

## Semi-abel多様体に付随した Milnor型の K 群について

東京大学理学部 染川睦郎(Mutsuro Somekawa)

## 紹介

体  $k$  上の semi-abel 多様体  $G_1, \dots, G_r$  に対して Milnor 型の K 群  $K(k, G_1, \dots, G_r)$  を定義し、この性質を調べて整数論への応用を示すことが目的である。この K 群はある関係を満している symbol  $\{g_1, \dots, g_r\}_{E_k}$  ( $E_k$ : 有限次拡大,  $g_i \in G_i(E_i)$  を動く) により生成される abel 群である。 $G_1 = \dots = G_r = G_m$  の時が従来の Milnor の K 群である。

$K(k, G_1, \dots, G_r)$  は motivic の哲学を背景にして次のように言い換えられると思われる。Beilinson, MacPherson and Schechtman は [4] の中で Milnor の K 群  $K^M(k)$  は  $k$  上の motivic の圏  $M_k$  における高次の extension を使って  $\text{Ext}_{M_k}^r(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}(n))$  と表現できることを予想している。この拡張として  $G_i$  に対する 1-motif  $G_i[-1]$  (cf. Deligne [5]) を使い  $\text{Ext}_{M_k}^r(\mathbb{Z}, G_1[-1] \otimes \dots \otimes G_r[-1])$  を考えられるがこれが  $K(k, G_1, \dots, G_r)$  と一致すると思われる。(ただし  $\mathbb{Z}(n)$ ,  $\text{Ext}_{M_k}^r$  等に現在より定

義はなく現在まだ正当化されていない。)

記号として次を使う。abel 群  $G$  と整数  $n \geq 1$  に対して,  $nG$  (resp.  $G/n$ ) を  $n$  倍写像の kernel (resp. cokernel) を示す。scheme  $X$  に対し  $X^i = \{x \in X; \dim(O_{X,x}) = i\}$  とおく。

### §7 定義と基本的性質

(1.1)  $K$  群の定義に必要とされる local symbol についてまず構成する。 $k$  を体とし、 $K$  を  $k$  上の超越次数  $\ell$  の有限生成拡大体、 $G$  を  $k$  上の semi-abel 多様体とする。この時  $K$  の素点  $v$  に対して local symbol map  $\partial_v: G(k_v) \times k_v^\times \rightarrow G(k_{\text{nr}})$  を定義する。ここで  $k_v$  は  $K$  の  $v$  での完備化、 $k_{\text{nr}}$  はその剰余体である。 $k$  上の group scheme の完全系列  $0 \rightarrow T \rightarrow G \rightarrow A \rightarrow 0$ ,  $T$  は torus,  $A$  は abel 多様体、がある。有限次不分岐 Galois 拡大  $L/k_v$  で、 $L$  の剰余体  $F$  において  $T \times F \cong \mathbb{G}_m^{\oplus n}$  となる拡大がある。この時次の完全系列の可換図式ができる。

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & \\
 & 0 & & 0 & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 0 & \longrightarrow & T(O_\Delta) & \longrightarrow & G(O_\Delta) & \longrightarrow & A(O_\Delta) \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \text{is} \\
 0 & \longrightarrow & T(L) & \longrightarrow & G(L) & \longrightarrow & A(L) \rightarrow 0 \\
 & \text{ord}_v \downarrow & & & \downarrow (r'_1, \dots, r'_n) & & \\
 & \mathbb{Z}^{\oplus n} & \cong & \mathbb{Z}^{\oplus n} & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & 0 & & 0 & & &
 \end{array}$$

ここで  $O_\Delta$  は  $L$  の付値環である。任意の  $g \in G(k_v)$ ,  $t \in k_v^\times$  に対し

$$h_i = (1, \dots, 1, t, 1, \dots, 1) \in T(L)$$

$$\varepsilon(g, h) = ((-1)^{\text{ord}_L(k) r_1^L(g)}, \dots, (-1)^{\text{ord}_L(k) r_m^L(g)}) \in T(O_L) \subset G(O_L)$$

とおく。この時

$$\tilde{\vartheta}_n(g, h) = \varepsilon(g, h) g^{\frac{\text{ord}_L(k)}{m} \prod_{i=1}^m r_i^L(g)}$$

