数理解析研究所講究録
720巻 1990年 113-128

Non linear algebraic actions on $\mathbb{C}^n$

大阪市大 理 枡田 幹也
(Mikiya Masuda)

序

最近、H.Bass, H.Kraftらを中心として、代数的群作用の研究が始められたが、今後、トポロジーと代数幾何の活躍の場として発展していくと期待される。その中心問題に、Linearity予想と呼ばれているものがある。最近、G.Schwarz[4]により反例が構成されたが、$\mathbb{C}^n$の自己同型群の構造、代数幾何のcancellation problemとの問題とも関連していて、興味深いものである。Schwarzの結果は、単に反例を与えたのみならず、実に見事で、また、多くの新しい興味ある問題を提供してくれている。本稿では、Schwarzの仕事の紹介をする。また、最後に、彼の仕事についての著者とPetrie氏との考察を述べる。尚、この方面の解説として、[1],[2]がある。

§1. 準備（用語等）

定義 X : affine algebraic variety (over $\mathbb{C}$)

$\Leftrightarrow$ $\exists \mathbb{C}^N$, $\exists p_i : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}$ $(1 \le i \le k)$ polynomial

s.t. $X = \{ x \in \mathbb{C}^N \mid p_i(x) = 0 \quad (1 \le i \le k) \}$

(注) 代数幾何では、上の X を affine algebraic set と呼び、既約な場合に affine algebraic variety と呼ぶようである。

本稿ではすべて、$\mathbb{C}$ 上で考え、又、affine しか取り扱わないので、上の X を単に algebraic variety と呼ぶことにする。

定義 $X \subset \mathbb{C}^N$, $Y \subset \mathbb{C}^M$ とする。$f : X \to Y$ が regular

$\Leftrightarrow$ $\exists p : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^M$ s.t. $p|X = f$ であって、p の各成分が、X 上定義された有理関数。

(注) X が algebraic variety の時、p の各成分は多項式にとれる。この時特に f を algebraic と言ったりする。

定義 G が (complex) algebraic group

$\Leftrightarrow$ G が algebraic variety であって、写像 $\begin{array}{c} G \times G \to G \\ (x, y) \mapsto xy \end{array}$, $\begin{array}{c} G \to G \\ x \mapsto x^{-1} \end{array}$ が共に regular.

<u>例</u> $GL_n(\mathbb{C})=\{(x,t)\in M_n(\mathbb{C})\times\mathbb{C}\mid t\det x=1\}$

ここで、$M_n(\mathbb{C})$はn次正方行列全体を表わす。

(注) $GL_n(\mathbb{C})$は$M_n(\mathbb{C})$の中で$\det\neq 0$なものと思うと、algebraic groupにはならない。algebraic groupと思う時には上のように見る。

<u>定義</u> X: algebraic variety, G: algebraic group とする。作用 $\varphi: G\times X\to X$ が regular の時 φ を <u>algebraic action</u>, X を <u>algebraic G variety</u> と呼ぶ。

<u>定義</u> regular な準同型 : $G\to GL_n(\mathbb{C})$ を <u>(rational) representation</u> 又、表現空間を <u>(rational) G module</u> という。

complex algebraic group は有限群以外はすべて non-compact であるから、その作用というのは、かなり複雑な気がする。しかし、G が reductive ([1]参照)の場合には、理論が展開できる可能性がある。それは次の理由に基づく。まず、C^∞ category で compact Lie 群の作用の研究が成功した理由の一つに、slice の存在を主張する slice theorem がある。これにより、局所的には bundle と思えて色々なことがわかった。例えば固定点集合が部分多様体になる事。reductive な群というのは、

compact Lie群の複素化として得られる様なもので(実際、$SL_n(\mathbb{C})$, $GL_n(\mathbb{C})$, 有限群は reductive であるが、それらは SU_n, U_n, 有限群の複素化、これに反して、$\mathbb{C}$ は $\mathbb{R}$ の複素化で reductive ではない)、reductive な群の algebraic action は、C^∞ category での compact Lie群の作用に対応するものと思える。 実際この場合、Luna slice theorem と呼ばれるものがあり、作用の様子を調べる手掛りとなる。 ただし、この slice theorem は algebraic category での話で、トポロジスト(少なくとも筆者)には、わかりにくい。

§2 Linearity予想

今後 G は reductive complex algebraic group とする。 G の (rational) representation は algebraic action であることに注意する。これを linear action と呼ぶ

Linearity予想 (上林 1979) [3]. $\mathbb{C}^n$ 上の任意の algebraic G action は (up to conjugate で) linear action.

