

Relative Operator Entropy について

大阪府立桃谷高校 嵐井栄三郎 (Eizaburo Kamei)

1. Introduction. Entropy とは一言で言えば“混沌さ”を測る量と言えよう。von Neumann は、彼の著書「量子力学の数学的基礎」[14]において、statistical operator A 、即ち、 $A \in T(H)_{+,1}$, Hilbert space H 上の positive trace class operators で $\text{tr} A = 1$ に對して、

$$s(A) = -\text{tr} A \log A$$

として entropy を与えている。Umegaki は σ -finite von Neumann algebra に対し、relative entropy を定式化することに成功した。彼の定式化は von Neumann algebra を $B(H)$ としたとき、次の様にがる。[17], [18].

$$s(A|B) = \text{tr} A(\log A - \log B), \quad A, B \in T(H)_{+,1}.$$

又、Nakamura と Umegaki [13] は、von Neumann α entropy を一般化し、 H 上の positive operator A に対し、operator entropy を

$$S(A) = -A \log A$$

で与えた。ここでは、この operator entropy の相対化は、との

様なものが、という事について考える。

Umegaki の relative entropy は、その後、Araki によって、Tomita-Takesaki theory を用いることで、一般の von Neumann algebra 上の positive linear functional にまで拡張された。[1], [2]。

ところが Uhlmann [16] は、この relative entropy を interpolational theory を用いる事で *-algebra にまで拡張した。ここで、relative operator entropy を与えるに当たって、まず Uhlmann の方法を簡単に見直す事から始める。

すく、 ϕ, ψ を $*\text{-algebra } A$ 上の positive linear functional とする。
 $A \ni 1$ とする。ここで sesquilinear form を次の様に定義する。

$$\langle x, y \rangle = \phi(xy^*) + \psi(y^*x)$$

通常の方法で $\langle x, y \rangle$ という inner product を $L_2(A)$ から Hilbert space を構成する。このとき Pusz-Woronowicz [14] によると、この Hilbert space 上に可換な positive operators A, B で $A+B=1$,

$$\phi(xy^*) = \langle A\tilde{x}, \tilde{y} \rangle, \quad \psi(y^*x) = \langle B\tilde{x}, \tilde{y} \rangle$$

と定義される。この事より Uhlmann は relative entropy を

$$S(\phi|\psi) = - \lim_{r \rightarrow +0} \frac{1}{r} \langle (A^{1-r}B^r - A)\hat{1}, \hat{1} \rangle$$

と定義する。Uhlmann の定義は、 $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} (x^r - 1) = \log x$ 、という事実に基づいて定義されている。

ところで、 $A^{1-r}B^r$ は、 $r = \frac{1}{2}$ のとき丁度 geometric mean であり、その一般形を表わしたものと考えてよい。ここで、

(2)

これを operator mean の立場から見直してみる。operator mean の理論は、Kubo-Ando [10] によると、既に完成された。

operator mean m は、Hilbert space 上の positive operators 上の binary operation で次の性質を持つものを言う。

- (1) monotonicity $A \leq B, C \leq D \Rightarrow A m C \leq B m D$.
- (2) semicontinuity $A_n \downarrow A, B_n \downarrow B \Rightarrow A_n m B_n \downarrow A m B$.
- (3) transformer inequality $T^*(A m B) T \leq T^* A T m T^* B T$.

(3) の等号は T が invertible とき成立。

この operator mean m は、 $l \circ x = f(x)$ が $[0, \infty)$ 上の positive operator monotone function と 1 対 1 に対応していき。実際に positive operators A, B に対し A, B が invertible とする仮定の下で

$$(*) \quad A m B = A^{\frac{1}{2}} f(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}) A^{\frac{1}{2}}$$

という形で表わす事ができる。この事を最初に指摘したのは Y. Kato である。[3], [4]。

2. Relative Operator Entropy. Operator mean における対応(*) を $x^r, 0 \leq r \leq 1$, とすると operator monotone function は $A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}})^r A^{\frac{1}{2}}$ と成り、 $A \neq B$ の可換の場合には $A^{1-r} B^r$ となる Uhlmann の relative entropy の定義の中に出できく形が得られる。 $\chi = \chi, l \circ \chi = x^r, 0 \leq r \leq 1$ は χ の定義

(3)

そして operator mean を Uhlmann の定義に当てはめると.

