots : x_\ell), \lambda)$ を $((x_1, \ ; \zeta x_i \cdots : x_\ell), \lambda)$ へ送ることにより $\mathfrak{X}$ への作用を定め．これにより H は $\mathfrak{X}$ に作用する。これは．$f : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathbb{P}^m$ と commute するので．$R^i f_* K$ に H が作用する。これから $R^i f_* K$ の H の Character による分解

$R^i f_* K = \bigoplus_{\chi\in A} R^i f_* K(\chi)$ を得る。L_i $(i=1,\cdots,l)$ を、$\{\lambda=(\lambda_1:\cdots:\lambda_{m+1})\in\mathbb{P}^m \mid \sum_{j=1}^{m+1} a_{ji}\lambda_j=0\}$ によって定義される hyperplane とする。この時、

F_λが nonsingular $\Leftrightarrow$ $\lambda\in\mathbb{P}^m-\bigcup_{i=1}^{l} L_i$

である。また $\lambda\in\bigcup_{i=1}^{l} L_i$ の時は、F_λは、ある Fermat hypersurface と、それと交わらない linear space の linear join として表わされる。この事から、$\lambda\in\bigcup_{i=1}^{l} L_i$ で χが primitive なら、$(R^i f_* K(\chi))_\lambda=0$ となる。また、$\lambda\in\mathbb{P}^m-\bigcup_{i=1}^{l} L_i$ の時、F_λ は、nonsingularな、Fermat hypersurface と同型なので、そのことから、$\lambda\in\mathbb{P}^m-\bigcup_{i=1}^{l} L_i$ なら、$(R^i f_* K(\chi))_\lambda$ は、$i=l-2$ の時 1次元、そうでない時は 0 となる。ゆえに $U=\mathbb{P}^m-\bigcup_{i=1}^{l} L_i$ とおけば、$R^{l-2} f_* K(\chi)|_U$ は、$\pi_1(U)$ の abel表現から来ている。この表現は、どんな表現なのかというのが、次の問題である。まず $X(A^*)$ を dual の Fermat hypersurface の complete intersection とすると、$v_i=\sum_{j=1}^{l} a_{ij} y_j$ $(i=1,\cdots,m+1)$ が、L^* の生成元であることから、$\pi: X(A^*)\to\mathbb{P}^m$ なる map が自然に定まる。

<u>主張</u> $f^{-1}(U)\times_U \pi^{-1}(U)\cong X_d^{l-2}\times\pi^{-1}(U)$ なる $\pi^{-1}(U)$ 上の variety としての同型がある。(これは、証明しない。くわしくは、論文[1] を見よ。)

この主張により $R^{l-2} f_* K(\chi)|_U$ は、$\pi^{-1}(U)$ までひきあげると、

constant sheaf $H^{\ell-2}(X_d^{\ell-2}, K)(\chi)$ と同型になる。
$f^{-1}(U) \longrightarrow U$ なる map を π_U と書く。$\pi_*(H^{\ell-2}(X_d^{\ell-2}, K)(\chi))$
$\cong \pi_{U*}K \otimes H^{\ell-2}(X_d^{\ell-2}, K)(\chi)$ に H が descent data として作用するが、$R^{\ell-2}f_*K(\chi)|_U$ は、その H invariant となる。これは、主張の同型を書きくだすことにより、$\pi_{U*}K(\bar{\chi}) \otimes H^{\ell-2}(X_d^{\ell-2}, K)(\chi)$ と同型になる。ここで、$\pi_{U*}K(\bar{\chi})$ は、$\pi_{U*}K$ に $H \cong \mathrm{Aut}(\pi^{-1}(U)/U)$ が作用する時の $\bar{\chi}$-part である。

<u>Proposition 1</u>　χ を H の primitive character とする。
$$H^{m+\ell-2}(\mathfrak{X}, K)(\chi) \cong H^m(X(A^*), K)(\bar{\chi}) \otimes H^{\ell-2}(X_d^{\ell-2}, K)(\chi)$$