もう少し詳しく言うと、$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ を $\mathbb{C}^n$ の (regular) algebraic automorphism 全体からなる群とする時、$\mathbb{C}^n$ 上の algebraic action $\varphi: G\times\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ は、$g \to \varphi(g,\ )$ により、準同型 $\Phi: G \to \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ を定める。

$GL_n(\mathbb{C})$は、$Aut(\mathbb{C}^n)$の部分群であるが、上の予想は「ΦがGのある表現と、$Aut(\mathbb{C}^n)$の中でconjugateである」ということである。これは一種の"rigidity"を問うている。

(注1) G: reductiveという仮定がなければ、予想が正しくないことはすぐにわかる。例えば、$G=\mathbb{C}$にとり、$\mathbb{C}^n$上の$\mathbb{C}$作用として平行移動を考えれば、固定点を持たないから、表現とConjugateにはなりえない。

(注2). C^∞ categoryでのLinearity問題には、反例がいくらでもある。例えば固定点を持たない$\mathbb{R}^n$上の$C^\infty G$ actionが構成されている。またそのようなcompact Lie群の特徴付けもなされている。

Linearity予想は次のcancellation problemと関係がある。

<u>Cancellation problem</u> X: non-singular algebraic varietyとする。
$X \times \mathbb{C}^m = \mathbb{C}^n$ (varietyとして) $\underset{?}{\Longrightarrow}$ $X = \mathbb{C}^{n-m}$.

これは純粋に代数幾何の問題で難問である(らしい)([1]参照)。その原因は、一般に$\mathbb{C}^n$の特徴付けが見つかっていないことによると思われる。このあたり、トポロジーでは$\mathbb{R}^n$の特徴付け(例えば、可縮でendのπ_1が自明 ⇒ $\mathbb{R}^n$とdiffeo ($n \neq 4$))があるのと異なる。これがまた、Linearity予想の反例が見つけ

にくかった原因でもある。

<u>主張</u> Linearity予想 o.k. ならば Cancellation problem o.k.

〈証明〉 $G=\mathbb{Z}_2$ とする。 $X\times\mathbb{C}^m$ 上に $(x,v)\to(x,-v)$ により，G action を定義する。固定点集合は X。一方，Linearity予想が $G=\mathbb{Z}_2$ の時正しいとすると，$\mathbb{C}^n=X\times\mathbb{C}^m$ 上の G action は，(up to conjugate で) linear であるから，固定点集合はある $\mathbb{C}^k$ と同型。ここで次元を考えれば $X=\mathbb{C}^{n-m}$ となる。 ▨

$G=$ 有限巡回群，$\mathbb{C}^*$ に対しても上と同様の議論が成立するから，このような場合に Linearity予想を示しても十分に意味がある。また一方，上の主張は Linearity予想を肯定的に解くことは非常に難しいことも意味している。

§3. <u>Algebraic G vector bundle</u>

Linearity予想の反例の候補があったとしよう。これが本当に反例となるかどうかをチェックする際，問題点は2つあるように思う。1つは，作用を持っている algebraic variety X が $\mathbb{C}^n$ と同型かどうか。X が可縮である等，位相的な性質はチェックできるだろうが，前節で述べたように $\mathbb{C}^n$ の特徴付

けがないので、variety として $\mathbb{C}^n$ と同型かどうかの判定は難しい。もう1つは、たとえ X が $\mathbb{C}^n$ と同型とわかっても、X 上の G action が (up to conjugate で) linear action でないとどうやって判定すればよいのだろうか。algebraic action の不変量なるものは、見つかっていない段工夫がいる。これら2つの難点を Schwarz は見事にクリアーしている。彼のアイデアを説明するために以下少し準備をする。

<u>定義</u> $\pi : E \to X$ が <u>algebraic vector bundle</u> とは

$\Leftrightarrow$ (1) E, X : algebraic variety で π : regular

(2) $\exists \{U_i\}$: Zariski open covering of X

$$\exists\ \begin{tikzcd} \varphi_i : \pi^{-1}(U_i) \arrow[rr] \arrow[dr] & & U_i \times \mathbb{C}^n \arrow[dl] \\ & \mathbb{C}^n & \end{tikzcd}$$

regular iso.
各fiber上 linear

s.t.

