数理解析研究所講究録
682巻 1989年 106-122


# U－統計量の正規近似の下限

鹿児島大 理　前園　宜彦 (Yoshihiko Maesono)

## はじめに

標準化したU－統計量の分布の正規近似の精密化は，近年いろいろ論じられている。特にBerry－Esséen boundについては，kernelの3次の絶対モーメントが存在するという仮定の下で求められている。Edgeworth展開については，かなり複雑な仮定の下ではあるが，$N^{-1}$のオーダーまで得られている。他方，独立な確率変数の和の分布については，正規近似の下側のboundが研究されている。ここではU－統計量の分布の正規近似の下限について議論する。

## 1. 序

$X_1, X_2, \cdots, X_N$を互いに独立で同一分布に従う確率変数とし，$h(x_1, \cdots, x_r)$を成分の入れ替えに対して不変なr次のsymmetric kernelとする。このときU－統計量

$$U_N = \binom{N}{r}^{-1} \sum_{C_{N,r}} h(X_{i_1}, \cdots, X_{i_r}) \qquad (1)$$

について考える。ここで $\sum_{C_{N,r}}$ は $1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leqq N$ についての和を表わす。Hoeffding (1948) は $Eh^2 < \infty$ の条件の下で $(U_N - EU_N)/\sqrt{\mathrm{Var}\, U_N}$ の極限分布が標準正規分布 $N(0, 1)$ であることを示した。またU－統計量の Berry－Esséen bound, 即ち $\Phi(x)$ を $N(0, 1)$ の分布関数とするとき

$$\Delta = \sup_x \left| P\left[ \frac{U_N - EU_N}{\sqrt{\mathrm{Var}\, U_N}} \leqq x \right] - \Phi(x) \right|$$

の上側の bound について多くの研究がなされ，最終的に Callaert and Janssen (1978) によって $E|h|^3 < \infty$ の条件の下で，$\Delta \leqq C N^{-\frac{1}{2}}$ （$C$：定数）が示された。

他方，独立な確率変数（必ずしも同一分布ではない）の和の分布の正規近似について，近年詳しく調べられている。$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_N$ を独立な確率変数で $E\varepsilon_i = 0$ かつ $\sum_{i=1}^{N} E\varepsilon_i^2 = 1$ とする。この時 Rozovskii (1978 a, b) と Hall (1980, 1982) は，

$$\Delta^* = \sup_x \left| P\left[ \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \leqq x \right] - \Phi(x) \right|$$

が漸近的に

$$\rho = \sum_{i=1}^{N} E\{\varepsilon_i^2 I[|\varepsilon_i| > 1]\} + \sum_{i=1}^{N} E\{\varepsilon_i^4 I[|\varepsilon_i| \leqq 1]\} + \left| \sum_{i=1}^{N} E\{\varepsilon_i^3 I[|\varepsilon_i| \leqq 1]\} \right|$$

の大きさに等しいことを証明した。さらに Hall and Barbour (1984) は，C を定数とした時

$$\rho \leqq C\{\Delta^* + \sum_{i=1}^{N}[E\xi_i^2]^2\} \tag{2}$$

が成り立つことを示した。もし $\xi_i$ が同一の分布に従えば，$\sum_{i=1}^{N}[E\xi_i^2]^2 = N^{-1}$ である。この(2)の不等式は，2つの分布がどれだけ離れているかを示すものであり，証明は Stein 法 (1972) で，通常の Fourier 解析ではない点が注目される。U－統計量について，(2)に相当する不等式を求めるのが，本論の目的である。

## 2. 下限を与える不等式

まず次の仮定をおく。

(A1)　$Eh(X_1, X_2, \cdots, X_r) = 0$ かつ $Eh^2(X_1, X_2, \cdots, X_r) < \infty$。

次に Hoeffding (1961) による $U_N$ の forward martingale への分解を与える。$1 \leqq k \leqq r$ に対して

$$a_k(x_1, x_2, \cdots, x_k) = E[h(X_1, X_2, \cdots, X_r) \mid X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_k = x_k],$$

$$g_1(x_1) = a_1(x_1),\quad g_2(x_1, x_2) = a_2(x_1, x_2) - \sum_{i=1}^{2} g_1(x_i),\quad \cdots\cdots,$$

$$g_r(x_1, x_2, \cdots, x_r) = a_r(x_1, x_2, \cdots, x_r) - \sum_{j=1}^{r-1}\sum_{C_{r,j}} g_j(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_j}),$$