$$\begin{aligned} S(A \# B) &= s\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} (A \# rB - A) \\ &= s\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} A^{\frac{1}{2}} \left\{ (A^{\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}})^r - 1 \right\} A^{\frac{1}{2}} \\ &= A^{\frac{1}{2}} (\log A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}) A^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

ここで A, B は invertible である。と仮定しているから問題はないが、一般には、この極限加存在するとは限らない。この存在性の議論については、J.I. Fujii, M. Fujii and Y. Seo [8] によつて詳しく議論されているので、それに譲り、ここでは、極限加存在する場合に限り、話を進めていく事にする。このときは、operator mean の場合と同様、invertible なもので近似すればよいから、以降 invertible of operators と仮定しても一般性は失なわざない。

ところで Uhlmann は $\phi(x x^*)^{\frac{1}{2}}$ と $\psi(x^* x)^{\frac{1}{2}}$ を seminorm 間の quadratic interpolation として、 $\langle A^{1-r} B^r \tilde{x}, \tilde{x} \rangle^{\frac{1}{2}}, 0 \leq r \leq 1$, を与えてゐるのであるが、上で与えた $\{A \# rB\}, 0 \leq r \leq 1$, は丁度、これらの operator 版と等しい事があるから。実際

$A \#_0 B = A, A \#_1 B = B, A \#_{\frac{1}{2}} B = A \# B$ (geometric mean) であり、 A, B に対して、 $r \rightarrow A \#_r B$ は連続となる。又、[18] の第 9 章にまとめられてゐる quadratic interpolation の持つ様々の性質と同様の性質が成り立つ。例えば、"Wigner-Yanase-Dyson-Sieb-Uhlmann's concavity" に相等す

るものも、 gr の operator mean である。といふ事より次の様に簡単に示す事ができる。

$$A \geq \alpha A_1 + \beta A_2, \quad B \geq \alpha B_1 + \beta B_2, \quad \alpha, \beta \geq 0, \quad \alpha + \beta = 1$$

とき

$$\begin{aligned} A \text{ gr } B &\geq (\alpha A_1 + \beta A_2) \text{ gr } (\alpha B_1 + \beta B_2) \\ &\geq \alpha (A_1 \text{ gr } B_1) + \beta (A_2 \text{ gr } B_2). \end{aligned}$$

次に、先程得た

$$S(A|B) = A^{\frac{1}{2}} (\log A^{\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}) A^{\frac{1}{2}}$$

を Uhlmann の relative entropy の operator 版とし、"relative operator entropy" と呼ぶのが妥当であろう。との結論を得た。[6]。

又、これは、 $B=1$ とした場合、 $S(A|I) = -A \log A$ となり、Nakamura and Umegaki [13] の operator entropy とも一致する。

operator mean の議論においては、それを表現する operator monotone function に、positive という制限がついていた。この制限をはずして一般化できむか、例えば $\log x$ に対してはどうか、といふ問題は、以前より提起してきた事ではあるが、[5]、それにもう意味を持たせ得るか、といふ点については不確かがままであった。今、Uhlmann の方法を真似ることで、"relative operator entropy" との結論を得た事より、operator mean を拡張することの保障が得られた、と思う。

そこで、これら "solidarity (連帶)" との呼称を与える事とする。これは Kubo and Ando が用いた "connection" に対する呼称である。即ち、一般の operator monotone function $f(x)$ に対して、

$$A \leq B \Rightarrow A^{\frac{1}{2}} f(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}) A^{\frac{1}{2}}$$

を与えられたものと *solidarity* という。これらについての一般的な議論は [8] に譲る。ここでは、relative operator entropy の基本的な性質についてまとめておく。

$$1. \quad B \leq C \Rightarrow S(A|B) \leq S(A|C).$$

$$2. \quad S(\alpha A | \beta B) = \alpha S(A|B), \quad \alpha > 0.$$

$$3. \quad S(A+B|C+D) \geq S(A|C) + S(B|D)$$

$$4. \quad A \geq B \text{ 又は } A \text{ non invertible のとき } S(A|B) = 0 \Leftrightarrow A = B.$$