は  $G(O_L)$  の元である。 $\vartheta_n(g, h)$  は自然な写像  $G(O_L) \rightarrow G(F)$  による  $\tilde{\vartheta}_n(g, h)$  の像として定義する。 $\vartheta_n(g, h)$  は  $\text{Gal}(F/k(n))$  の作用に不変故  $G(k(n))$  に属し、△及び torus の  $\mathbb{G}_m^{\oplus m}$ への同型の選び方にちりばめられた定義されている。

(1.2) 体  $k$  上の semi-abel 多様体  $G_1, \dots, G_r$  に対して  $k(kG_1, \dots, G_r)$  を symbol  $\{g_1, \dots, g_r\}_{E/k}$  により生成される abel 群として定義する。ここで  $E$  は  $k$  の有限拡大を動き、 $g_i \in G_i(E)$  は任意の元で、symbol は次の relation (1.2.0) (1.2.1) (1.2.2) を満足する。

(1.2.0) 任意の  $E$  及び  $i$  に対して

$$\begin{aligned} & \{g_1, \dots, g_i + g'_i, \dots, g_r\}_{E/k} \\ &= \{g_1, \dots, g_i, \dots, g_r\}_{E/k} + \{g_1, \dots, g'_i, \dots, g_r\}_{E/k} \end{aligned}$$

(1.2.1) 有限次拡大  $k \hookrightarrow E_1 \hookrightarrow E_2$  に対して、 $g_{i_0} \in G_{i_0}(E_2)$ ,  $g_i \in G_i(E_1)$  ( $i \neq i_0$ ) をとする。この時

$$\{j^*(g_1), \dots, g_{i_0}, \dots, j^*(g_r)\}_{E_2/k} = \{g_1, \dots, N_{E_2/E_1}(g_{i_0}), \dots, g_r\}_{E_1/k}$$

ここで  $N_{E_2/E_1}$  は norm 準同型。 $j^*$  は自然な单射である。

(1.2.2)  $K$  を  $k$  上の超越次数 1 の有限生成拡大体とする。 $\lambda \in K^*$ ,  $g_i \in G_i(K)$  ( $i=1, \dots, r$ ) は次の仮定を満たすとする。 $k$  上の任意の素点  $v$  に対して、ある  $i(v)$  が存在して  $i \neq i(v)$  なるすべて

の  $i$  に対して  $g_i \in G_i(O_n)$  とする。  $O_n$  は  $n$  の付値環である。

この時

$$\sum_{v: \text{素点}} (-1)^{i(v)} \{ g_1(v), \dots, \partial_v(g_{im}, h_1, \dots, g_r(v)) \}_{k(v)/k} = 0$$

$g_i(v)$  は  $g_i$  の自然な写像  $G_i(O_n) \rightarrow G_i(k(v))$  による像である。

(1.3) 体の拡大  $j: k \hookrightarrow k'$  に対し 従来の Milnor の  $K$  群 同様に  $K$  群の間に準同型を定義する。  $G_1 \dots G_r$  は  $k$  上の semi-abel 多様体とする。有限次拡大  $E/k$  に対し  $k' \otimes_k E = \bigoplus_{e=1}^{n_E} A_e$  とかく。  $A_e$  は  $k'$  上長さ  $e$  の Artin 局所環で、その剰余体を  $E'_e$  とする  $E'_e$  は  $k'$  の有限次拡大である。この時、

$$j^*: K(k, G_1, \dots, G_r) \rightarrow K(k', G_1 \times_k k', \dots, G_r \times_k k')$$

を  $j^*(\{g_1, \dots, g_r\}_{E/k}) = \sum_{e=1}^{n_E} e_e \{ j_e^*(g_1), \dots, j_e^*(g_r) \}_{E'_e/k'}$  により 定義する。ここで  $j_e: E \hookrightarrow E'_e$  は  $j$  から誘導された自然な写像である。

$j$  が有限次拡大の時は更に norm 準同型

$$N_{K/k}: K(k', G_1 \times_k k', \dots, G_r \times_k k') \rightarrow K(k, G_1, \dots, G_r)$$