$$A_{k,N} = \sum_{C_{N,k}} g_k(X_{i_1}, X_{i_2}, \cdots, X_{i_k}),$$

とおく。この時(1)で与えられた $U_N$ は，

$$U_N = \binom{N}{r}^{-1} \sum_{k=1}^{r} \binom{N-k}{r-k} A_{k,N}$$

と表わすことができる。さらに $g_k$ の定義より $\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}\not\subset\{j_1,j_2,\cdots,j_s\}$ ならば

$$E[g_k(X_{i_1},X_{i_2},\cdots,X_{i_k})\mid X_{j_1},X_{j_2},\cdots,X_{j_s}]=0 。$$

従って，$E|\pi g_k|<\infty$ を満たす任意の関数 $\pi(x_1,x_2,\cdots,x_s)$ に対して

$$E[\pi(X_{j_1},X_{j_2},\cdots,X_{j_s})g_k(X_{i_1},X_{i_2},\cdots,X_{i_k})]=0. \qquad (3)$$

この性質を使って，Maesono (1987) は，kernel $h$ の $p$ 次の絶対モーメントが存在するとき，$m_p=[8(p-1)\max(1,2^{p-3})]^p$ に対して

$$E|A_{k,N}|^p\leqq(m_p)^k E|g_k(X_1,X_2,\cdots,X_k)|^p N^{\frac{pk}{2}} \qquad (4)$$

が成りたつことを示している。また $U_N$ の分散 $\sigma_N^2$ は $\xi_k^2=E[g_k^2(X_1,\cdots,X_k)]$ とおくとき，

$$\sigma_N^2=\mathrm{Var}\,U_N=\binom{N}{r}^{-1}\sum_{k=1}^{r}\binom{N-k}{r-k}^2\binom{N}{k}\xi_k^2$$

$$=\frac{r^2}{N}\xi_1^2+\frac{[r(r-1)]^2}{N(N-1)2!}\xi_2^2+\cdots+\frac{r!}{N(N-1)\cdots(N-r+1)}\xi_r^2$$

となる。

本論では正規分布での近似を考えるので，kernel が degenerate していない，即ち

(A2) $\qquad E g_1^2(X_1)=\xi_1^2>0$

を仮定する。

モーメントの存在条件を緩めるために，次の記号を準備す

る。$N \to \infty$ の時 $\alpha(N) \downarrow 0$ , $N^{\frac{1}{2}}\alpha(N) \uparrow \infty$ となる $\alpha(N)$ に対して、

$$\beta(N) = \int_{|g_1(x)| > N^{\frac{1}{2}}\alpha(N)} g_1^2(x)\, dP(X_1 \leqq x),$$

$$\gamma(N) = \max\left(\beta^{\frac{1}{2}}(N),\ \alpha(N)\right).$$

とおく。このとき仮定(A1)より，$N \to \infty$ の時 $\gamma(N) \downarrow 0$, $N^{\frac{1}{2}}\gamma(N) \uparrow \infty$ となりさらに

$$\int_{|g_1(x)| > N^{\frac{1}{2}}\gamma(N)} g_1^2(x)\, dP(X_1 \leqq x) \leqq \gamma^2(N) \qquad (5)$$

が成り立つ。

またStein法を使うために関数 $g(x)$ と $f(x) = g^{(1)}(x) - x\,g(x)$ を考え，次のことを仮定する。

(A3) $g^{(1)}(x), g^{(2)}(x), g^{(3)}(x), f^{(1)}(x), f^{(2)}(x), f^{(3)}(x), f^{(4)}(x)$ が有界で.
$\int_{-\infty}^{\infty} |g^{(2)}(x)|dx < \infty$, $\int_{-\infty}^{\infty} |f^{(1)}(x)|dx < \infty$, $\int_{-\infty}^{\infty} |f^{(3)}(x)|dx < \infty$ .