5. Jointly concavity :

$$A = \alpha A_1 + \beta A_2, \quad B = \alpha B_1 + \beta B_2, \quad \alpha, \beta > 0, \quad \alpha + \beta = 1,$$

$$\Rightarrow S(A|B) \geq \alpha S(A_1|B_1) + \beta S(A_2|B_2).$$

6. Peierls-Bogoliubov 型 不等式

\mathbb{E} : normal positive linear map, $\mathbb{E}(I)$ は invertible,

$$\Rightarrow \mathbb{E}(S(A|B)) \leq S(\mathbb{E}(A)|\mathbb{E}(B)).$$

しかし、この relative operator entropy が Umegaki の relative entropy と一致するには、 A と B が可換がときのみである。一致しない例は 2×2 行列において簡単に見つける事ができる。しかもからかうか、これが有効であると思える理由

由の 1 と 2. 次の J. I. Fujii & Y. Seo [9] によると得られた結果である。

M を II_1 -factor von Neumann algebra とする。 $N \subseteq M$ a subfactor とする。
このとき、 M から N へ conditional expectation E^N unique に存在
し、これを E とする。次に

$$S(N) = \sup \{ \| S(A|E(A)) \| ; 0 \leq A \leq I, A \in M \}$$

とする。次の Pimsner - Popa 型の定理が得られる。

Theorem 1.

$$S(N) = \log [M:N]$$

ここで $[M:N]$ は Jones' index である。

3. Uhlmann's transformation. 次に、先程の $\{A \operatorname{gr} B\}, 0 \leq r \leq 1$,
についてもう少し詳しく見て行く事にする。これは Uhlmann
の使う quadratic interpolation の役割を果たしていくのである
が、ここで使われている性質は、 gr の持つ operator mean として
のものだけである。そこで、他にも同様の議論を組み立てる
事はできないか、と考えるのは自然な事であろう。まず、

arithmetic mean $A \alpha B = \frac{A+B}{2}$ に関する。 $A \alpha r B = (1-r)A + rB$,
 $0 \leq r \leq 1$, と与えれば、これが $A \operatorname{gr} B$ の持つ性質と全く同様の
事が成り立つ。又、harmonic mean $A \text{ hr } B = \left(\frac{A^{-1} + B^{-1}}{2} \right)^{-1}$ に対して
 $A \text{ hr } B = ((1-r)A^{-1} + rB^{-1})^{-1}$ とすれば同様である。そこで、(7)

これらを漸近して relative operator entropy を求めたのと同様の計算をそれぞれ行つて 2+3。

$$(a) \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} (A \ln B - A) = B - A$$

$$(b) \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} (A \ln B - A) = A - AB^{-1}A$$

(b) についての計算は $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} (\ln x - 1) = 1 - x^{-1}$ でありますように得る。

$x = z$ のとき a solidarities を得る。

$$S_a(A|B) = B - A, \quad S_h(A|B) = A - AB^{-1}A$$

と表わすと、 $S(A|B)$, $S_a(A|B)$, $S_h(A|B)$ の間に次の不等式が成り立つ。[7]。

Theorem 2.

$$S_a(A|B) \geq S(A|B) \geq S_h(A|B).$$

最初の不等式は Klein の不等式としてよく知られてゐる。後の不等式も $\log x \geq 1 - x^{-1}$ により明らかである。

次に、この定理の関係を更に精密に評価できないか、という事について考える。その為には $I_m(x) = (\frac{1+x^t}{2})^{\frac{1}{t}}, -1 \leq t \leq 1$, によつて与えられる operator mean が適当である。これは power mean と呼ばれるもので [11], [12],

$$t = 1 \text{ のとき } \frac{1+x}{2} = 1 \alpha x \quad (\text{arithmetic mean})$$

$$t = 0 \text{ のとき } x^{\frac{1}{2}} = 1 g x \quad (\text{geometric mean})$$

$$t = -1 \text{ のとき } \frac{2x}{1+x} = 1 h x \quad (\text{harmonic mean})$$

とつづり arithmetic mean から harmonic mean への parametrization

(8)

を互えており、かつ各 t において symmetric mean, RPS.

$$A \text{ } m_{(t)} \text{ } B = B \text{ } m_{(t)} \text{ } A, \text{ である。又、}$$

$$-1 \leq t \leq s \leq 1 \text{ ならば } A \text{ } m_{(t)} \text{ } B \geq A \text{ } m_{(s)} \text{ } B$$

である。更に各 t に対して、

$$t \text{ } m_{(t),r} \text{ } x = (1-r+rx^t)^{\frac{1}{t}}, \quad 0 \leq r \leq 1$$