を  $N_{K/k}(\{g_1, \dots, g_r\}_{E/k}) = \{g_1, \dots, g_r\}_{E/k}$  により 定義する。この 2 つの準同型は Milnor の  $K$  群の場合と同様な性質をもつ。

次の定理はこの  $K$  群が従来の Milnor の  $K$  群の一般化であることを主張している。記号として  $K_r(k, G_m) = \overbrace{K(k, G_m, \dots, G_m)}^{r \text{ 回}}$  とかく。

定理(1.4)  $k$  を体とする。この時次の自然な同型が存在する。

$$K_r(k, G_m) \cong K_r^M(k)$$

$k_r^M(k)$  は体  $k$  の Milnor の K 群を示す。

略証  $\alpha : k_r^M(k) \rightarrow Kr(k, G_m)$  を  $\alpha(\{a_1, \dots, a_n\}) = \{a_1, \dots, a_n\}_{k/k}$  ( $a_i \in k^\times$ )

により定義したい。このためにはある  $i < j$  に対して  $a_i + a_j = 1$  の時  $\{a_1, \dots, a_n\}_{k/k} = 0$  を言えればよいが、relation (1.2.2) において  $K = k(T)$ ,  $\theta = T^{-1}$ ,  $g_i = 1 - a_i T^{-1}$ ,  $g_j = 1 - T$ ,  $g_\ell = a_\ell$  ( $\ell \neq i, j$ ) とおくと (1.2.2) の仮定を満たして

$$\{g_1, \dots, g_n(g_{i+n}, \theta), \dots, g_{n+m}\}_{k(k)} = \begin{cases} \{a_1, \dots, a_n\}_{k/k} & \text{if } n = (T-a_i) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

となるので、これから示される。 $\beta : Kr(k, G_m) \rightarrow k_r^M(k)$  を  $\beta(\{a_1, \dots, a_n\}_{k/k}) = N_{k/k}(\{a_1, \dots, a_n\})$  により定義できる。ここで  $N_{k/k}$  は Milnor の K 群の norm 準同型である。(Bass and Tate [1], Katz [6])  $\beta \circ \alpha = id$  や  $\alpha$  の全射または  $\beta$  の单射を示し証明が完了する。

K 群と étale cohomology との関係を示そう。

命題(1.5)  $k$  を体、 $G_1, \dots, G_r$  を  $k$  上の semi-abel 多様体とする。

とき  $k$  の標数と素な正の整数として、この時自然な準同型

$$c : K(k, G_1, \dots, G_r)/n \longrightarrow H_{et}^r(k, nG_1 \otimes \dots \otimes nG_r)$$

が存在して次の図式を可換にする。

$$\begin{array}{ccc} G_1(k) \otimes \dots \otimes G_r(k) & \xrightarrow{\beta_1 \otimes \dots \otimes \beta_r} & H_{et}^r(k, nG_1) \otimes \dots \otimes H_{et}^r(k, nG_r) \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \psi \\ K(k, G_1, \dots, G_r) & \xrightarrow{c} & H_{et}^r(k, nG_1 \otimes \dots \otimes nG_r) \end{array}$$

ここで  $\alpha$  は K 群の定義から誇導された準同型であり、 $\beta_i$  は

étale site 上の完全系列  $0 \rightarrow {}_n G_i \rightarrow G_i \xrightarrow{\cong} G_i \rightarrow 0$  から得られる  
準同型  $G_i(k) \rightarrow H_{\text{et}}^1(k, {}_n G_i)$  である。

証明. 準同型  $C$  を  $C(\{a_1, \dots, a_r\}_{E/k}) = N_{E/k}(\beta_1(a_1) \cup \dots \cup \beta_r(a_r))$  によって  
定義するといい。

注意(1.6) (1.5) の  $C$  は单射であると予想される。これは紹介  
にある記号を使って、triangle

$$G_1[-1] \otimes \dots \otimes G_r[-1] \xrightarrow{\cong} G_1[-1] \otimes \dots \otimes G_r[-1] \longrightarrow {}_n G_1 \otimes \dots \otimes {}_n G_r$$

が  $k$  上の motivic 圏  $M_k$  に存在すると思われ、また  $\text{Ext}_{M_k}^r(\mathbb{Z}, {}_n G_1 \otimes \dots \otimes {}_n G_r)$  は  $H_{\text{et}}^r(k, {}_n G_1 \otimes \dots \otimes {}_n G_r)$  に同型と思われるからである。

