

## 水面波のパラメトリック励起

東大理 梅木 誠 (Makoto Umeki)

### 1. はじめに

近年非線形力学系として注目されつつある、加振を受ける長方形容器内の液体の表面波の非線形応答を、平均化ラグランジュ法と多重尺度法を用いて解析し、得られた常微分方程式系の固定点の分岐、安定性を調べ、対応する実験 (Simonelli & Gollub 1989) との比較を行った。また、Holmes (1986) による外部-内部共鳴が  $2:1:2$  の場合のホモクリニック・カオスの存在の数学的な証明を、実験で観察される  $2:1:1$  の共鳴の場合に応用し、数値的に例示した。さらに、保存系のホモクリニック・カオスと散逸系でのストレンジ・アトラクターとの差異を明確にし、前者の証明が必ずしも後者にそのままあてはまるわけではない事を指摘した。

### 2. 定式化

長方形断面の柱状容器内の非粘性流体の渦なし流れを考える。表面変位を次の変数分離形で表す。

$$\eta(t, x, y) = \sum_i \eta_i(t) \psi_i(x, y).$$

ここで、 $(x, y)$  は水平、 $z$  は鉛直] 座標とし、

$$\psi_i \equiv \psi_{mn}(x, y) = \{(2 - \delta_{m0})(2 - \delta_{n0})\}^{1/2} \cos \frac{m\pi x}{l_x} \cos \frac{n\pi y}{l_y}$$

は水平方向の固有関数で、モード  $(m, n)$  と呼ぶ。  $m$  と  $n$  は、ある定在波を真上から見たときの  $x$  と  $y$  方向の節の数を表す。波数と固有振動数はそれぞれ次のように表される。

$$k_i \equiv k_{mn} = \{(m/l_x)^2 + (n/l_y)^2\}^{1/2} \pi,$$

$$\omega_i = \{g k_i (1 + \frac{\gamma}{\rho g} k_i^2) \tanh k_i d\}^{1/2}.$$

容器は鉛直方向に  $a_0 \cos \Omega t$  の周期加振を受けるとする。線形理論(マシュウ方程式)により、サブハーモニック共鳴  $\Omega/2 \equiv \omega \approx \omega_i$  の場合を考える。もしも容器断面が正方形ならば、モード  $(m, n)$  と  $(n, m)$  (但し、 $m \neq n$ ) は完全縮退 ( $\omega_{mn} = \omega_{nm}$ ) しており、両方のモードが同等に励起される可能性がある。また、容器が正方形から少しずれた長方形 ( $l_x \approx l_y$ ) の場合はどちらのモードが励起されるか、あるいはもっと違ったタイプの波が励起されるだろうか。この問題に理論的に答えるのが本論文の目的である。

モード  $i$  の変位の振幅を速く振動する部分とその変調に分ける。

$$\begin{aligned} \eta_i(x) = & \epsilon a_i \{ p_i(\tau) \cos \omega t + q_i(\tau) \sin \omega t \} \\ & + \epsilon^2 a_i (\bar{A}_i \cos 2\omega t + \bar{B}_i \sin 2\omega t + \bar{C}_i) \end{aligned}$$

$$a_i = (\kappa_i \tanh \kappa_i d)^{-1}$$

ここで  $\tau = \epsilon^2 \omega t$  はゆくりと変化する時間変数であり、 $p_i, q_i$  はサブハーモニックに励起されるモード、 $A_i, B_i, C_i$  はそれらと相互作用するモードの振幅、 $\epsilon$  は展開パラメータを表す。平均化ラグランジュ法を用いた結果。(Miles 1984, Umeki & Kambe 1989)  $p_i, q_i$  の時間発展は次のハミルトンの運動方程式で記述される。

$$\left( \frac{d}{d\tau} + \alpha \right) (p_i, q_i) = \left( -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \right) \mathcal{H}. \quad (1)$$

左辺の  $\alpha$  の項は波の自由減衰を表すために現象論的に加えたものであり、ハミルトニアン  $\mathcal{H}$  は次式で表される。

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_i \left\{ \beta_i (p_i^2 + q_i^2) + A_0 (p_i^2 - q_i^2) + \frac{A_i}{2} (p_i^2 + q_i^2)^2 \right\} + \frac{C}{2} (p_1^2 + q_1^2) (p_2^2 + q_2^2) + \frac{D}{2} (p_1 q_2 - p_2 q_1)$$

但し、 $A_0 = a_0 / a_i \epsilon^2$ ,  $\beta_i = \frac{\omega^2 - \omega_i^2}{2 \epsilon^2 \omega^2} \approx \frac{\omega - \omega_i}{\omega}$  は各々、外力の振幅と振動数のずれを表す。非線形項の係数として  $A_1 = A_2 = 0.26$ ,  $C = 0.32$ ,  $D = -1.6$  の値が得られた。

