

## $H^\infty$ functional calculus

姫路工業大学 八木厚志 ( Atsushi Yagi )

$A$  を、Banach 空間  $X$  に作用する  $\omega$  型の  $(0 \leq \omega < \pi)$  線型作用素とする。定義域  $\mathcal{D}(A)$  は  $X$  で稠密、有界な逆  $A^{-1}$  が存在すると仮定する。 $A$  のスペクトル集合  $\sigma(A)$  を含むある角領域で正則有界な関数  $f$  に対して、 $X$  の有界作用素  $f(A)$  が定義できるかどうかについて調べたい。

$0 < \mu \leq \pi$  に対して、 $S_\mu$  は角領域

$$S_\mu = \{ \lambda \in \mathbb{C} ; |\arg \lambda| < \mu \}$$

を表す。 $H^\infty(S_\mu)$  は、 $S_\mu$  上で正則有界な関数を作る Banach algebra、 $f \in H^\infty(S_\mu)$  に対し  $\|f\|_\infty = \sup \{ |f(\lambda)| ; \lambda \in S_\mu \}$  とする。 $A$  は  $\omega$  型であることより、 $\sigma(A) \subset \bar{S}_\omega$  である。 $\omega < \mu \leq \pi$  に対して考える。 $H^\infty(S_\mu)$  から  $\mathcal{L}(X)$  ( $X$  に作用する有界作用素が作る Banach algebra) への algebra としての準同型写像

$$m : H^\infty(S_\mu) \rightarrow \mathcal{L}(X)$$

で、以下の二つの条件：

i) もし  $f$  が、ある  $\Gamma$  について

$$\int_{\Gamma} |f(\lambda)| \|(\lambda - A)^{-1}\| |d\lambda| < \infty$$

であるならば、 $m(f)$  は

$$m(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda) (\lambda - A)^{-1} d\lambda$$

と一致する。ここで、 $\Gamma$  は  $S_{\mu}$  に含まれ  $\omega(A)$  を囲むような積分路を表す。

ii)  $m$  は連続である。即ち、

$$\|m(f)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C \|f\|_{\infty} \quad f \in H^{\infty}(S_{\mu}).$$

をみたすものが存在するとき、この  $m$  のことを、 $A$  の  $S_{\mu}$  上における  $H^{\infty}$  functional calculus と呼ぶ。以後、f.c. と略記する。上の条件 i) より、このような f.c. は存在すれば、必ず一意的に定まってしまう。その意味で、この  $m(f)$  のことを  $f(A)$  と書き表すことは自然なことである。

1.  $X$  が Hilbert 空間の場合。

$X$  を Hilbert 空間、 $A$  を  $X$  の  $\omega$  型作用素とする。Hilbert 空間では、f.c. の存在と、様々な条件が同値であることが示される。

定理 A 次の条件は、すべて同値である。

(I) ある  $\mu > \omega$  に対して  $H^{\infty}(S_{\mu})$  f.c. が存在する。

(II)  $A^{i\gamma} \in \mathcal{L}(X)$ ,  $-\infty < \gamma < \infty$  かつ  $\sup_{-1 < \gamma < 1} \|A^{i\gamma}\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty$ .

(III) ある  $0 < \alpha, \beta < 1$  について

$$[\mathcal{D}(A), X]_{1-\alpha} \supset \mathcal{D}(A^\alpha)$$

$$[\mathcal{D}(A^*), X]_{1-\beta} \supset \mathcal{D}(A^{*\beta})$$

ただし、 $[Y, X]_{1-\theta}$  ( $0 \leq \theta \leq 1$ ) は  $Y$  と  $X$  の補間空間 (複素の意味の) である。

(IV) ある  $0 < \alpha, \beta < 1$  について

$$\left\{ \int_0^\infty \|\lambda^\alpha A^{1-\alpha} (\lambda + A)^{-1} f\|^2 \frac{d\lambda}{\lambda} \right\}^{1/2} \leq M_\alpha \|f\|, \quad f \in X$$

$$\left\{ \int_0^\infty \|\lambda^\beta A^{*1-\beta} (\lambda + A^*)^{-1} g\|^2 \frac{d\lambda}{\lambda} \right\}^{1/2} \leq M_\beta^* \|g\|, \quad g \in X.$$