$G_1 = \dots = G_r = \mathbb{G}_m$  の時 体更に  $C$  は同型である、すなあち  $K_r^m(k)/m$   
 $\cong H_{\text{et}}^r(k, \mathbb{Z}/m(r))$  と予想される。 $r=2$  の場合この同型は Merkurjev  
and Suslin [9] により示されてい。

## § 2. 例. curve の $V(X)$ と albanese kernel

semi-abel 多様体として特殊なもの选取、尤時  $K$  群がよく知  
られたある群に一致することを示す。

$X$  を体  $k$  上の projective smooth curve とする。Quillen の spectral  
sequence  $E_1^{p,q} = \bigoplus_{x \in X^p} K_{-p-q}(k(x)) \Rightarrow K_{-p-q}(X)$  から、 $SK_1(X) =$   
 $\text{Coker}(K_2(k(X)) \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{x \in X^1} K_1(k(x)))$  とおくと单射準同型  $i : SK_1(X) \hookrightarrow K_1(X)$  を得る。 $X$  は projective 故  $N : K_1(X) \rightarrow K_1(k) = k^\times$  が“存在す  
る”が、これが

$$V(X) = \ker(N \circ i : SK_1(X) \rightarrow k^\times)$$

と定義する。Blochは[2]の中で  $V(X)$ について整数論の視点から考察をしている。この  $V(X)$  を我々の  $K$  群を使って表現することができる。

定理(2.1)  $X$  を体  $k$  上の projective smooth curve で  $X(k) \neq \emptyset$  とする。 $J$  を  $X$  の jacob 多様体として、この時自然な同型

$$K(k, J, G_m) \cong V(X)$$

が存在する。

注意(2.2) Bloch [2] での整数論的結果は、上の同型により、 $K$  群の言葉を使ってより一般的な形に拡張できる。これは §3 §4においてなされる。

証明の概略.  $\phi: K(k, J, G_m) \rightarrow V(X)$  を  $\phi(\{a, -a\}_{E/k}) = N_{E/k}(a \cdot E)$  により定義する。ここで  $a \cdot E \in V(X \times_k E) \subset K_1(X \times_k E)$  は  $a \in J(E)$   $\subset K_0(X \times_k E)$  且  $a \in K_1(E)$  の Quillen の  $K$  群の積により得られる元である。 $\phi$  の well-defined 性は (1.2.1) は Quillen の  $K$  群の projection formula から、(1.2.2) は次の補題と localization sequence から従う。

補題(2.3) 上の記号のもと、 $K$  を  $k$  上の超越次数(の有限生成)拡大体とする。この時  $K$  の素点  $v$  に対して

$$\begin{array}{ccc} J(K) \otimes K_2(K) & \longrightarrow & K_2(X \times_k K) \\ P_v \otimes \partial_v \downarrow & & \downarrow \partial_v \\ J(k(v)) \otimes K_1(k(v)) & \longrightarrow & K_1(X \times_k k(v)) \end{array}$$

は可換である。 $\partial_v$  は boundary map,  $P_v$  は自然な写像、横は

$K$  群の積である。

次の完全系列が存在する

$$K_2(k(x)) \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{x \in X^1} \text{deg}^{\sim 0} k(x)^x \rightarrow V(x) \rightarrow 0$$

$x_0 \in X(k)$  を固定して  $\tilde{\varphi}: \bigoplus_{x \in X^1} \text{deg}^{\sim 0} k(x)^x \rightarrow K(k, J, \mathbb{G}_m)$  を  $\tilde{\varphi}((f_x)_x)$   
 $= \sum_x \{x - x_0, f_x\}_{k(x)/k}$  とおくと  $\tilde{\varphi} \circ \partial = 0$  及び  $\varphi: V(x) \rightarrow K(k, J, \mathbb{G}_m)$   
 を得る。  $\varphi$  の全射で  $\phi \circ \varphi = \omega$  が示せ証明が完了する。  $\square$

