

作用素単調関数に関する不等式

大阪教育大 藤井 淳一 (Jun Ichi Fujii)

藤井 正俊 (Masatoshi Fujii)

1. ここでは A, B を Hilbert space 上の (有界線形) 正作用素とし、 f は $[0, \infty)$ 上の (非負連続) 作用素単調関数とする。すなわち:

$$0 \leq A \leq B \iff 0 \leq f(A) \leq f(B)$$

としよう。このとき、 $f(A)$ と $f(B)$ の差のノルムを f, A, B を使って評価することを考える。特に等号成立の同値条件に注目したい。このような評価としては、まず van Hemmen-Ando [5] の対称なノルム $\|\cdot\|_*$ に関する次の不等式が挙げられる:

定理 A. $\|f(A) - f(B)\|_* \leq (2/t)(f(t/2) - f(0)) \|A - B\|_*$, for $A + B \geq t > 0$.

この定理の一般化として、Kittaneh-Kosaki [4] は、Schatten p -norm について次の不等式を示している (ただし X は一般の作用素で $p = \infty$ のときは作用素ノルムとする):

定理 B. $\|f(A)X - Xf(B)\|_p \leq \phi(a, b) \|AX - XB\|_p$ for $A \geq a \geq 0, B \geq b \geq 0$,

$$\text{ただし、} \phi(a, b) = \begin{cases} (f(a) - f(b))/(a - b) & (a \neq b \text{ のとき}) \\ f'(a) & (a = b \text{ のとき}) \end{cases}$$

さらに、この定理の特別な場合として、 $X=1, a=b, f(t)=t^{1/2}$ についての評価式の等号成立条件が、 $A=B$ であることを求めている:

定理 C. $A, B \geq t > 0$ となる A, B に対して、

$$2t \|A - B\|_p = \|A^2 - B^2\|_p \iff A = B.$$

(ただし、左辺は有限である場合に限る。)

また、作用素ノルムについては次の評価式が示されている：

定理 D. $\|f(A) - f(B)\| \leq \|f(|A - B|)\| (= f(\|A - B\|))$.

この評価式に関しては、Ando [1] も、非負定値行列のユニタリ不変なノルムについて、Ky Fan norm のテクニックを使って示している。

2. 本稿では作用素ノルムに限って、いくつかの場合の等号成立条件を求めていくが、定理 C から予想されるように、 $A = B$ が同値条件の候補である。しかしすぐにわかるように、 f が線形である時は、定理 D は常に等号が成立する。また、 $f(t) = t^{1/2}$ のように線形でない場合でも、 $A = B$ が等号成立条件とはならない。実際、次のように A と B に可換の条件を加えたとしても：

nontrivial な射影 P に対し、

$$A = 1 + P = P^2 + 2P, \quad B = P$$

とすれば、 $A - B = 1$ より、 $f(|A - B|)$ のノルムは 1. 一方、

$$f(A) - f(B) = P^2 + \sqrt{2}P - P = P^2 + (\sqrt{2} - 1)P$$

だから

$$\|f(A) - f(B)\| = 1 = \|f(|A - B|)\|.$$

しかしながら、作用素を可逆な場合に限れば、 $A = B$ でなければならない：

【定理 1】 A, B を可逆正作用素、 f を非線形作用素単調関数 on $[0, \infty)$ とするとき

$$\|f(A) - f(B)\| = \|f(|A - B|)\| \iff A = B, f(0) = 0.$$

〈証明〉 非線形作用素単調関数は、strictly concave なので、 A, B の可逆性よりもし、 $A \neq B$ とするならば、

$$a: = \| f(\|A-B\|+A) - f(A) \| < f(\|A-B\|),$$

$$b: = \| f(\|A-B\|+B) - f(B) \| < f(\|A-B\|).$$

$c = \max\{a, b\}$ ($< f(\|A-B\|)$) とすると

$$\begin{aligned} f(A) - f(B) &= f(A-B+B) - f(B) \\ &\leq f(\|A-B\|+B) - f(B) \leq c, \end{aligned}$$