証明の要点。(I)  $\Rightarrow$  (II)  $-\infty < \gamma < \infty$  について  $z^{i\gamma} \in H^\infty(S_\mu)$ ,  $\|z^{i\gamma}\|_{H^\infty(S_\mu)} \leq e^{|\mu|\gamma}$  より明らか。(II)  $\Rightarrow$  (III)  $A^{i\gamma}$  は  $\gamma$  について強連続群となる。以下、Heinz - 加藤の不等式と同様な議論を行なえばよい。(III)  $\Rightarrow$  (IV) Hilbert 空間では、複素補間と実補間が同等であるという事実が、証明のポイントになる。(IV)  $\Rightarrow$  (I)  $\varphi \in H^\infty(S_\mu)$  とする。形式的計算であるが

$$(\varphi(A)f, g) = (\varphi(A)A^{-(\alpha+\beta)}f, A^{*(\alpha+\beta)}g)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(\lambda) \lambda^{-(\alpha+\beta)} ((\lambda-A)^{-1}f, A^{*(\alpha+\beta)}g) d\lambda$$

ここで部分積分して

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Psi(\lambda) ((\lambda-A)^{-2}f, A^{*(\alpha+\beta)}g) d\lambda$$

$\Psi(\lambda)$  は  $\varphi(\lambda)\lambda^{-(\alpha+\beta)}$  の原始関数である。さらに、 $\Gamma$  を負の実軸に近づけると結局

$$|(\varphi(A)f, g)| \leq C \int_0^{\infty} \lambda^{1-(\alpha+\beta)} |(A^{\alpha}(\lambda+A)^{-1}f, A^{*\beta}(\lambda+A^*)^{-1}g)| d\lambda$$

$$\leq C \int_0^{\infty} \lambda^{1-\alpha} \|A^{\alpha}(\lambda+A)^{-1}f\| \lambda^{1-\beta} \|A^{*\beta}(\lambda+A^*)^{-1}g\| \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

詳しい証明は、文献 [1] 及び [3] を参照。

さらに、上の結果は次のように強められる。

定理 B 定理 A の条件がみたされれば、次の各条件が成立する。

(I) 任意の  $\mu > \omega$  に対して、 $H^{\infty}(S_{\mu})$  f.c. が存在する。

(II) 任意の  $\mu > \omega$  に対して

$$\|A^{i\gamma}\| \leq C_{\mu} e^{\mu|\gamma|}.$$

(III) すべての  $0 < \theta < 1$  について

$$[\mathcal{D}(A), X]_{1-\theta} = \mathcal{D}(A^{\theta})$$

$$[\mathcal{D}(A^*), X]_{1-\theta} = \mathcal{D}(A^{*\theta}).$$

(IV) すべての  $0 < \theta < 1$  について

$$\left\{ \int_0^{\infty} \|\lambda^{\theta} A^{1-\theta} (\lambda+A)^{-1}f\|^2 \frac{d\lambda}{\lambda} \right\}^{1/2} \leq M_{\theta} \|f\|, \quad f \in X$$

$$\left\{ \int_0^{\infty} \|\lambda^{\theta} A^{*1-\theta} (\lambda + A^*)^{-1} g\|^2 \frac{d\lambda}{\lambda} \right\}^{1/2} \leq M_{\theta}^* \|g\|, \quad g \in X.$$

実際に上の f.c. を含む条件 (I) ~ (IV) をみたす作用素の例として、次の様な、 $L^2$  空間における偏微分作用素がある。

例 1  $\Omega$  を  $\mathbb{R}^n$  の領域として、 $\Omega$  における楕円型微分作用素

$$A(x; D) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_{\alpha}(x) D^{\alpha} \quad x \in \Omega$$

と、 $\partial\Omega$  上の境界作用素

$$B_j(x; D) = \sum_{|\beta| \leq m_j} b_{j\beta}(x) D^{\beta} \quad x \in \partial\Omega$$

を考える。この微分作用素、境界作用素の  $L^2(\Omega)$  における実現を  $A$  と表し、 $A$  は  $\omega$  型であるとする。係数  $a_{\alpha}$ ,  $b_{j\beta}$  が十分滑めらかならば、 $A$  は条件

$$[\mathcal{D}(A), L^2(\Omega)]_{1-\theta} = [\mathcal{D}(A^*), L^2(\Omega)]_{1-\theta}, \quad 0 < \theta < 1/4m$$

をみたし、一般に上の条件をみたす作用素は (I) ~ (IV) をみたす。( [1] を参照 )

係数がもう少し滑らかでない場合の例として、

例 2  $A$  は、2 階の楕円型微分作用素

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_i D_j \quad x \in \Omega$$

の、 $\partial\Omega$  上の Dirichlet 境界条件の下での  $L^2$  実現とする。係数

$a_{ij}$  が  $C^1$  級ならば、 $A$  は極大単調作用素となり、極大単調作用素は (I) ~ (IV) をみたす。

上の作用素で、 $a_{ij}$  の滑らかさがさらに悪くなった場合、例えば、 $a_{ij}$  が Hölder 連続ならばどうなるかという問題が残っている。空間の次元が 1 の場合には、次のような例がある。