<u>証明</u>　まず、$f: \mathfrak{X} \longrightarrow \mathbb{P}^m$ に関する Leray の spectral sequence $E_2^{i,j} = H^i(\mathbb{P}^m, R^j f_* K) \Rightarrow E^{i+j} = H^{i+j}(\mathfrak{X}, K)$ のそれぞれの χ part をとり、$E_2^{i,j}(\chi) = H^i(\mathbb{P}^m, R^j f_* K(\chi)) \Rightarrow E^{i+j}(\chi) = H^{i+j}(\mathfrak{X}, K)(\chi)$ となる sectral sequence を得る。他方、
$$R^j f_* K(\chi) = \begin{cases} j_!\,(R^{\ell-2} f_* K(\chi)|_U) & (i = \ell-2) \\ 0 & (i \neq \ell-2) \end{cases}$$
となる。ここで、j は open immersion $j: U \longrightarrow \mathbb{P}^m$ である。
ゆえにこの spectral sequence は退化して、
$H^i(\mathbb{P}^m, j_!(R^{\ell-2}f_*K(\chi)|_U)) \cong H^{i+\ell-2}(\mathfrak{X}, K)(\chi)$ となる、他方、

$j_!\,(R^{\ell-2}f_*K(\chi)|_U) \cong j_!\,(\pi_{U*}K(\bar{\chi}) \otimes H^{\ell-2}(X_d^{\ell-2}, K)(\chi))$ で.

χ は primitive な character なので. 上は.

$\pi_* K(\bar{\chi}) \otimes H^{\ell-2}(X_d^{\ell-2}, K)(\chi)$ と同型である。

$$\therefore\ H^i(\mathbb{P}^m; j_!(R^{\ell-2}f_*K(\chi)|_U)) \cong H^i(\mathbb{P}^m, \pi_*K)(\bar{\chi}) \otimes H^{\ell-2}(X_d^{\ell-2}, K)(\chi)$$
$$\cong H^i(X(A^*), K)(\bar{\chi}) \otimes H^{\ell-2}(X_d^{\ell-2}, K)(\chi)$$

これから $i=m$ として. Proposition を得る。

(II) $R^i\varphi_*K$ の構造.

こちらの方が (I) よりやさしい。$u \in \mathbb{P}^{\ell-1}$ に対して.

$$\varphi^{-1}(u) \cong \begin{cases} \mathbb{P}^m & u \in X(A) \\ \mathbb{P}^{m-1} & u \notin X(A) \end{cases}$$

である事から容易に.

$$R^i\varphi_*K \cong \begin{cases} K(-\frac{i}{2}) & (i \leq 2m-2 \text{ で even}) \\ 0 & (i \geq 2m+1 \text{ または odd}) \\ K_{X(A)}(-m) & (i=2m) \end{cases}$$

となる。$\mathfrak{X}$ への H の action と. $\mathbb{P}^{\ell-1}$ への H の action (σ_i が. x_i を ζ 倍に. x_j $(j\neq i)$ を 1 倍にという action で act する。) は. compatible なので. χ が primitive であるとすると.

$$\begin{cases} H^j(\mathbb{P}^{\ell-1}, R^{2m}\varphi_*K)(\chi) \cong H^j(X(A), K(-m))(\chi) \\ H^j(\mathbb{P}^{\ell-1}, R^i\varphi_*K)(\chi) = 0 \qquad (i \neq 2m) \end{cases}$$

となる。ゆえに φ に関する Leray の spectral sequence

$$E_2^{i,j} = H^i(\mathbb{P}^{\ell-1}, R^j\varphi_* K) \Rightarrow E^{i+j} = H^{i+j}(\mathfrak{X}, K)$$