$k$  を代数的閉体、  $E_1, E_2$  を  $k$  上の elliptic curve とする。この時、 abel 多様体  $E_1 \times_k E_2$  の albanese kernel が我々の  $K$  群を使  
 て表現できる。代数多様体  $X$  に対し  $A_0(X)$  は Chow 群  $CH_0(X)$  の  
 次数 0 の元からなる部分群を示すとする。  $O_i$  により  $E_i(k)$  の  
 単位元をあらわす。

$\gamma: K(k, E_1, E_2) \rightarrow A_0(E_1 \times_k E_2)$  を  $x = \{e_1, e_2\}_{k/k} \in K(k, E_1, E_2)$   
 に対して  $(e_i) - (O_i) \in A_0(E_i)$  ( $i=1, 2$ ) の積によう  $\gamma(x) = ((e_1) - (O_1))$   
 $\cdot ((e_2) - (O_2))$  と定義する。 $(\gamma)$  の well-defined は容易に示せる。  
 この時次の定理が成り立つ。

定理(2.4) 上の記号のもと次の分解完全系列が存在する。

$$0 \rightarrow K(k, E_1, E_2) \xrightarrow{\gamma} A_0(E_1 \times_k E_2) \xrightarrow{\text{alb}} E_1(k) \times E_2(k) \rightarrow 0$$

ここで alb は abel 多様体  $E_1 \times_k E_2$  の albanese 準同型である。

略証。 \* により abel 多様体の Chow 群の Pontryagin 積を示す。

$I = \ker(\text{alb})$  とおくと  $I = A_0(E_1 \times_k E_2) + A_0(E_1 \times_k E_2)$  である (Bloch [3])

$$\gamma(\{e_1, e_2\}_{k/k}) = ((e_1, O_2) - (O_1, O_2)) + ((O_1, e_2) - (O_1, O_2))$$

故  $\text{Im}(\delta) \subseteq I$  である。 $\delta : A_0(E_1 \times_k E_2) \rightarrow K(k, E_1, E_2)$  を  $A_0(E_1 \times_k E_2)$  の生成元  $(e_1, e_2) - (0, 0_2)$  ( $e_i \in E_i(k)$ ) に対して  $\delta((e_1, e_2) - (0, 0_2)) = fe_1, e_2\}_{k/k}$  と定義できる。この時  $\delta_0 : I \rightarrow A_0(E_1 \times_k E_2) \xrightarrow{\delta}$   $K(k, E_1, E_2)$  は全射で、 $\delta \circ \delta_0 = \text{id}$  故  $\delta_0$  は同型となり証明が完了する。  $\square$

### §3 局所体

局所体上の semi-abel 多様体と  $\mathbb{G}_m$  による  $K$  群についての性質を調べる。 $k$  を非アルキメデス局所体で標数  $0$ ,  $O_k$  を  $k$  の整数環、 $F$  を  $k$  の剰余体とする。 $G = \text{Gal}(F/k)$  とおく。 $A$  を  $k$  上の semi-abel 多様体、 $T(A)$  を  $A$  の Tate module とする。 $k$  上の local duality にて

$$H^2_{\text{et}}(k, m A(1)) \cong H^0_{\text{et}}(k, m A^\vee)^\vee \cong_{m A(F)} \mathbb{Q}_\ell$$

を得る。ここで  $(\quad)_G$  は co-invariant を示す。(1.5) の準同型と上の 同型 から、projective limit をとると

$$c : k(k, A, \mathbb{G}_m) \longrightarrow T(A)_G$$

を得る。

Tate module  $T(A)$  にて (Bloch [2]) と同様にして次が示せる。

命題 (3.1)  $A$  は potential good reduction を仮定する (すなはち  $A$  の abel 部分の  $k$  のある有限次拡大体への base change が "good reduction" である)。この時、 $T(A)_G$  は有限である。

次の定理は  $A$  が  $k$  上の projective smooth curve の jacobi 多様体の

時  $V(X)$  を使、て示した結果の一般化である。

**定理(3.2)**  $A$  を局所体  $k$  上の potential good reduction をもつ semi-abel 多様体とする。この時、 $C: k(k, A, \mathbb{G}_m) \rightarrow T(A)_G$  は全射である。