とすると、 $\{A \text{ } m_{(t),r} \text{ } B\}, 0 \leq r \leq 1$ は

$$t=1 \text{ のとき } \{A \text{ ar } B\}, \quad t=0 \Leftrightarrow \{A \text{ gr } B\}, \quad t=-1 \Leftrightarrow \{A \text{ hr } B\}$$

となり、これらの一般形である。又ニビ、同様に Uhlmann 球の計算をすれば、

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} (A \text{ } m_{(t),r} \text{ } B - A) = \frac{1}{t} \{A^{\frac{1}{2}} (A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}})^t A^{\frac{1}{2}} - A\}$$

となる。計算は L'Hopital の法則を使うこと。

$$\begin{aligned} & \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \{(1-r+rx^t)^{\frac{1}{t}} - 1\} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{t} (1-r+rx^t)^{\frac{1}{t}-1} \cdot (x^t - 1) \\ &= \frac{1}{t} (x^t - 1). \end{aligned}$$

であることをより得られること。

$$S_t(A \mid B) = \frac{1}{t} \{A^{\frac{1}{2}} (A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}})^t A^{\frac{1}{2}} - A\}$$

とすれば、

$$S_1(A \mid B) = S_a(A \mid B).$$

$$S_0(A \mid B) = S(A \mid B)$$

$$S_{-1}(A \mid B) = S_h(A \mid B)$$

となり、 $t \geq s$ のとき $S_t(A \mid B) \geq S_s(A \mid B)$

も得られる。又、先の定理を精密化したものとして、次を得る。

Theorem 3. $t \in [0, 1]$ とすれば

$$S_a(A|B) \geq S_x(A|B) \geq S(A|B) \geq S_{-x}(A|B) \geq S_h(A|B).$$

以上を整理すると $(\frac{1+x^t}{2})^{\frac{1}{t}}$ によつて与えられる power mean に対し、solidarity $S_x(A|B)$ が対応し、しかもそれは $S(A|B)$ を通り、 $S_a(A|B)$ と $S_h(A|B)$ の parametrization を与えている。また二つの solidarity $S_x(A|B)$ は

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} (A^{m(t),r} B - A) = S_x(A|B)$$

によつて与えられている。2 節で Uhlmann の relative entropy を与えた方法の operator 版であることをより、この変換を、Uhlmann's transformation と呼ぶ事にする。
もう少し一般論らしく次の様にまとめる。

m を symmetric tf operator mean とする。 $\exists A$ とき次の性質をもつ m_r , $0 \leq r \leq 1$, を m に対する Uhlmann's interpolation と呼んでおく。

$$(I.1) \quad A^{m_0} B = A, \quad A^{m_1} B = B, \quad A^{m_{\frac{1}{2}}} B = A^m B,$$

$$(I.2) \quad (A^{m_r} B) m (A^{m_q} B) = A^{m_{\frac{r+q}{2}}} B.$$

(I.3) 各 A, B に対して, $r \rightarrow A^{m_r} B$ は連続。

ところで、 $A^{m(t),r} B$ についてはこれらの条件は満たされていふのであるが、全て a symmetric mean に対して必ずしも Uhlmann's interpolation が取れるとは限らない。

例えば、 $f(x) = \frac{1}{8}(1+6\sqrt{x}+x)$ は symmetric mean とよばれ
operator monotone function である。これによると決まつて mean
に対し、Uhlmann's interpolation とよばることはできまい。

ところで、Uhlmann's interpolation が取れる様な symmetric
mean の事を interpolational mean と呼ぶこととする。そして
 m を interpolational mean, m_r を Uhlmann's interpolation と呼ぶ
とき

$$S_m(A|B) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} (A m_r B - A)$$

$A m B$ から $S_m(A|B)$ への Uhlmann's transformation と呼ぶ。

Theorem 4. m, n を interpolational mean とする。このとき

$$A m B \leq A n B \text{ ならば } S_m(A|B) \leq S_n(A|B).$$

以上は、Uhlmann の行なっている方法をそのまま真似ながら
operator mean の言葉で一般論らしくしただけです。本質は
power mean で成されていふ事柄でしかばい。特に条件 (I, 1)
(I, 2), (I, 3) については、Uhlmann が与えていふものをそ
のまま書き直したものでしかばい為、少し窮屈すぎます。
今後若干の手直しをする必要があることを報告しておく。

On Relative Operator Entropy

Eizaburo Kamei

Abstract. In [6], we introduced the relative operator entropy by

$$S(A|B) = A^{1/2} (\log A^{-1/2} B A^{-1/2}) A^{1/2},$$

where A and B are invertible positive operators on a Hilbert space.