この条件を満たすものとしては. $g(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ または $g(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$ 等の関数がある。(Hall and Barbour (1984) 参照)。ここで.部分積分を使うと

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^{(1)}(x)\, e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\, g(x)\, e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

となる。従って $G$ を $N(0,1)$ に従う確率変数とすると $E f(G) = 0$ が成り立つ。

記号として次のものを準備する。

$$d_{k,N} = \sigma_N^{-1} \binom{N}{r}^{-1} \binom{N-k}{r-k} \qquad k=1,2,\cdots,r,$$

$$R^1 = N d_{1,N} E\left[g_1(X_1)\left\{g(G + d_{1,N} g_1(X_1)) - g(G) - d_{1,N} g_1(X_1)\, g^{(1)}(G)\right\}\right],$$

$$R^2 = \frac{1}{2} N(N-1) d_{2,N} E\left[g_2(X_1, X_2)\left\{f^{(1)}(G + d_{1,N}(g_1(X_1) + g_1(X_2)))\right.\right.$$
$$\left.\left. - f^{(1)}(G) - d_{1,N}(g_1(X_1) + g_1(X_2))\, f^{(2)}(G)\right\}\right],$$

$$R_N = R^1 - R^2 。$$

このとき次の定理が成り立つ。

［定理］ (A1), (A2), (A3) の仮定が成り立つ時，定数 $C$ が存在して．

$$|R_N| \leq C\{\Delta + \gamma(N) N^{-\frac{1}{2}} + N^{-1} + \delta_N + \eta_N\}。 \qquad (6)$$

ここに

$$\delta_N = \left(\sup_x |f^{(1)}(x)| + \sup_x |f^{(3)}(x)| + \sup_x |g^{(2)}(x)|\right) \sum_{k=3}^{r} d_{k,N} (m_2 N)^{\frac{k}{2}} \xi_k,$$

$$\eta_N = \frac{[r(r-1)]^2 \xi_2^2}{(N-1)\,2!\, r^2 \xi_1^2} + \frac{[r(r-1)(r-2)]^2 \xi_3^2}{(N-1)(N-2)\,3!\, r^2 \xi_1^2} + \cdots + \frac{r!\, \xi_r^2}{(N-1)\cdots(N-r+1)\, r^2 \xi_1^2} .$$

［注意 1］ $\delta_N$, $\eta_N$ ともに漸近的に $O(N^{-1})$ である。

［注意 2］ $\Delta$ と $d_{k,N}$ $(k=1,2,\cdots,r)$ の定義の中の $\sigma_N^{-1}$ の代わりに $N^{\frac{1}{2}}(r\xi_1)^{-1}$ でおきかえても定理の不等式は成り立つ。

## 3. 定理の証明

簡単のために次の記号を準備する。

$$Y_i = d_{1,N}\, g_1(X_i), \quad Z_{i,j} = d_{2,N}\, g_2(X_i, X_j), \quad W = \sum_{i=1}^{N} Y_i,$$

$$V = \sum_{i<j} Z_{i,j}, \quad T = W + V, \quad S = \sigma_N^{-1} U_N, \quad L_k = \sum_{i=1}^{k} Y_i,$$

$$W_k = W - L_k.$$

また $W^0, T^0, S^0, L_k^0, W_k^0$ はそれぞれ $W, T, S, L_k, W_k$ のコピーで，$X_1, X_2, \cdots, X_N$ とは独立とする。

定理の証明の前に次の補題を示す。

〔補題〕 $D$ を $W_k$ と独立で，$ED=0$，$ED^2<\infty$ となる確率変数とする。また $Q(x)$ を 3 回微分可能で，その微分が有界，かつ $\int_{-\infty}^{\infty} |Q^{(2)}(x)|\,dx < \infty$ な関数とする。このとき (A1) の仮定の下で次の不等式が成立する。

$$\left| E[DQ(W_k+L_k)] - E[DQ(G+L_k)] + E[DL_k]\, E[VQ^{(2)}(W)] \right|$$
$$\leqq E|DL_k| \int_{-\infty}^{\infty} |Q^{(2)}(x)|\,dx\ \Delta + E|DL_k| \left\{ \frac{1}{2} \sup_x |Q^{(3)}(x)| \,(EL_k^2 + EV^2) \right.$$
$$\left. + \sup_x |Q^{(2)}(x)|\, E|S^0 - T^0| \right\} + \left| E[DV^0 \{Q^{(1)}(W^0+L_k) - Q^{(1)}(W^0) - L_k Q^{(2)}(W^0)\}] \right|$$