略証。 $k$  を適当な有限次拡大でおき換えて示せば十分なことを注意しておく。 $A = \mathbb{G}_m$  の時  $K_2(k) \rightarrow M(k) \cong T(\mathbb{G}_m)_G$  は全射故  $A$  が good reduction をもつ abel 多様体として示せばよい。

$C: A(k) \otimes k^\times \rightarrow T(A)_G$  が全射でないと仮定して矛盾を示そう。

この場合、ある素数  $P$  と全射準同型  $f: T(A)_G \rightarrow \mathbb{Z}/P$  がある  $f \circ C = 0$  となる。 $f$  に対応する  $k$  上の abel 多様体の isogeny  $\xi$

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/P \rightarrow \hat{A} \rightarrow A \rightarrow 0$$

とする。これから完全系列

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/P \rightarrow \hat{A}(k) \rightarrow A(k) \xrightarrow{\delta} H^1_{\text{et}}(k, \mathbb{Z}/P)$$

を得る。この時次は可換である。

$$\begin{array}{ccc} B(k) \otimes k^\times & \xrightarrow{C} & T(A)_G \\ \delta \otimes \beta \downarrow & & \downarrow f \\ H^1_{\text{et}}(k, \mathbb{Z}/P) \otimes H^1_{\text{et}}(k, \mathbb{Z}/P) & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{Z}/P \end{array}$$

ここで  $\beta$  は boundary map である。 $f \circ C = 0$  故  $\delta = 0$  を得る。

$A$  は good reduction 故  $\hat{A}$  もそうである。generic fiber として  $A, \hat{A}$  をもつ  $O_k$  上の abelian scheme を  $A_F, \hat{A}_F$  とおく。 $A_F \times \hat{A}_F$  は isogeny 故  $A_F(F), \hat{A}_F(F)$  の個数は等しい (Lang [8])。これから  $A(O_{k/m})$

と  $\hat{A}(O_{k/m^n})$  の個数は任意の  $m$  に対し等しいことがわかる。ここで  $m$  は  $O_k$  の極大 ideal である。一方  $\hat{A}(k) \rightarrow A(k)$  から 任意の  $m$  に対し  $\hat{A}(O_{k/m^n}) \rightarrow A(O_{k/m^n})$  である故、 $\hat{A}(k) \cong A(k)$  を得る。これは矛盾。  $\square$

注意(3.3) 一般に  $k$  上の semi-abel 多様体  $A$  に対し、 $m$  を  $\#(T(A)_{\text{ator}})$  で表される正の整数とし、元時  $K(k, A, \mathbb{G}_m)/m \cong T(A)_{\text{ator}}$  と思われる。  $A$  が curve の jacobbi 多様体の時は Saito [12] で示されている。

#### § 4 Moore-Bloch の完全系列

次の記号を使う。

$k$ : 数体,  $G = \text{Gal}(\bar{k}/k)$  素点  $v$  に対し  $G_v = \text{Gal}(\bar{k}_v/k_v)$

$A$ :  $k$  上の semi-abel 多様体  $T$ :  $A$  の Tate module

$S$ : すべての  $k$  のアルキメデス素点と  $A$  が bad reduction を

すべての素点を含む  $k$  の素点の有限集合

$v$  が good reduction をもつ素点の時  $T_{G_v}$  は有限、また  $T_{G_v} \rightarrow T_G$

故に  $T_G$  は有限である。  $m$  を  $\#T_G$  によって表されるある正の整数とする。(1.5) の準同型から  $\hookrightarrow$  られる  $K(k_v, A_v, \mathbb{G}_m) \rightarrow T_{G_v}$

( $A_v = A \times_{\bar{k}} k_v$ ) と自然な写像  $K(k, A, \mathbb{G}_m) \rightarrow K(k_v, A_v, \mathbb{G}_m)$  から

$\Theta: K(k, A, \mathbb{G}_m) \rightarrow \prod_{v \notin S} T_{G_v} \oplus \prod_{v \in S} K(k_v, A_v, \mathbb{G}_m)/m$

以下の  $R$  を定義することができます。

定理(4.1) 上の記号のもと次の完全系列が存在する。

$$K(k, A, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\Theta} \bigoplus_{v \notin S} T_{G_v} \oplus \bigoplus_{v \in S} K(k_v, A_v, \mathbb{G}_m)/m \xrightarrow{R} T_G \rightarrow 0$$