の χ- part

$$E_2^{i,j}(\chi) = H^i(\mathbb{P}^{\ell-1}, R^j\varphi_* K)(\chi) \Rightarrow E^{i+j}(\chi) = H^{i+j}(\mathfrak{X}, K)(\chi)$$

は E_2 で退化して．$H^i(\mathbb{P}^{\ell-1}, R^{2m}\varphi_* K)(\chi) \cong H^{i+2m}(\mathfrak{X}, K)(\chi)$ となり．ゆえに次の同型を得る。

<u>Proposition 2</u>　χ を H の primitive character とする。この時．

$$H^{\ell-m-2}(X(A), K(-m))(\chi) \cong H^{\ell+m-2}(\mathfrak{X}, K)(\chi)$$

なる同型が．ある代数的対応から得られる。

Proposition 1．2 を合わせて．Theorem 5 の duality を得る。

<u>Duality の応用</u>　この duality は標数に関係なく証明され．しかも同型が代数的対応により得られるので．Period に関する応用．Zeta 関数への応用が考えられるが，ここでは．Zeta 関数への応用．及び．ある general type の surface に関する Tate conjecture の成り立つ例を述べることにしよう。

1.　Zeta 関数への応用．

$\mathbb{F}_q$ を有限体．$Gal(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ をその絶対ガロア群，V を $Gal(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$-module とする。$Fr$ をその geometric Frobenius とする時．V の

Zeta関数 $Z(V,t)$ を．

$$Z(V,t) := \det(1 - t\,\mathrm{Fr}\,|\,V)^{-1}$$

によって定義する。今，$q \equiv 1 \bmod d$ と仮定する。χ を H の primitive character とする時．$Z_{A,\chi}(t)$ (resp $Z_{A^*,\bar{\chi}}$) を $H^{l-m-2}_{\mathrm{prim}}(X(A),K)(\chi)$ (resp $H^{m}_{\mathrm{prim}}(X(A^*),K)(\bar{\chi})$) の Zeta関数とする。$\chi$ に対する Jacobi の和 $j(\chi)$ を以下の様に定義する。$e = (q-1)/d$ とすると．$(x_1,\cdots,x_l) \in \mathbb{A}^l(\mathbb{F}_q)$ とした時．$(x_1^e,\cdots,x_l^e)$ は H の元と思える。$x = (x_1,\cdots,x_l)$ とした時．$\tilde{\chi}(x)$ を

$$\tilde{\chi}(x) = \begin{cases} \chi((x_1^e,\cdots,x_l^e)) & (\text{任意の } x_i \neq 0) \\ 0 & (\text{ある } x_i = 0) \end{cases}$$

によって定義する。この時 Jacobi の和 $j(\chi)$ を．

$$j(\chi) = \frac{(-1)^l}{q-1} \sum_{\substack{x=(x_1,\cdots,x_l) \\ x_1+\cdots+x_l=0}} \tilde{\chi}(x)$$

で定義する。この時．duality theorem より次の定理を得る。

<u>Theorem 6</u>　χ を H の primitive character とする。今までの記号のもとで．

$$Z_{A,\chi}(t) = Z_{A^*,\bar{\chi}}(q^{-m} j(\chi)\, t)$$

が成り立つ。

Remark この定理は. 青木[2]によって知られていた。

2. Tate conjectureの成り立つ例.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{17} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{41} & \cdots & a_{47} \end{pmatrix}$$ を. normal crossing conditionを

満たす$\mathbb{F}_q$上の(4×7)行列とする。その時. $\mathbb{P}^6$内の4つのquadricのcomplete intersection $X(A): \sum_{j=1}^{7} a_{ij} x_j^2 = 0$ $(i=1,\cdots 4)$ は. general typeのsurfaceである。

さて. Tateは. 有限体上のsurfaceに関して次の予想をたてた。

Tate conjecture 有限体$\mathbb{F}_q$上のsurface Xに対して. cycle map

$$CH^1(X)\otimes\mathbb{Q}_\ell \longrightarrow H^2(X\otimes\overline{\mathbb{F}_q}, \mathbb{Q}_\ell)$$

のimageが. $H^2(X\otimes\overline{\mathbb{F}_q}, \mathbb{Q}_\ell)$ の $Gal(\overline{\mathbb{F}_q}/\mathbb{F}_q)$ invariantと一致する.