（証明） $a_1, a_2, \cdots, a_5$ を次のようにおく。

$$a_1 = E\left[DL_k \int_0^1 E\{Q^{(1)}(W_k + tL_k) - Q^{(1)}(W^0 + tL_k) \mid Y_1, \cdots, Y_k, D\}\, dt\right],$$

$$a_2 = E\left[DL_k \int_0^1 E\{Q^{(1)}(W^0 + tL_k) + V^0 Q^{(2)}(W^0 + tL_k) - Q^{(1)}(T^0 + tL_k) \mid Y_1, \cdots, Y_k, D\}\, dt\right],$$

$$a_3 = E\left[DL_k \int_0^1 E\{Q^{(1)}(T^0 + tL_k) - Q^{(1)}(S^0 + tL_k) \mid Y_1, \cdots, Y_k, D\}\, dt\right],$$

$$a_4 = E\left[DL_k \int_0^1 E\{Q^{(1)}(S^0 + tL_k) - Q^{(1)}(G + tL_k) \mid Y_1, \cdots, Y_k, D\}\, dt\right],$$

$$a_5 = E[DV^0\{Q^{(1)}(W^0 + L_k) - Q^{(1)}(W^0) - L_k Q^{(2)}(W^0)\}].$$

この時 Hall and Barbour (1984) の手法より.

$$E[DL_k \int_0^1 E\{Q^{(1)}(W_k + tL_k) \mid Y_1, \cdots, Y_k, D\} dt] = E[D\{Q(W_k + L_k) - Q(W_k)\}]$$

が成り立つ。他の項についても同様なことが成り立つ。条件より $D$ と $W_k$ は独立で $ED = 0$ であるから

$$|E[DQ(W_k + L_k)] - E[DQ(G + L_k)] + E[DL_k]E[VQ^{(2)}(W)]|$$
$$= |a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - a_5| \leqq \sum_{i=1}^{5} |a_i|.$$

ここで $L_k^0$ と $W_k^0$ が独立で $EL_k^0 = 0$ より.

$$|a_1| = |E[DL_k \int_0^1 E\{Q^{(1)}(W_k + tL_k) + L_k^0 Q^{(2)}(W_k^0 + tL_k)$$
$$- Q^{(1)}(W^0 + tL_k) \mid Y_1, \cdots, Y_k, D\} dt]|$$

$$\leqq E|DL_k| \frac{1}{2} E(L_k^0)^2 \sup_x |Q^{(3)}(x)|.$$

また

$$|a_2| \leqq E|DL_k| \frac{1}{2} E(V^0)^2 \sup_x |Q^{(3)}(x)|,$$

$$|a_3| \leqq E|DL_k| \, E|S^0 - T^0| \sup_x |Q^{(2)}(x)|$$

は簡単に示せる。Hall and Barbour (1984) P109 より任意の定数 $\delta$ に対して

$$|E\{Q^{(1)}(S^0 + \delta) - Q^{(1)}(G + \delta)\}| \leqq \int_{-\infty}^{\infty} |Q^{(2)}(x)| dx \, \Delta.$$

従って

$$|a_4| \leqq E|DL_k| \int_{-\infty}^{\infty} |Q^{(2)}(x)| dx \, \Delta.$$

（証明終）

$d_{1,N}$ と $d_{2,N}$ の定義より

$$d_{1,N} \leqq N^{-\frac{1}{2}} \xi_1^{-1} \quad , \quad d_{2,N} \leqq r N^{-\frac{3}{2}} \xi_1^{-1} \tag{7}$$

条件(A2)と(4)式より

$$|E f(W) + E[V f^{(1)}(W)] - E f(S)|$$
$$\leqq |E f(W) + E[V f^{(1)}(W)] - f(T)| + |E f(T) - E f(S)|$$
$$\leqq E(V^2) \frac{1}{2} \sup_x |f^{(2)}(x)| + \sup_x |f^{(1)}(x)| \sum_{k=3}^{r} d_{k,N} (m_2 N)^{\frac{k}{2}} \xi_k$$
$$\leqq \frac{1}{2} \sup_x |f^{(2)}(x)| (m_2 \xi_1^{-1} \xi_2 r)^2 N^{-1} + \sup_x |f^{(1)}(x)| \sum_{k=3}^{r} d_{k,N} (m_2 N)^{\frac{k}{2}} \xi_k \text{。} \tag{8}$$

$E f(W)$ と $E[V f^{(1)}(W)]$ の近似を求める。

( $E f(W)$ の近似 )