同様に、 $f(B) - f(A) \leq c$ となるので、

$$\| f(A) - f(B) \| \leq c < f(\|A-B\|) = \| f(|A-B|) \|.$$

したがって、等号成立時には、 $\|A-B\|=0$ そして、この結果、 $f(0)=0$ となる。逆は明らか。□

この定理を適用すれば、次の Ando [1] による不等式についても、等号成立条件は同様である：

$$\textcircled{1} \quad \|A^p - B^p\| \leq \| |A-B|^p \| \quad \text{for } 0 < p < 1,$$

$$\textcircled{2} \quad \| \log(A+1) - \log(B+1) \| \leq \| \log(|A-B|+1) \|.$$

さらに逆関数を考えることによって

$$\textcircled{3} \quad \| \exp(A) - \exp(B) \| \geq \| \exp(|A-B|) - 1 \|,$$

$$\textcircled{4} \quad \|A^p - B^p\| \geq \| |A-B|^p \| \quad \text{for } p \geq 1,$$

$$\textcircled{5} \quad \|A^p \log(A+1) - B^p \log(B+1)\| \geq \| |A-B|^p \log(|A-B|+1) \| \quad \text{for } p \geq 1.$$

等号成立条件から見れば、これらの不等式の評価が最良であることがわかる。たとえば Kittaneh の不等式 cf. [4]；

$$0 < t < \|A-B\| \quad \Rightarrow \quad \| \log(A+t) - \log(B+t) \| \leq \log(e \|A-B\| / t).$$

が、②によって、次のように改良できる：

$$0 < t < \|A - B\| \quad \Leftrightarrow \quad \| \log(A+t) - \log(B+t) \| < \log(2 \|A - B\| / t).$$

実際、 $C = A/t$, $D = B/t$ とおけば、 $\|C - D\| > 1$ なので、②より、

$$\begin{aligned} \| \log(A+t) - \log(B+t) \| &= \| \log(C+1) - \log(D+1) \| \\ &\leq \| \log(|C-D| + 1) \| \\ &= \log(\|C-D\| + 1) \\ &< \log(2 \|C-D\|) \\ &= \log(2 \|A - B\| / t). \end{aligned}$$

3. さて、次に定理Bの等号成立条件を考えたいが、定理Cからある程度類推できるように、 $X \neq 1$ の場合は難しいし、 $X = 1$ の場合でも $A = B$ を導くには、区間変化率では制御が不可能であることは、次の例からもわかる：

$f(t) = t^{1/2}$ について、 $A = 1$, $B = 1 \oplus \varepsilon$ ($0 < \varepsilon < 1$) とすれば、

$$\|A - B\| = 1 - \varepsilon, \quad \|f(A) - f(B)\| = 1 - \varepsilon$$

となるので、 $a = 1$, $b = \varepsilon$ について $\phi(a, b) = (1 - \varepsilon^{1/2}) / (1 - \varepsilon)$.

したがって、 $\|f(A) - f(B)\| = \phi(a, b) \|A - B\|$.

そこで、次の命題が予想される：

【定理2】 $A, B \geq c > 0$, f を非線形作用素単調関数 on $(0, \infty)$ とするとき、

$$\|f(A) - f(B)\| = f'(c) \|A - B\| \quad \Leftrightarrow \quad A = B.$$

〈証明〉 \Leftarrow は明らかだから、 \Rightarrow を示す： $\|f(A) - f(B)\| = f'(c) \|A - B\|$ と仮定.

ここで、作用素単調関数の次の積分表示を使う：

$$f(x) = \alpha + \beta x + \int (t:x) dm(t)$$

($t:x = tx/(t+x)$, $\alpha = f(0)$, $\beta = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)/t$, $\{t/(1+t)\} dm(t)$; 正Radon測度)

$X = (t+A)^{-1}(A-B)(t+B)^{-1} = t^{-2}(t:A-t:B)$ とおくと、

$$\begin{aligned} \|f(A) - f(B)\| &= \|\beta(A-B) + \int (t:A-t:B) dm(t)\| \\ &\leq \beta \|A-B\| + \int t^2 \|X\| dm(t) \\ (*) \quad &\leq \beta \|A-B\| + \int t^2 \|(t+A)^{-1}\| \|A-B\| \|(t+B)^{-1}\| dm(t) \\ &\leq \{\beta + \int t^2 (t+a)^{-1} (t+b)^{-1} dm(t)\} \|A-B\| \\ (**) \quad &\leq \{\beta + \int t^2 (t+c)^{-2} dm(t)\} \|A-B\| \\ &= f'(c) \|A-B\| = \|f(A) - f(B)\|, \end{aligned}$$