Example 上の$X(A)$について. Tate conjectureが成立する。

略証. $\overline{X(A)} = X(A)\otimes\overline{\mathbb{F}_q}$ として.

$H^2(\overline{X(A)}, \mathbb{Q}_\ell) \cong \bigoplus_{\chi\in\hat{H}} H^2(\overline{X(A)}, \mathbb{Q}_\ell)(\chi)$ となる。$H \cong (\mathbb{Z}/2)^7/\mathrm{Im}A$ なので. Hにprimitive characterは存在しない。他方任意のiについて. $X(A)/\langle\sigma_i\rangle$は. Fermat quadricのcomplete intersection

になるK3 surfaceで．これは．容易にelliptic pencilをもつ事がわかる。ゆえに．$H^2(\overline{X(A)}, \mathbb{Q}_\ell) \subset \bigoplus_{i=1}^{7} H^2(\overline{X(A)}/\langle\sigma_i\rangle, \mathbb{Q}_\ell)$ となり．この事からTate conjectureが証明される。

<u>Remark</u>（§2との関係）　§2は§3の特別な場合であるが．§2で扱っている場合の§3における結果は．その場合の特殊事情を使う別証もある。ただしここで使わなければならないことは．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^m & \cdots & \lambda_\ell^m \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{\ell-m-2} & \cdots & \lambda_\ell^{\ell-m-2} \end{pmatrix} D$$

ここで $D = \mathrm{diag}\left(\prod_{i\neq 1}(\lambda_i-\lambda_1)^{-1}, \ \cdots, \ \prod_{i\neq \ell}(\lambda_i-\lambda_\ell)^{-1}\right)$

とおくと．　$X(A)$ と $X(A^*)$ は互いにdualなFermat hypersurfaceのcomplete intersectionになるということである。

§3 Complete intersections of quadrics.

この章に関することは，数理研講究録「analytic varieties 及び Stratified space における諸問題」を参照されたい。

k を char $k \neq 2$ なる代数閉体，$m+1<l-1$ とする。$Q_1, \cdots, Q_{m+1}$ を $x_1, \cdots, x_l$ に関する2次形式とする。X を $\mathbb{P}^{l-1}$ 内の $\{Q_1=\cdots=Q_{m+1}=0\}$ で定義される variety とする時，それは，complete intersection になるものとする。X を研究するにあたり，l の偶奇により少し様が違うので，今とりあえず，$l=2g+2$ が偶数である場合を考える。$\mathbb{P}^m$ の元 $\lambda=(\lambda_1:\cdots:\lambda_{m+1})\in\mathbb{P}^m$ に対して，$Q_\lambda=\{\lambda_1Q_1+\cdots+\lambda_{m+1}Q_{m+1}=0\}$ で定義される quadric は，λ が generic の時，non singular であると仮定する。$\mathfrak{X}$ を，$\{(x,\lambda)\in\mathbb{P}^{2g+1}\times\mathbb{P}^m \mid x\in Q_\lambda\}$ で，Σ を $\{\lambda\in\mathbb{P}^m \mid Q_\lambda$ が singular$\}$ で，定義する。W を $\mathbb{P}^m$ の Σ で分岐する double cover とする。以下 X と $\mathfrak{X}$，W と $\mathfrak{X}$ の間に存在する代数的対応について考察しよう。

f，φ をそれぞれ，$\mathfrak{X}$ から $\mathbb{P}^m$，$\mathbb{P}^{2g+1}$ への第2，第1射影から induce される map とする。