$b_1, b_2, b_3$ を次のようにおく。

$$b_1 = E[g^{(1)}(W) - g^{(1)}(W_1) - Y_1 g^{(2)}(W_1)],$$

$$b_2 = NE[Y_1 \{g(W_1+Y_1) - g(W_1) - Y_1 g^{(1)}(W_1)\}],$$

$$b_3 = (1 - N d_{1,N}^2 \xi_1^2) E[g^{(1)}(W_1)] \text{。}$$

このとき $Y_1$ と $W_1$ は独立で $EY_1 = 0$ だから,

$$E f(W) = b_1 - b_2 + b_3 \text{。}$$

(7) より

$$|b_1| \leqq \frac{1}{2} \sup_x |g^{(3)}(x)| d_{1,N}^2 E[g_1^2(X_1)] \leqq \frac{1}{2} \sup_x |g^{(3)}(x)| N^{-1} \text{。}$$

また $\sigma_N^2$ の定義より $|b_3| \leqq \eta_N \sup_x |g^{(1)}(x)|$ 。

ここでさらに

$$b_4 = NE(Y_1^2)E[g^{(1)}(W_1) + Y_1 g^{(2)}(W_1) - g^{(1)}(W^0)]$$
$$+ NE(Y_1^2)E[g^{(1)}(W^0) + V^0 g^{(2)}(W^0) - g^{(1)}(T^0)]$$
$$+ NE(Y_1^2)E[g^{(1)}(T^0) - g^{(1)}(S^0)]$$
$$+ NE(Y_1^2)E[g^{(1)}(S^0) - g^{(1)}(G)]$$

とおくと，(3) 式より

$$|b_2 - R'| = |NE[Y_1\{g(W_1+Y_1) - g(G+Y_1)\}] + NE(Y_1^2)E[Vg^{(2)}(W)] - b_4|。$$

(補題) より

$$N|E[Y_1\{g(W_1+Y_1) - g(G+Y_1)\}] + E(Y_1^2)E[Vg^{(2)}(W)]|$$
$$\leqq NE(Y_1^2)\int_{-\infty}^{\infty}|g^{(2)}(x)|dx\,\Delta + NE(Y_1^2)\{\tfrac{1}{2}\sup_x|g^{(3)}(x)|(E(Y_1^2)+E(V^2))$$
$$+\sup_x|g^{(2)}(x)|E|S^0-T^0|\} + |b_5|. \qquad (9)$$

ここで $b_5 = NE[Y_1V^0\{g^{(1)}(W^0+Y_1) - g^{(1)}(W^0) - Y_1 g^{(2)}(W^0)\}]$ である。

(4)，(7) 及び (A3) より (9) の不等式の第1項と2項は $C\{\Delta + N^{-1}\}$ で押さえられる。また同様にして $|b_4| \leqq C\{\Delta + N^{-1}\}$ であることを示せる。

$|b_5|$ の評価のために次の記号を準備する。

$$\tilde{g}_1(x) = \begin{cases} g_1(x) & |g_1(x)| \leqq N^{\frac{1}{2}}\delta(N) \text{ の時} \\ 0 & \text{他}, \end{cases}$$
$$\tilde{Y}_i = d_{i,N}\,\tilde{g}_1(X_i)。$$

このとき，

$$|b_5| \leqq N\left|E\left[Y_1 V^\circ\{g^{(1)}(W^\circ+Y_1) - g^{(1)}(W^\circ+\tilde{Y}_1)\}\right]\right|$$

$$+ N\left|E\left[Y_1 V^\circ(\tilde{Y}_1 - Y_1)\ g^{(2)}(W^\circ)\right]\right|$$

$$+ N\left|E\left[Y_1 V^\circ\{g^{(1)}(W^\circ+\tilde{Y}_1) - g^{(1)}(W^\circ) - \tilde{Y}_1 g^{(2)}(W^\circ)\}\right]\right|。$$

ここで.

$$\left|E\left[Y_1 V^\circ\{g^{(1)}(W^\circ+Y_1) - g^{(1)}(W^\circ+\tilde{Y}_1)\}\right]\right|$$

$$\leqq E|V^\circ|\ E|Y_1(Y_1-\tilde{Y}_1)|\ \sup_x |g^{(2)}(x)|$$

$$\leqq E|V^\circ|\ d_{1,N}^2\ \{E[g_1^2(X_1)]\}^{\frac{1}{2}}\{E[g_1(X_1)-\tilde{g}_1(X_1)]^2\}^{\frac{1}{2}}\ \sup_x |g^{(2)}(x)|。$$