(Umeki, 1989) これらの値は次の不等式

$$C > A > 0, \quad D < 0, \quad A + C + D < 0$$

をみたす。Jeng & Sethna (1989) の結果も同じ不等式を満足するが、摂動展開法から得た彼らの表式と Umeki (1989) の式には少しの違いが存在し、どちらが正しいのか (あるいは両方ともある意味で正しいのか) は現在明確ではない。

## 3. 分岐解析

非線形力学方程式(1)の固定点は次のように分類される。

$(p_1, q_1, p_2, q_2) = (r_1, r_2)$ と書き換えて。

$$(r_1, r_2) = (0, 0) : \text{静止状態 (Q)}$$

$$= (r_1^*, 0) : \text{モード1の定在波 (S1)}$$

$$= (0, r_2^*) : \text{モード2の定在波 (S2)}$$

$$= (r_1^*, r_2^*) : \text{1と2の混合状態 (M)}$$

(M)はさらに  $p_1 q_2 - p_2 q_1$  ( $\equiv M$ : 波の角運動量に対応)が0であるもの(Ma)と0でないもの(Mb)2通りに分けられる。

図1に、長方形の場合で  $d = 1$  の  $(\beta_1, A_0)$  平面での分岐ダイアグラムを示す。2本の太い実線が、静止状態が不安定となる境界線

$$A_0 = (\alpha^2 + \beta_1^2)^{1/2}$$

を表す。(展開パラメータ  $\epsilon = \sqrt{(\omega_2^2 - \omega_1^2)}/2\omega^2$  ととり、 $\beta_1 - \beta_2 = 1$  である。)

曲線  $C_1$  は S1 から Ma が、 $C_2$  は S1 から Mb が、 $C_3$  は S2 から Mb が分岐する位置を示す。 $C_4$  は Ma と Mb の状態が一致し、transcritical な分岐をおこなう位置である。

$$C_1 : A_0 = \left\{ d^2 + \left( \frac{A_1 \beta_2 - C \beta_1}{A_1 - C} \right)^2 \right\}^{1/2}$$

$$C_2 : A_0 = \left\{ d^2 + \left( \frac{-A_1 \beta_2 + (C+D) \beta_1}{A_1 + C + D} \right)^2 \right\}^{1/2}, \beta_1 > 0.5$$

$$C_3 : A_0 = \left\{ d^2 + \left( \frac{-A_1 \beta_1 + (C+D) \beta_2}{A_1 + C + D} \right)^2 \right\}^{1/2}, \beta_1 > 0.5$$

$$C_4: A_0 = \left\{ \alpha^2 + \left( \frac{D(\beta_1 + \beta_2)}{2(A_1 + C + D)} \right)^2 \right\}^{1/2}, \quad \beta_1 > \beta_e$$

また、 $\beta_a = A_1 / (A_1 - C)$ ,  $\beta_b = (C + D) / (-A_1 + C + D)$ ,  
 $\beta_e = (2A_1 + D) / 2(A_1 - C)$  であり、 $\beta_c$  と  $\beta_d$  は各々、 $M_b$   
 が多重状態となる点を示す。 $a \sim u$  の領域の固定点とその安  
 定性を表 1 に示す。また、 $\beta_1$  を固定し  $A_0$  を変化させて見た分  
 岐図を図 2 に示す。(太線安定、細線不安定) 点 X (図 1)  
 は余次元 2 の分岐点であり、X の右側の近傍で周期的、又は  
 カオス的なモード競合が数値的にも実験的にも見つかってい  
 る。図 3 は X の近傍を、 $\delta G$  の実験結果と比較できるパラメ  
 タで書いたものである。P, C は周期的、カオス的な運動  
 の領域を示す。 $\delta G$  の実験では  $M_b$  が見つかっておらず、S1 と  
 S2 の共存でおきかかっている。これは高次の非線形性の効  
 果か、 $M_b$  の領域が狭いため見つからなかったのか、等いろ  
 いろな原因が考えられるがまだ確定していない。図 4 に周期  
 軌道とカオス軌道の  $(p_1, p_2)$  平面への投影を示す。