略証。  $O_k$  を  $k$  の整数環とする。まず  $\Theta$  の像が直和に含まれることを示そう。  $\text{Spec}(O_k)$  の open subscheme  $U$  に対して  $U' \ni v$  に対して  $T(A_v)_{G_v} \cong A_{F_v}(F_v)$  となるようになる。ここで  $A$  は上記の group scheme でその generic fiber が  $A$  であるものとする。  $F_v$  は  $v$  での  $k_v$  の剰余体である。  $K(k, A, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\Theta} T_{G_v} \cong A_{F_v}(F_v)$  は local symbol の定義と同様の方法で計算されるので、これから  $\text{Im}(\Theta) \subset \bigoplus$  を得る。

$R \circ \Theta = 0$  は  $G$ -module  $m A(1)$  に対する Tate-Poitou の完全系列  $H^2_{\text{et}}(k, m A(1)) \rightarrow \bigoplus_{v: \text{real}} H^2_{\text{et}}(k, m A(1)) \oplus \bigoplus_{v: \text{non arch}} m A(\bar{k})_{G_v} \rightarrow m A(\bar{k})_G \rightarrow 0$

から従う。

$\text{Im}(\Theta) = \ker(R)$  を以下示す。次の補題は Kato and Saito [7] による。

補題(4.2) 上の記号のもと、 $P$  を素点の有限集合として、任意の正の整数  $n$  に対して、自然な準同型

$$K(k, A, \mathbb{G}_m) \rightarrow \bigoplus_{v \in P} K(k_v, A_v, \mathbb{G}_m)/n$$

は全射である。

任意の  $k$  の modulus  $m = \sum m_v v$  に対して

$$K(k, A, G_m, m) = \ker(K(k, A, G_m)) \longrightarrow \prod_{v \in \text{Supp}(m)} K(k_v, A_v, G_m)_m$$

とおく。 $\text{Im}(\Theta) = \ker(R)$  を示すためには (3.2) と上の補題から任意の素数  $v$  に対して、ある modulus  $m = \sum m_v v$  を  $m | m_v (\forall v)$  かつ  $\text{Supp}(m)$  は  $S$  と交わるすべての素点を含むように取る時、

$$(4.3) \quad K(k, A, G_m, m) \xrightarrow{\Theta} \bigoplus_{v \notin \text{Supp}(m)} T_{e_{G_v}} \xrightarrow{R} T_{e_G} \rightarrow 0$$

が完全系列であることを示せば十分である。(4.3) の完全性は Bloch [2] と同様の方法で示せる。概略を示す。

open subscheme  $V \subset \text{Spec}(O_k)$  上 group scheme  $A$  とその generic fiber が  $A$  であるようにとる。そして  $V'$  に属さないすべての素点の集合は  $\text{Supp}(m)$  であると仮定してよい。一般に  $T_{e_{G_v}}^{\text{et}}(A_v)_{G_v} \cong A_{F_v}(F_v)(\ell)$  であるが、 $v \notin \text{Supp}(m)$  に対しては  $m \nmid \ell$  故

$$\bigoplus_{v \notin \text{Supp}(m)} T_{e_{G_v}} \cong \bigoplus_{v \notin \text{Supp}(m)} A_{F_v}(F_v)(\ell)$$

を得る。そこで上の左の群の元はすべて、 $a_i \in A(O_{V_i})$ ,  $b_i \in k_{V_i}^\times$ ,  $v_i(b_i) = 1$ ,  $v_i \notin \text{Supp}(m)$  ( $i = 1, \dots, r$ ) とし  $c = \sum_{i=1}^r c_i(a_i, b_i)_{k_{V_i}/k_{V_i}}$  と表現できる。今、素点  $\tau_1, \dots, \tau_s \notin \text{Supp}(m) \cup \{v_1, \dots, v_r\}$  を固定する。近似定理により、 $k$  の有限次拡大  $E$  と  $V$  上の open subscheme  $V' = \text{Spec}(R) \subset \text{Spec}(O_E)$  と  $\tilde{a} \in A(R)$  がある、 $v_1, \dots, v_{r+s} \in V'$  を選んで

$$E_{v_i} \cong k_{V_i} \quad \tilde{a}_{v_i} \equiv a_i \pmod{\pi_{v_i}} \quad i = 1, \dots, r$$

$$E_{u+r} \cong k_{t_j}, \quad \hat{\alpha}_{u+r} \equiv 0 \pmod{\pi_{t_j}}, \quad j=1, \dots, s$$