(5) 式より

$$E[g_1(X_1)-\tilde{g}_1(X_1)]^2 = \int_{|g_1(x)|>N^{\frac{1}{2}}\gamma(N)} g_1^2(x)\, dP(X_1 \leqq x) \leqq \gamma^2(N)。$$

従って (4) 式と合わせると.

$$N\left|E\left[Y_1 V^\circ\{g^{(1)}(W^\circ+Y_1) - g^{(1)}(W^\circ+\tilde{Y}_1)\}\right]\right| \leqq C N^{-\frac{1}{2}}\gamma(N).$$

同様に

$$N\left|E\left[Y_1 V^\circ(\tilde{Y}_1 - Y_1)\ g^{(2)}(W^\circ)\right]\right| \leqq C N^{-\frac{1}{2}}\gamma(N)。$$

また

$$N\left|E\left[Y_1 V^\circ\{g^{(1)}(W^\circ+\tilde{Y}_1) - g^{(1)}(W^\circ) - \tilde{Y}_1 g^{(2)}(W^\circ)\}\right]\right|$$

$$\leqq N E|V^\circ| \tfrac{1}{2} E|Y_1 \tilde{Y}_1^2|\ \sup_x |g^{(3)}(x)| \leqq N\ E|V^\circ|\ \tfrac{1}{2} E|Y_1\tilde{Y}_1|\ d_{1,N} N^{\frac{1}{2}}\gamma(N)$$

$$\leqq C N^{-\frac{1}{2}}\gamma(N)。$$

よって $|b_5| \leqq C N^{-\frac{1}{2}}\gamma(N)$。

以上をまとめると.

$$|Ef(W) + R'| \leqq C\{\Delta + N^{-\frac{1}{2}}\gamma(N) + N^{-1}\}。 \tag{10}$$

（$E[Vf^{(1)}(W)]$ の近似）

定義より

$$E[Vf^{(1)}(W)] = \frac{N(N-1)}{2} E[Z_{1,2} f^{(1)}(W_2 + L_2)]。$$

(3) より $E[Z_{1,2} L_2] = 0$ であるから，（補題）より

$$\left| \frac{N(N-1)}{2} E[Z_{1,2} f^{(1)}(W_2 + L_2) - R^2] \right|$$

$$\leq \frac{1}{2}N(N-1)\Big[E|Z_{1,2}L_2| \int_{-\infty}^{\infty} |f^{(3)}(x)|dx\,\Delta + E|Z_{1,2}L_2| \Big\{ \frac{1}{2}\sup_x |f^{(4)}(x)|$$

$$\times (EL_2^2 + EV^2) + \sup_x |f^{(3)}(x)|\, E|S-T| \Big\}\Big]$$

$$+ \frac{1}{2}N(N-1)\left|E[Z_{1,2}V^0\{f^{(2)}(W^0+L_2) - f^{(2)}(W^0) - L_2 f^{(3)}(W^0)\}]\right|。$$

ここで $|b_4|$ の評価と同様に $\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2$ を使って，

$$\frac{1}{2}N(N-1)\left|E[Z_{1,2}V^0\{f^{(2)}(W^0+L_2) - f^{(2)}(W^0) - L_2 f^{(3)}(W^0)\}]\right| \leq CN^{-\frac{1}{2}}\delta(N)$$

が成り立つ。従って (4), (7) 及び (A3) より

$$|E[Vf^{(1)}(W)] - R^2| \leq C\{\Delta + N^{-\frac{1}{2}}\delta(N) + N^{-1}\}。\quad (11)$$

最後に Hall and Barbour (1984) P108 より，

$$|Ef(S)| \leq \left|\int_{-\infty}^{\infty} f^{(1)}(x)[P(S \leq x) - \Phi(x)]dx\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f^{(1)}(x)|dx\,\Delta。\quad (12)$$