$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^n \longrightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^n$ により定まる写像

$U_i \cap U_j \to GL_n(\mathbb{C})$ が regular.

<u>定義</u> $\pi : E \to X$ が <u>algebraic G vector bundle</u>

$\Leftrightarrow$ (1) E, X : algebraic G variety, π : G map

(2) 作用を忘れると $\pi : E \to X$ は algebraic vector bundle

(3) ${}^\forall g \in G$: $\pi^{-1}(x) \to \pi^{-1}(gx)$ は linear

定義 algebraic G vector bundle $\pi: E \to X$ と $\pi': E' \to X$ が同型

$\Leftrightarrow$
$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\exists\psi"] \arrow[dr] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & E' \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$
ψ は各 fiber 上 linear な algebraic G iso.

さて、V, W を (rational) G module とする。

記号 (1) V 上の algebraic G vector bundle で $0 \in V$ 上の fiber が W となるもの全体の同型類を $VEC_G(V, W)$ と書く。

(2) trivial G vector bundle $V \times W \to V$ を Θ_W と書く。これは $VEC_G(V, W)$ の元である。

C^∞ category では、V は G 可縮故、V 上のすべての G vector bundle は自明。しかし algebraic category では $G = \{1\}$ の時ですら大問題であった。

定理 3.1 (Serre 予想 [Quillen], [Suslin] 1976).

$VEC_G(V, W) = \{\Theta_W\}$ if $G = \{1\}$.

従って次の問題が自然に生じる。

Equivariant Serre 予想 $VEC_G(V, W) = \{\Theta_W\}$ for $\forall G$ reductive

これに関して次のことが知られていた。

<u>定理3.2</u>（Bass-Haboush 1987） $VEC_G(V, W)$ の任意の元は stable には自明。 つまり、 $^\forall E \in VEC_G(V, W)$ に対し、 $^\exists Z$: G module s.t. $E \oplus \Theta_Z = \Theta_{W \times Z}$。

定理3.1と3.2をながめれば、Equivariant Serre予想に反例があるとは思いにくい。 これについては次節で述べるとして、以下の命題は、~~上~~上の予想の反例は、Linearity予想の反例を供給することを教えてくれる。 $E \in VEC_G(V, W)$ は G 作用の他に、$\mathbb{C}^*$ が fiber上の scalar multiplication として作用している。これら2つの作用は可換より、E は $G \times \mathbb{C}^*$ variety と見なせる。定理3.1より、作用を忘れると E はある $\mathbb{C}^n$ と同型であることに注意する。

<u>命題</u>（Kraft） $E \neq \Theta_W \Rightarrow E$ 上の $G \times \mathbb{C}^*$ action は linearize されない。

（注） 上の命題は一般化される。 例えば $\mathbb{C}^*$ は $\mathbb{Z}_k$ ($k \geq 2$) で置き換えられる。

§4. Schwarz の結果

G module V の coordinate ring $\mathcal{O}(V)$ (この場合は polynomial ring) には、G が自然に作用している。それの固定点集合 $\mathcal{O}(V)^G$ (つまり invariant polynomial) は、Hilbert により有限生成となることが知られている (G: reductive が必要!)。従って、$\mathcal{O}(V)^G = \mathbb{C}[y_1, \cdots, y_s]/I$ (I: ideal) と書けるが、この I が定める algebraic variety を V の algebraic quotient と言い、$V/\!/G$ と書く。幾何学的には、V の中の G orbit で Zariski closed なものからなる集合と思ってよい。

例 $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ に $\mathbb{C}^*$ が $\mathbb{C}^n$ 上自明、$\mathbb{C}^m$ 上 scalar multiplication として作用しているとすると、$(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m)/\!/\mathbb{C}^* = \mathbb{C}^n$.