とできる。更に Chebatarev の密度定理と類体論を使って、  
 $t_1, \dots, t_s$  や  $\hat{\alpha} \in E^\times$  を選んで

$$\Theta(\{\hat{\alpha}, \hat{\beta}\}_{E/k}) = \sum_{i=1}^s c(f_{\alpha_i}, h_i)_{k_{t_i}/k_{t_i}} + \sigma$$

とした時に、ある  $v_0$  で  $\sigma \in T_{E_{v_0}} = T_E$  とできる。このことは (4.3) の完全性を示している。  $\square$

定理 (4.1) において  $A = G_m$  とおくと  $T(G_m)_{G_v} = \mu(k_v)$  故に次の系を得る。

系 (4.4) (Moore [10]) 次の完全系列が存在する。

$$K_2(k) \longrightarrow \bigoplus_{v: \text{not complex}} \mu(k_v) \longrightarrow \mu(k) \rightarrow 0$$

定理 (4.1) において  $A$  として curve の jacobи 多様体とすると  
 により (2.1) と合わせ次を得る。

系 (4.5) (Bloch [2], Kato and Saito [7])  $X$  を  $k$  上 projective, smooth curve とする。  
 $X(k) \neq \emptyset$  とする。この時  $J$  を  $X$  の jacobи 多様体として、次の完全系列が存在する。

$$V(X) \longrightarrow \bigoplus_{v \notin S} T(J)_{G_v} \oplus \bigoplus_{v \in S} V(X_{k_{t_v}})_{G_v} \longrightarrow T(J)_G \rightarrow 0$$

定理 (4.1) を使って Colliot-Thélène と Raskind は次の定理を  
 最近しめしている。

定理 (Colliot-Thélène and Raskind)

$X$  を  $k$  上の smooth projective geometrically connected variety とする

$\tau : H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$  と仮定する。この時、 $CH^2(X)_{\text{tors}}$  は有限である。

$A \subset \subset X$  の Picard 多様体を取、左時の結果が使われてよい。

### References

- [1] H. Bass and J. Tate "The Milnor ring of global field",  
Lecture notes in Math. 342 Springer (1973), 349 - 446.
- [2] S. Bloch "Algebraic K-theory and class field theory for  
arithmetic surface", Ann. of Math. 114 (1981), 229 - 266.
- [3] S. Bloch "Some elementary theorems about algebraic cycles  
on abelian varieties", Inv. Math. 37 (1976), 213 - 228.
- [4] A. Beilinson, P. MacPherson and V. Schechtman. "Notes on  
motivic cohomology", Duke Math. J. 54 (1987), 679 - 710
- [5] P. Deligne "Theorie de Hodge III" Publ. Math. I.H.E.S.  
44 (1974), 5 - 78
- [6] K. Kato "A generalization of local class field theory by using  
K-groups II" J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo, Sec. IA 27 (1983)  
603 - 683
- [7] K. Kato and S. Saito "Unramified class field theory of  
arithmetical surfaces" Ann. of Math. 118 (1983) 241 - 275
- [8] S. Lang "Algebraic groups over finite fields" Am. J. Math.

78 (1956) 555 - 563

[9] A. S. Merkuriev and A. A. Suslin "K-cohomology of Severi-Brauer varieties and norm residue homomorphism" Math.

U. S. S. R. Izvestiya 21 (1983) 307 - 340

[10] C. Moore "Group extension of p-adic linear groups" Publ. Math. I.H.E.S. 35 (1969) 251 - 281

[11] D. Quillen "Higher algebraic K-theory I" Lecture notes in Math. 341 Springer (1973) 251 - 147

[12] S. Saito "Class field theory of curves over a local field"  
Journal of Number Theory 21 (1985) 44 - 80

[13] J. Milnor "Introduction to Algebraic K-theory" Ann. of Math Studies no. 72 Princeton University press, 1971.