(8), (10), (11) 及び (12) の式をまとめると定理の証明になる。

## 4．3次のモーメントの存在を仮定した結果

定理の結果の (6) 式をもっと分かり易い不等式にすること

を考える。そのために

(A4) $E\,|h(X_1, X_2, \cdots, X_r)|^3 < \infty$

を仮定する。

$\delta(N)$ の時と同様に次の記号を準備する。$N \to \infty$ の時 $\alpha(N) \downarrow 0$, $N^{\frac{1}{2}}\alpha(N) \uparrow \infty$ なる $\alpha(N)$ に対して

$$\nu(N) = \int_{|g_1(x)| > N^{\frac{1}{2}}\alpha(N)} |g_1^3(x)|\, dP(X_1 \leq x),$$

$$\mu(N) = \max\left(\nu^{\frac{1}{3}}(N),\ \alpha(N)\right)$$

とおく。この時 $\mu(N) \downarrow 0$, $N^{\frac{1}{2}}\mu(N) \uparrow \infty$ で、かつ

$$\int_{|g_1(x)| > N^{\frac{1}{2}}\mu(N)} |g_1^3(x)|\, dP(X_1 \leq x) \leqq \mu^3(N) \tag{13}$$

である。

(A4) の条件の下で

$$R' = N\,E\left[Y_1\left\{g(G+Y_1) - g(G) - Y_1\, g^{(1)}(G) - \frac{1}{2}Y_1^2\, g^{(2)}(G)\right\}\right] + \frac{1}{2}N\,E\left[Y_1^3\, g^{(2)}(G)\right]$$

となる。$\hat{g}_1(x)$ と同様に、

$$g_1^*(x) = \begin{cases} g_1(x) & |g_1(x)| \leqq N^{\frac{1}{2}}\mu(N) \text{ の時} \\ 0 & \text{他}, \end{cases}$$

$$Y_i^* = d_{1,N}\, g_1^*(X_i)$$

とおく。この時 $|b_5|$ の評価と同様にして $R'$ の最初の項の評価が得られる。即ち

$$|N E[Y_1\{g(G+Y_1)-g(G)-Y_1 g^{(1)}(G)-\frac{1}{2}Y_1^2 g^{(2)}(G)\}]|$$

$$\leq N|E[Y_1\{g(G+Y_1)-g(G+Y_1^*)\}]|$$

$$+N|E[Y_1(Y_1^*-Y_1)\ g^{(1)}(G)]|$$

$$+N|E[Y_1\frac{1}{2}(Y_1^{*2}-Y_1^2)\ g^{(2)}(G)]|$$

$$+N|E[Y_1\{g(G+Y_1^*)-g(G)-Y_1^* g^{(1)}(G)-\frac{1}{2}Y_1^{*2} g^{(2)}(G)\}]|$$

となる。これら4つの項について，$|b_5|$の評価と同じ方法で上限を求めることができる。ここでは第2項についてだけ示しておく。定義より，

$$N|E[Y_1(Y_1^*-Y_1)\ g^{(1)}(G)]|$$

$$\leq N d_{1,N}^2\ E|g_1(X_1)\{g_1^*(X_1)-g_1(X_1)\}|\,|E[g^{(1)}(G)]|$$

$$\leq N d_{1,N}^2 \{E|g_1^3(X_1)|\}^{\frac{1}{3}}\{E|g_1^*(X_1)-g_1(X_1)|^{\frac{3}{2}}\}^{\frac{2}{3}}|E[g^{(1)}(G)]|.$$

ここで不等式(13)より

$$E|g_1^*(X_1)-g_1(X_1)|^{\frac{3}{2}}=\int_{|g_1(x)|>N^{\frac{1}{2}}\mu(N)}|g_1(x)|^{\frac{3}{2}}\,dP(X_1\leq x)$$

$$\leq N^{-\frac{3}{4}}\mu^{-\frac{3}{2}}(N)\int_{|g_1(x)|>N^{\frac{1}{2}}\mu(N)}|g_1^3(x)|\,dP(X_1\leq x)$$

$$\leq N^{-\frac{3}{4}}\mu^{\frac{3}{2}}(N)。$$

従って(7)式と条件(A4)より，

$$N|E[Y_1(Y_1^*-Y_1)\ g^{(1)}(G)]|\leq C N^{-\frac{1}{2}}\mu(N).$$

他の項も同様にして，結局

$$|N\,E[Y_1\{g(G+Y_1)-g(G)-Y_1 g^{(1)}(G)-\tfrac{1}{2}Y_1^2 g^{(2)}(G)\}]| \leqq C N^{-\frac{1}{2}}\mu(N)$$