容器の縦と横が全く等しい ( $l_x = l_y$ ) の場合は、 $\beta_1 = \beta_2$  と  
 なり、展開パラメータ  $\epsilon$  は  $\sqrt{a_{\min}/a_1}$  にとる。 $a_{\min}$  は最小  
 励起加振振幅である。実験に対応する分岐ダイアグラムを図  
 5 に示す。調べた範囲では  $M_b$  の Hopf 分岐はみられなかった。  
 S1, S2 から  $M_a$  への安定性の変化が、 $f_0 > f_1$  ( $\equiv 14.1 \text{ Hz}$ )  
 となつたが実験では  $f_0 < f_1$  で見つかっており、この差異

も高次の非線形性で解消されるかもしれない。

#### 4. 平均ハミルトン系のホモクリニック・カオス

(1)式にある正準変換を2回ほどこすと次式のような  $P_2, Q_2$  を action-angle 変数とする系となる。(Umeki, 1989)

$$\dot{P}_1 = -2DP_1(P_2 - P_1)\sin 2Q_1 - 2A_0P_1\sin 2(Q_1 + Q_2) - 2\alpha P_1$$

$$\dot{Q}_1 = \Delta\beta + EP_1 + FP_2 - D(P_2 - 2P_1)\cos 2Q_1 - A_0\{\cos 2(Q_1 + Q_2) - \cos 2Q_2\}$$

$$\dot{P}_2 = -2A_0\{P_1\sin 2(Q_1 + Q_2) + (P_2 - P_1)\sin 2Q_2\} - 2\alpha P_2$$

$$\dot{Q}_2 = \beta_2 + 2A_2P_2 + FP_1 - DP_1\cos 2Q_1 - A_0\cos 2Q_2 \quad (2)$$

但し  $\Delta\beta = \beta_1 - \beta_2$ ,  $E = 2(A_1 + A_2 - 2C - D)$ ,  $F = 2(C - A_2) + D$

系(2)は  $A_0 = \alpha = 0$  のとき  $H_0$  (ハミルトン) と  $P_2$  が保存量となり可積分である。このときあるパラメータでホモクリニック軌道 (正確には  $(P_1, Q_1)$  平面でのヘテロクリニック軌道) が存在し、さらに  $\dot{Q}_2 = \frac{\partial H_0}{\partial P_2}$  がその軌道の近傍で0でない

と仮定する。reduction 法により、 $A_0$  が十分小さいときにメルニコフ関数 (安定多様体と不安定多様体の距離を表す) が求められ、1位の零点を持つ事が示される。このことは外カをうけた (ホア=カレ写像上での) ホモクリニック軌道の近くに Smale horseshoe 写像が存在することを意味し、カオス的な軌道が存在する証明となる。(Guckenheimer & Holmes 1983)

$$A_1 = A_2 = C = -3, \quad D = -4, \quad (P_2 = 0.25), \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = -1$$

をとると、上の仮定が満足される。図6に  $Q_2 = 0$  でのホア=

カレ写像  $(x, y) = (\sqrt{2P_1} \cos Q_1, \sqrt{2P_1} \sin Q_1)$  を示す。

図4のようなアトラクターに対して上の仮定を吟味した結果、満足されない ( $\dot{Q}_2 = 0$  となる) ことがわかった。よって保存系でのホモクリニック・カオスの存在の数学的証明はそのまま直接に、散逸系のアトラクターの場合にはあてはまらない。ただし、 $A_0 \gg \alpha$  で暫時的なカオス状態 (安定多様体と不安定多様体の横断的交差が残るという意味で) が存在する。

## 5. 結論

水面波のパラメトリック励起の分岐理論、カオス理論と実験との比較を行ない、一致点、相違点を明確にした。

## <参考文献>

Simonelli & Gollub 1989 J. Fluid Mech. 199, 471-494

Holmes 1986 J. Fluid Mech. 162, 365-388

Miles 1984 J. Fluid Mech. 146, 285-302

Umeki & Kambe 1989 J. Phys. Soc. Jpn. 58, 140-154

Feng & Sethna 1989 J. Fluid Mech. 199, 495-581

Guckenheimer & Holmes 1983 Nonlinear Oscillations,  
Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields  
Springer-Verlag.

Umeki 1989 preprint.