$VEC_G(V, W)$ を調べる際 (又、Linearity 予想を証明しようとする際)、invariant polynomial が多い (つまり、algebraic quotient が小さい) 場合から取り組むのが筋らしい。$V/\!/G$ の次元の小さい方から考える。$\dim_{\mathbb{C}} V/\!/G = 0$ の時、容易に Equiv. Serre 予想が正しいことがわかる。しかし、$\dim_{\mathbb{C}} V/\!/G = 1$ の時、妙なことが起こる。

定理 4.1 (Schwarz [4]). $\dim_{\mathbb{C}} V/\!/G = 1$ とする。

(1) $VEC_G(V, W) \overset{全単射}{\longleftrightarrow} \mathbb{C}^r \qquad (r \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$

(実際には、$VEC_G(V,W)$ に群構造が入り $\mathbb{C}^r$ と同型)。

(2) $VEC_G(V,W)$ の元は C^ω の category ではすべて自明。

(注) $\dim_{\mathbb{C}} V/\!/G \geq 2$ の時、$VEC_G(V,W)$ は"無限次元"になり得る。

Schwarz は $r > 0$ となり得ることを例証している。それを述べるために記号を準備する。

記号 (1) $\overset{O_2}{\overset{\shortparallel}{O_2(\mathbb{C})}}$: $A = \begin{pmatrix} g & \\ & g^{-1} \end{pmatrix}$ $(g \in \mathbb{C}^*)$ と $B = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$ で生成された群。 $(O_2 \cong \mathbb{C}^* \rtimes \mathbb{Z}/2)$

(2) V_ℓ : 2次元 O_2 module で

A 作用は $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow A^\ell \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, B 作用は $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

で与えられるもの。

定理 4.2 (Schwarz [4]).

(1) $VEC_{O_2}(V_1, V_m) \overset{全単射}{\longleftrightarrow} \mathbb{C}^{m-1}$。

(2) $E \oplus \Theta_{\mathbb{C}}$, $E \oplus \Theta_{V_1}$ は自明。

(3) E は $\mathbb{C}^* (\subset O_2)$ vector bundle としては自明。

(注) $VEC_{O_2}(V_2, V_m)$ の場合も同様の結果を得ている。その他、$SL_2(\mathbb{C})$, $SO_3(\mathbb{C}) = SL_2(\mathbb{C})/\{\pm 1\}$ のある場合に、r の具体的計算結果が述べられている。また彼は、任意の classical group, spin group G に対して、ある適当な V, W をとれば $VEC_G(V,W) \ni \{G_{W}\}$ となり得ると主張している。

定理 4.2 (1) の対応は以下のように与えられる。$(a_1, \cdots, a_{m-1}) \in \mathbb{C}^{m-1}$ に対し、多項式 $f(t) = 1 + a_1 t + \cdots + a_{m-1} t^{m-1}$ を対応させる。$\rho : V_1 \to V_1 /\!/ O_2$ を projection とする。実際、$V /\!/ O_2 = \mathbb{C}$ となり ρ は $(a, b) \to ab$ で与えられる。

$$U = \rho^{-1}(\mathbb{C} - \{0\})$$

$$U_f = \rho^{-1}(\mathbb{C} - \{t \in \mathbb{C} \mid f(t) = 0\})$$ とおく。

これらは V の Zariski open set で O_2 不変。又、$f(0) = 1 \neq 0$ より $U \cup U_f = V$。$U \times V_m$ と $U_f \times V_m$ を共通部分 $(U \cap U_f) \times V_m$ 上次の Φ_f ではり合わせる:

$$\begin{array}{ccc}
U \times V_m & & U_f \times V_m \\
\cup & & \cup \\
(U \cap U_f) \times V_m & \xrightarrow{\Phi_f} & (U \cap U_f) \times V_m \\
\Psi & & \Psi \\
\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) & \longmapsto & \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, M_f(a, b)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)
\end{array}$$

ここで、

$$M_f(a, b) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} f+1 & a^{2m} t^{-m}(f-1) \\ b^{2m} t^{-m}(f-1) & f+1 \end{pmatrix} \qquad (t = ab).$$

t^{-m} の項があるから $M_f(a,b)$ は U 上定義され、$\det M_f(a,b)=f$ より $U\cap U_f$ 上可逆であることに注意。何故このような行列が出てくるかは Schwarz の原論文[4]を参照されたい。上の Φ_f ではり合わせたものが求める $VEC_{O_2}(V_1, V_m)$ の元である。以後これを $E(f)$ と書く。