If $B = 1$, this coincides with the operator entropy defined by Nakamura and Umegaki [7].

By this definition, a Pimsner - Popa type theorem is proved [9]; let M be a II_1 factor, N a subfactor of M , E the conditional expectation of M onto N and $(M:N)$ be Jones' index, then

$$\log(M:N) = \sup \{ \|S(A|E(A))\| ; 0 \leq A \leq 1, A \in M \}.$$

From the viewpoint of the theory of operator means established by Kubo and Ando [10], this relative operator entropy is an operator version of Uhlmann's relative entropy [16] which is formulated by the interpolation theory.

An operator mean m is determined by a nonnegative operator monotone function f on $(0, \infty)$ with the correspondence

$$A \underset{m}{\sim} B = A^{1/2} f(A^{-1/2} B A^{-1/2}) A.$$

The Uhlmann's formulation can be rewritten in the words of operator means as follows;

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} (A g_r B - A) = A^{1/2} (\log A^{-1/2} B A^{-1/2}) A^{1/2},$$

$$\text{where } A g_r B = A^{1/2} (A^{-1/2} B A^{-1/2})^r A^{1/2}, \quad 0 \leq r \leq 1.$$

The relative entropy is given by the mean correspondence to an operator monotone function $\log x$ but not an operator mean, so we introduce the solidarities as a generalization of the operator means [8].

According to Uhlmann's formulation, we give a transformation from a class of operator means to a class of solidarities, which we call Uhlmann's transformation. In particular, the power means give a parameterized estimation of the relative operator entropy (7).

References

- (1) H. Araki: Relative entropy of states of von Neumann algebras, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 11 (1976), 809-833.
- (2) H. Araki: Relative entropy for State of von Neumann algebras II, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 13 (1977), 173-192.
- (3) J. I. Fujii: On geometric and harmonic means of operators, Math. Japon., 24 (1979), 203-207.
- (4) J. I. Fujii: Operator concave function and means of positive linear functionals, Math. Japon., 25 (1980), 453-461.
- (5) M. Fujii: On operator concavity related to means of operators, Math. Japon., 30 (1985), 283-288.
- (6) J. I. Fujii and E. Kamei: Relative operator in noncommutative information theory, to appear Math. Japon..
- (7) J. I. Fujii and E. Kamei: Uhlmann's interpolation method for operator means, to appear.
- (8) J. I. Fujii, M. Fujii and Y. Seo: An extension of the Kubo-Ando theory: Solidarities, Preprint.
- (9) J. I. Fujii and Y. Seo: Jones' index and the relative operator entropy, to appear Math. Japon..

- (10) F. Kubo and Ando: Means of positive linear operators, Math. Ann., 248 (1980), 205-224.
- (11) F. Kubo: On Logarithmic operator means, 10th Symp. Appl. Func. Anal. (ed. by Umegaki), Sci. Univ. Tokyo, 1987, 47-61.
- (12) T. P. Lim: The power mean and the logarithmic mean, Amer. Math. Monthly, 81 (1974), 879-883.
- (13) M. Nakamura and H. Umegaki: A note on the entropy for operator algebras, Proc. Jap. Acad., 37 (1961), 149-154.
- (14) J. von Neumann: Die mathematischen grundlegen der quantenmechanic, Springer - Berlin, (1932).
- (15) W. and S. L. Woronowicz: Functional calculus for sesquilinear forms and the purification map, Rep. on Math. Phys., 8 (1975) 159-170.
- (16) A. Uhlmann: Relative entropy and Wigner-Yanase-Dyson-Lieb concavity in interpolation theory, Commun., Math., Phys., 54 (1977), 22-32.
- (17) H. Umegaki: Conditional expectation in an operator algebra IV, Kodai Math. Sem. Rep., (1962), 59-85.
- (18) H. Umegaki and M. Ohya: "Quantum Mechanical Entropies (in Japanese)", Kyoritsu Publishing Company (1984).