が成りたつ。

$R^2$については次の変形ができる。

$$R^2=\tfrac{1}{2}N(N-1)\,E[Z_{1,2}\{f^{(1)}(G+Y_1+Y_2)-f^{(1)}(G+Y_1)-Y_2 f^{(2)}(G+Y_1)$$
$$-\tfrac{1}{2}Y_2^2 f^{(3)}(G+Y_1)\}]$$
$$+\tfrac{1}{2}N(N-1)\,E[Z_{1,2}Y_2\{f^{(2)}(G+Y_1)-f^{(2)}(G)-Y_1 f^{(3)}(G)\}]$$
$$+\tfrac{1}{2}N(N-1)\,E[Z_{1,2}\tfrac{1}{2}Y_2^2\{f^{(3)}(G+Y_1)-f^{(3)}(G)\}]$$
$$+\tfrac{1}{2}N(N-1)\,E[Z_{1,2}Y_1Y_2 f^{(3)}(G)]。 \tag{14}$$

$R^1$の時と全く同様に

$$\tfrac{1}{2}N(N-1)|E[Z_{1,2}\{f^{(1)}(G+Y_1+Y_2)-f^{(1)}(G+Y_1)-Y_2 f^{(2)}(G+Y_1)-\tfrac{1}{2}Y_2^2 f^{(3)}(G+Y_1)\}]|$$
$$\leqq C N^{-\frac{1}{2}}\mu(N)。$$

同様にして(14)式の第2項は,

$$\tfrac{1}{2}N(N-1)|E[Z_{1,2}Y_2\{f^{(2)}(G+Y_1)-f^{(2)}(G)-Y_1 f^{(3)}(G)\}]|$$
$$\leqq \tfrac{1}{2}N(N-1)|E[Z_{1,2}Y_2\{f^{(2)}(G+Y_1)-f^{(2)}(G+Y_1^*)\}]|$$
$$+\tfrac{1}{2}N(N-1)|E[Z_{1,2}Y_2(Y_1^*-Y_1)f^{(3)}(G)\}]$$
$$+\tfrac{1}{2}N(N-1)|E[Z_{1,2}Y_2\{f^{(2)}(G+Y_1^*)-f^{(2)}(G)-Y_1^* f^{(3)}(G)\}]|$$
$$\leqq C N^{-\frac{1}{2}}\mu(N).$$

第3項も $C N^{-\frac{1}{2}}\mu(N)$ で押さえられる。

$g(x)$ 及び $f(x)$ の定義より,部分積分を使うと

$$E[f^{(r)}(G)] = -rE[g^{(r-1)}(G)].$$

このことに注意すれば次の系が得られる。

[系] (A1)〜(A4) を仮定する。このとき定数Cが存在して,

$$\frac{1}{2}N d_{1,N}^{3}\left|E[g^{(2)}(G)]\{E[g_1^3(X_1)]+3(r-1)E[g_1(X_1)g_1(X_2)g_2(X_1,X_2)]\}\right|$$

$$\leq C[\Delta + N^{-\frac{1}{2}}(\gamma(N)+\mu(N)) + N^{-1} + \delta_N + \eta_N].$$

[注意3] $g(x)=e^{-\frac{1}{2}x^2}$ の時 $E[g^{(2)}(G)] = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

$g(x)=x\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$ の時 $E[g^{(2)}(G)] = 0$.

## 参考文献


Callaert H, Janssen P (1978) The Berry-Esseen theorem for U-statistics. Ann. Stat. **6**:417-421

Hall P (1980) Characterizing the rate of convergence in the central limit theorem. Ann. Prob. **8**:1037-1048

Hall P (1982) Rates of convergence in the central limit theorem. London: Pitman

Hall P, Barbour A D (1984) Reversing the Berry-Esseen inequality. Proc. American Math. Soc. **90**:107-110

Hoeffding W (1948) A class of statistics with asymptotically normal distribution. Ann. Math. Stat. **19**:293-325

Hoeffding W (1961) The strong law of large numbers for U-statistics. N.C. Inst. of Statist. Mimeo Series #302

Maesono Y (1987) Edgeworth expansion for one-sample U-statistics. Bull. Informatics and Cybernetics **22**:189-197

Rozovskii L V (1978a) A lower bound to the remainder term in the central limit theorem (Russian). Mat. Zametki **24**:403-410

Rozovskii L V (1978b) On the precision of an estimate of the remainder term in the central limit theorem. Theor. Prob. Appl. **23**:712-730

Stein C (1972) A bound for the error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables. Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Stat. Prob. Vol.2, Berkeley: U.C. Press, pp.583-602