(注) 正確には $E(f)$ が algebraic G variety となることを示さねばならないが、これは一般論よりわかる(らしい)。

§5 見直し

この節で Schwarz の結果の見直しについて述べる。これは筆者と T. Petrie 氏の共同研究である。定理 4.2 (2) によると $E(f)$ は $V_1\times V_m\times\mathbb{C}$ の中に実現できる。では $E(f)$ はどのように記述されるのだろうか。これが我々の研究の出発点であった。答えは次の通り。

$$\begin{array}{ccl} E(f) & = & \{(a,b,x,y,z)\in V_1\times V_m\times\mathbb{C} \mid f(a,b)z = a^m y + b^m x\} \\ \downarrow & & \quad\downarrow \\ V_1 & \ni & (a,b) \end{array}$$

各点 (a,b) 上の fiber は $V_m\times\mathbb{C}$ の中の2次元部分空間を定めている。又、上の定義多項式は O_2 不変故 $E(f)$ は O_2 variety。これが前節のものと一致することは局所自明性をみればわかる。

実際それは次で与えられる。

$$U \times V_m \longrightarrow E(f) \subset V_1 \times V_m \times \mathbb{C}$$
$$\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \longmapsto \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, M_f(a,b) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \ a^m y + b^m x \right)$$

$$U_f \times V_m \longrightarrow E(f) \subset V_1 \times V_m \times \mathbb{C}$$
$$\left(\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) \longmapsto \left(\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \ (A^m Y + B^m X)/f \right)$$

これにより、はり合わせ写像が§4のものであることが見てとれる。

上の $E(f)$の記述は前節のそれと比べると簡明である。このことは、Schwarzの見方（vector bundleをはり合わせとして捉える）と異なる見方があることを示唆していると思われる。実際

$$\mathbf{F}(f) : H_{V_m \times \mathbb{C}} \longrightarrow H_{\mathbb{C}}$$

を各(a,b)のfiber上

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto (b^m, a^m, -f) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

と定義すると、全射となり kernel が $E(f)$となる。つまり short exact sequence

$$0 \longrightarrow E(f) \longrightarrow H_{V_m \times \mathbb{C}} \xrightarrow{F(f)} H_{\mathbb{C}} \longrightarrow 0$$

を得る。この見方はいくつかよい点がある。例えば、

この exact sequence が split することに注意すれば（一般論からもわかるが、具体的に splitting を構成することができる）、$E(f) \oplus \Theta_{\mathbb{C}} = \Theta_{V_m \times \mathbb{C}}$ を得る。これは定理 4.2 (2) の前半部を示している。又、splitting の事実より次を得る。

補題　$E(f)$ と $E(h)$ が同型ならば、その同型写像は $\Theta_{V_m \times \mathbb{C}}$ の同型写像に拡張する。

この補題は有用である。$\Theta_{V_m \times \mathbb{C}}$ の同型写像は次の3つの性質をみたす：

(1) V_1 の座標 (a, b) の polynomial を成分とする 3次の行列.

(2) O_2 作用に関する equivariance の条件をみたす.

(3) $\det = \text{const} (\neq 0)$

<証> (1) は同型写像が algebraic ということより。(2) は明らか。(3) は $\forall (a, b)$ において $\det \neq 0$ であるが、$\det$ は a, b の polynomial より定数以外あり得ない。 ☒

これらのことを用いると、$E(f)$ を $E(h)$ にうつす $\Theta_{V_m \times \mathbb{C}}$ の同型写像があったとすると $f = h$ が初等的に示せる。

以上、一つの例に話を限ったが、定理 3.2 を用いれば、上の見方は一般化できる。

参考文献.

[1] H. Bass, Algebraic group actions on affine spaces, Contemp. Math. 43 (1985), 1-23.

[2] H. Kraft, Algebraic automorphisms of affine space, Progress in Math. 80 Birkhäuser Verlag 1989, 81-105.

[3] T. Kambayashi, Automorphism group of a polynomial ring and algebraic actions on affine space, J. Alg. 60 (1979), 439-451.

[4] G. Schwarz, Exotic algebraic group actions, C. R. Acad. Sci. Paris (to appear).