(I) $R^if_*\mathbb{Q}_l$ に関する考察。

$U=\mathbb{P}^m-\Sigma$，$\mathfrak{X}^0=f^{-1}(U)$ として，$f^0=f|_{\mathfrak{X}^0}$ とする。自然な inclusion $\mathfrak{X}^0\hookrightarrow\mathbb{P}^{2g+1}\times U$ から induce される map $R^{2g}pr_{2*}\mathbb{Q}_l\longrightarrow R^{2g}f^0_*\mathbb{Q}_l$ の cokernel を F と書く。これは，U 上の rank 1

の smooth sheaf である。π を $W \longrightarrow \mathbb{P}^m$ なる map とする。

<u>Proposition 3</u>　ある代数的対応により，$\mathbb{P}^m - \Sigma$ 上の sheaf の同型

$$\Phi : (\pi_* \mathbb{Q}_\ell / \mathbb{Q}_\ell)|_U \xrightarrow{\sim} F(g)$$

を得る。

<u>Remark</u>　この同型，algebraic correspondence は，quadric 内の中間次元の linear subspace 全体のなす Grassmann variety の subvariety の family を使って得られる。(くわしくは，数理研講究録を見よ。)

さて，$H^{2g+m}_{prim}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}_\ell)$，$H^{2g-m}_{prim}(X, \mathbb{Q}_\ell)$，及び $H^m(W, \mathbb{Q}_\ell)^-$ を，

$$H^{2g+m}_{prim}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}_\ell) := \mathrm{Coker}\,(H^{2g+m}(\mathbb{P}^{2g+1} \times \mathbb{P}^m, \mathbb{Q}_\ell) \to H^{2g+m}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}_\ell))$$

$$H^{2g-m}_{prim}(X, \mathbb{Q}_\ell) := \mathrm{Coker}\,(H^{2g-m}(\mathbb{P}^{2g+1}, \mathbb{Q}_\ell) \to H^{2g-m}(X, \mathbb{Q}_\ell))$$

$$H^m(W, \mathbb{Q}_\ell)^- := \mathrm{Coker}\,(H^m(\mathbb{P}^m, \mathbb{Q}_\ell) \to H^m(W, \mathbb{Q}_\ell))$$

によって定義する。

<u>Theorem 7</u>　ある代数的対応により，

$$H^m(W, \mathbb{Q}_\ell)^-(-g) \longrightarrow H^{2g+m}_{prim}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}_\ell) \quad \cdots\cdots (1)$$

$$H^{2g-m}(X, \mathbb{Q}_\ell)(-m) \longrightarrow H^{2g+m}_{prim}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}_\ell) \quad \cdots\cdots (2)$$

なる map を得る。さらに，

i) X が smooth なら (2) は同型.

ii) $Q_1, \cdots, Q_{m+1}$ が 互いに独立に generic なら. X は smooth で. (1) は全射.

(I) (1) の map の構成法

f に関する Leray の spectral sequence

$$E_2^{i,j} = H^i(\mathbb{P}^m, R^j f_* \mathbb{Q}_\ell) \Rightarrow E^{i+j} = H^{i+j}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}_\ell)$$

を考えると. $\dim F^{m+1} H^{2g-m}(X, \mathbb{Q}_\ell) \leqq \sum_{j=0}^{2g-1} \dim E_2^{m+2g-j, j}$

であり. また Weak Lefschetz Theorem より.

$$\dim F^{m+1} H^{2g-m}(\mathbb{P}^{2g+1} \times \mathbb{P}^m, \mathbb{Q}_\ell) \leqq \dim F^{m+1} H^{2g-m}(X, \mathbb{Q}_\ell)$$

となるが. $\dim F^{m+1} H^{2g-m}(\mathbb{P}^{2g+1} \times \mathbb{P}^m, \mathbb{Q}_\ell)$, $\sum_{j=0}^{2g-1} E_2^{m+2g-j, j}$