例 3  $\mathbb{R}^1$  上で微分作用素

$$a(x)D^2 \quad -\infty < x < \infty$$

を考へ、 $A$  をこの作用素の  $L^2(\mathbb{R}^1)$  実現とする。  $M \gg a(x) \gg \delta > 0$  か  $a \in L^\infty(\mathbb{R}^1)$  とすると、 $A$  は (I) ~ (IV) をみたす作用素となる。この証明については、[3] を参照。

## 2. $X$ が Banach 空間の場合。

Banach 空間では、定理 A はそのままの形では成立しない。実際、条件 (II) はみたすが、条件 (I) の f.c. が存在しないような例がある。また、条件 (IV) に現われた 2 乗積分の評価式も、一般に、Banach 空間では (たとえ  $L^p$  ( $p \neq 2$ ) 空間であっても) 期待できない。

そこで、ここでは、 $X$  を  $L^p$  ( $1 < p < \infty$ ) 空間に限定し、さらに、Littlewood - Paley の理論に従って、いわゆる次のような  $g$ -function を考えることにする。 $A$  を  $L^p(\Sigma)$  の  $\omega$  型作

用素とする。  $0 < \theta < 1$ ,  $\mu > \omega$  に対し

$$g_{\theta, \mu}(\varphi)(x) = \left\{ \int_{\Gamma_{\mu}} |\lambda^{\theta} A^{1-\theta} (\lambda - A)^{-1} \varphi(x)|^2 \left| \frac{d\lambda}{\lambda} \right| \right\}^{1/2},$$

$$x \in \Sigma, \varphi \in L^p(\Sigma)$$

$$g_{\theta, \mu}^*(\psi)(x) = \left\{ \int_{\Gamma_{\mu}} |\lambda^{\theta} A^{*1-\theta} (\lambda - A^*)^{-1} \psi(x)|^2 \left| \frac{d\lambda}{\lambda} \right| \right\}^{1/2},$$

$$x \in \Sigma, \psi \in L^{p'}(\Sigma)$$

と定義する。ここで、 $\Gamma_{\mu}$  は  $\infty e^{-2i\mu}$  から原点、原点から  $\infty e^{2i\mu}$  に向う二つの半直線からなる積分路を表す。また、 $p' = p/(p-1)$  である。このとき、次のことが成立する。

定理 C (I) ある  $0 < \alpha, \beta < 1$ ,  $\mu > \omega$  に対し  $g$ -function 評価式

$$\|g_{\alpha, \mu}(\varphi)\|_p \leq C \|\varphi\|_p, \quad \varphi \in L^p(\Sigma)$$

$$\|g_{\beta, \mu}^*(\psi)\|_{p'} \leq C^* \|\psi\|_{p'}, \quad \psi \in L^{p'}(\Sigma)$$

が成立するならば、任意の  $\nu > \mu$  に対し  $H^{\infty}(S_{\nu})$  f.c. が存在する。一方、逆に

(II)  $\mu > \omega$  に対し、 $H^{\infty}(S_{\mu})$  f.c. が存在すれば、任意の  $\nu > \mu$  に対し上の形の  $g$ -function 評価式が成立する。

この定理と類似の結果は、もっと弱い形で [2] によって示

されていた。定理 C は Cowling, McIntosh との共同研究により得られたものである。(I) の証明は、Hilbert 空間の場合と類似の議論による。(II) の証明のポイントは、 $L^p$  空間は次のような "Randomisation" と呼ばれる性質を持っていることである。

補題  $T_n, n=1, 2, 3, \dots$ , を  $L^p(\Sigma)$  に作用する有界作用素の列とする。任意の  $a = (a_1, a_2, a_3, \dots) \in \ell^\infty$  に対し

$$\left\| \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n T_n \varphi \right\} (x) \right\|_p \leq C \|a\|_{\ell^\infty} \|\varphi\|_p, \quad \varphi \in L^p(\Sigma)$$

ならば、

$$\left\| \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |(T_n \varphi)(x)|^2 \right\}^{1/2} \right\|_p \leq C \|\varphi\|_p, \quad \varphi \in L^p(\Sigma)$$

が成り立つ。

### 参考文献

- [1] A. Yagi: Coïncidence entre des espaces d'interpolation et des domaines de puissances fractionnaires d'opérateurs, C. R. Acad. Sc. Paris (Ser. I) 299 (1984), 173-176.
- [2] M. Cowling: Square functions in Banach spaces, Proc. Centre Math. Anal. Australian National Univ. 9 (1985), 177-184.
- [3] A. McIntosh: Operators which have an  $H_\infty$  functional calculus, Proc. Centre Math. Anal. Australian National Univ. 14 (1986), 210-231.