ただし、 $a = \min \sigma(A)$, $b = \min \sigma(B)$ とする。全辺等しいので、 m に関する null set を除いて、

$$\begin{aligned} (1) \quad \|X\| &= \|(t+A)^{-1}\| \|A-B\| \|(t+B)^{-1}\| && \text{by } (*), \\ (2) \quad (t+a)^{-1} (t+b)^{-1} \|A-B\| &= (t+c)^{-2} \|A-B\| && \text{by } (**). \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで仮に $A \neq B$ と仮定しよう。すると、(2)より $a = b = c$ 。

また、条件の対称性と、 $X = X^*$ より、 $\omega(X) = \omega(|X|) = \|X\|$ となる state があるとよいので、(1)より、

$$\begin{aligned} \|X\| = \omega(|X|) &\leq \|(t+A)^{-1}\| \|A-B\| \omega((t+B)^{-1}) \\ &\leq \|(t+A)^{-1}\| \|A-B\| \|(t+B)^{-1}\|, \end{aligned}$$

だから

$$\omega((t+B)^{-1}) = \|(t+B)^{-1}\| = 1/(t+b).$$

そして、 $t:B = t(1-t(t+B)^{-1})$ に注意すれば、

$$\omega(t:B) = t:b$$

がわかる。同様に、 $X = X^*$ より

$$\omega(t:A) = t:a$$

も得られるので、

$$t^2 \omega(X) = \omega(t:A-t:B) = \omega(t:A) - \omega(t:B) = t:a - t:b = 0$$

となり、 $X=0$ 即ち、 $A=B$ となって $A \neq B$ の仮定と矛盾する。したがって等号成立条

件は、 $A = B$. \square

(以上 [2] 参照)

同じ手法では、定理 B の等号成立条件は求められないが、たとえば、次のような命題なら、同様にして求められる (以下 [3] 参照) :

【定理 3】 $A, B \geq c > 0$, f を非線形作用素単調関数 $on (0, \infty)$ とし、
さらに、作用素 X が、 $AX = X^*A$, $XB = BX^*$ をみたすとき、
 $\|f(A)X - Xf(B)\| = f'(c) \|AX - XB\| \iff AX = XB$.

証明は、前定理の証明の X のかわりに

$$Y = (t+A)^{-1}(AX - XB)(t+B)^{-1} = t^{-2}((t:A)X - X(t:B))$$

とおくと、 Y^* に関して、中央の因子 $AX - XB$ が、条件より

$$(AX - XB)^* = X^*A - BX^* = AX - XB$$

と戻るので、 C^* -環の指標を適切に使えばうまくいくことがわかる。

この定理は、次の形にも変形することができる :

【系】 $A, B \geq c > 0$, f を非線形作用素単調関数 $on (0, \infty)$ とし、
さらに作用素 X が、 $AX = XA$, $XB = BX$ をみたすとき、
 $\|f(A)X - Xf(B)\| = f'(c) \|AX - XB\| \iff AX = XB$.

この系と定理 3 は、 X がエルミット作用素ならば同じ命題になることから Berberian のテクニックを利用して、次のように置き換えてやればよい :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix} \quad B_0 = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B & 0 \end{pmatrix} \quad X_0 = \begin{pmatrix} 0 & X \\ X^* & 0 \end{pmatrix}$$

と置くとやはり $A \circ X \circ = X \circ A \circ$, $B \circ X \circ = X \circ B \circ$ が成立するので、定理 3 より証明できる。

参考文献

- [1] Ando, T.: Comparison of norms $\|f(A) - f(B)\|$ and $\|f(|A - B|)\|$, Preprint.
- [2] Fujii, J., Fujii, M.: On operator inequalities due to Ando-Kittaneh-Kosaki, to appear in Publ. RIMS, Kyoto Univ.
- [3] Itai, S., Fujii, J., Fujii, M.: An operator inequality derived from Fuglede-Putnam theorem, Preprint.
- [4] Kittaneh, F., Kosaki, H.: Inequalities for the Schatten p -norm V , Publ. RIMS, Kyoto Univ., 23(1986), 433-443.
- [5] van Hemmen, J.L., Ando, T.: An inequality for trace ideals, Commun. Math. Phys., 76(1980), 143-148.