は共に m が偶数なら g, 奇数なら 0. この事から $E_\infty^{m,2g} \xrightarrow{\sim} H_{prim}^{2g+m}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}_\ell)$

なる map を得る。weight の評価により. $E_2^{m,2g} \to E_\infty^{m,2g}$ なる

全射があるので,

$$H^m(\mathbb{P}^m, R^{2g} f_* \mathbb{Q}_\ell) = E_2^{m,2g} \to E_\infty^{m,2g} \longrightarrow H_{prim}^{2g+m}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}_\ell)$$

なる map を得る。前の Proposition と合わせて.

$$H^m(W, \mathbb{Q}_\ell)^- \longrightarrow H_{prim}^{2g+m}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}_\ell)$$ なる map を得る。

(II) (2) の map の構成法と. i) の証明.

$u \in \mathbb{P}^{2g+1}$ とすると.

$$\varphi^{-1}(u) = \begin{cases} \mathbb{P}^m & (u \in X) \\ \mathbb{P}^{m-1} & (u \notin X) \end{cases}$$

となることから．

$$R^j\varphi_*\mathbb{Q}_\ell = \begin{cases} \mathbb{Q}_\ell(-\frac{j}{2}) & j\text{ は even で }2m-1\text{ 以下} \\ 0 & j\text{ は odd または．}2m+1\text{ 以上} \\ \mathbb{Q}_{\ell,X}(-m) & j=2m. \end{cases}$$

となる。(I) と同様の考察をして．

$$H^{2g-m}_{prim}(X.\ \mathbb{Q}_\ell(-m)) \longrightarrow H^{2g+m}_{prim}(\mathfrak{X},\ \mathbb{Q}_\ell)$$

なる map を定義することができる。さらに．X が nonsingular の時．φ．pr_1 に関する Leray の spectral sequence

$$E_2^{i,j} = H^i(\mathbb{P}^{2g+1}, R^j\varphi_*\mathbb{Q}_\ell) \Rightarrow E^{i+j} = H^{i+j}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}_\ell)$$

$${}'E_2^{i,j} = H^i(\mathbb{P}^{2g+1}, R^j pr_{1*}\mathbb{Q}_\ell) \Rightarrow {}'E^{i+j} = H^{i+j}(\mathbb{P}^{2g+1}\times\mathbb{P}^m, \mathbb{Q}_\ell)$$

は共に weight の評価により．E_2 で退化する。これから i) の同型を得る。

(III) ii) の証明

$Q_1, \cdots, Q_{m+1}$ が代数的に独立に generic である時．(2) の map の全射性を次の様にして示す．

(a) まず (2) が nontrivial であることを示す．

(b) $Q_1, \cdots, Q_{m+1}$ の complete intersection がある Lefschetz pencil の generic geometric fiber となっているとして．（この様な pencil は必ずできる。）(2) の map の target の方が $Gal(\bar{\eta}/\eta)$-module として既約であることを示す。（こ

こで. η は pencil の base の generic point, $\bar{\eta}$ は. η の代数閉包である。)

(a)については: Fermat quadricの complete intersectionの時に specializeして. その時は. §3 の結果から nontrivial であることがわかる。これと specialization map を考えて (a)がわかる。(b) は Deligne の Monodromy action の既約性の定理から出る。

Remark1　ℓが odd の時も少し formalismを変えて. 同様のことが成り立つ。証明方法もほぼ同様である。

Remark2　Introduction において書いた. Reid, Beauville, O'Grady, 向井の結果は. $\mathbb{Q}$をTensorした形では. Theorem 7 より得られる。

参考文献 [1] T. Terasoma. Complete intersections of hypersurfaces. — The Fermat case and the quadric case, Doctor thesis

[2] N. Aoki: A Note on Complete intersections of Fermat type: 立教大学紀要.