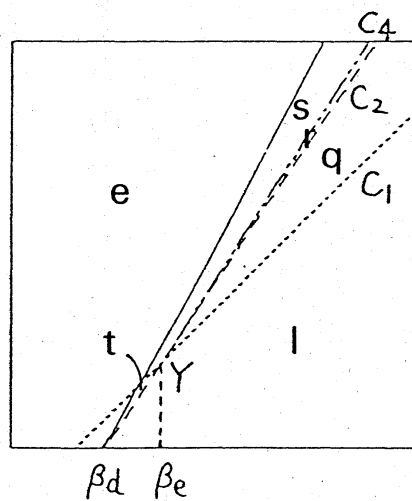
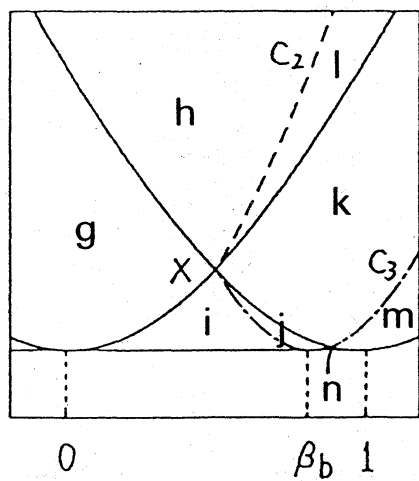
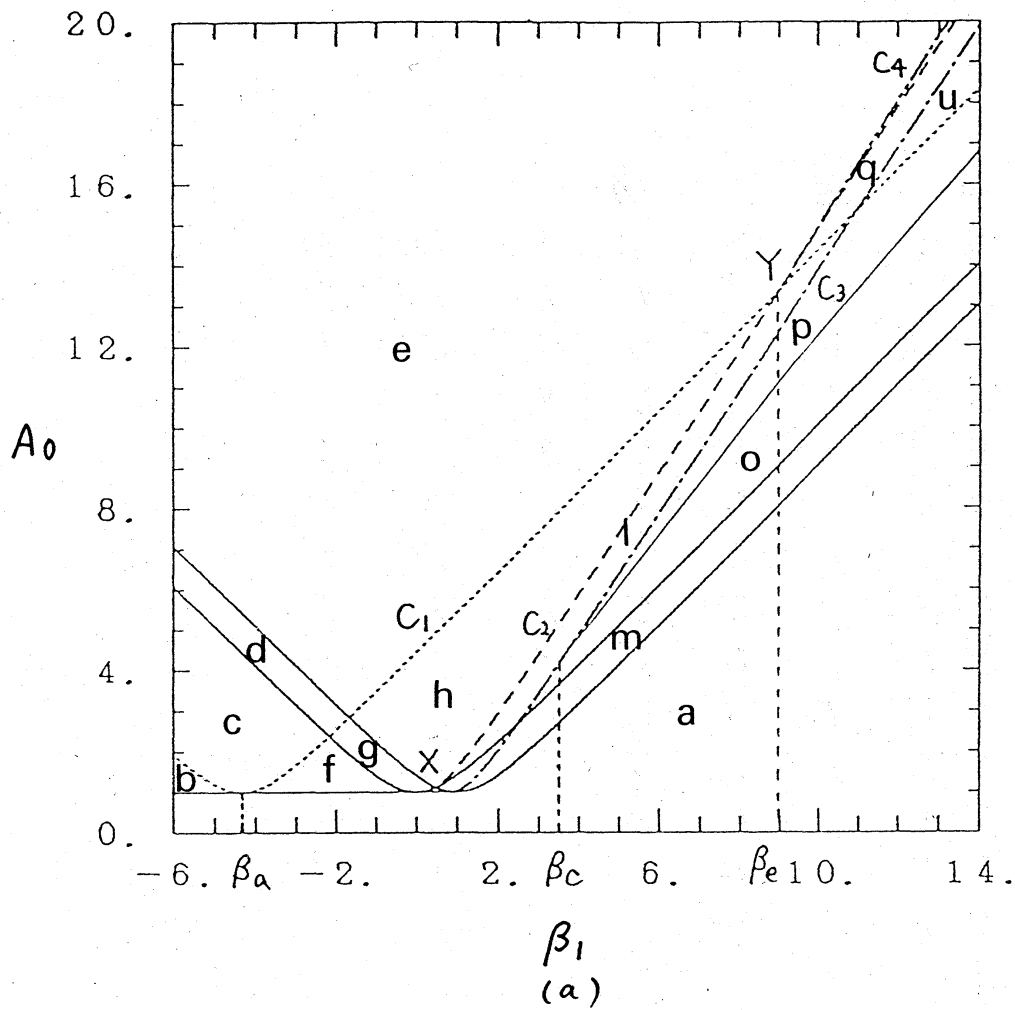


図1 長方形 ( $w_1 \approx w_2$ ) の場合の分岐図 (a) と X, Y 点近傍の拡大図 (b), (c)



	Q	S1 <sub>+</sub>	S1 <sub>-</sub>	S2 <sub>+</sub>	S2 <sub>-</sub>	Ma <sub>+</sub>	Ma <sub>-</sub>	Mb
a	S	/	/	/	/	/	/	/
b	S	U	U	U	U	S	U	/
c	S	U	U	U	U	S	/	/
d	U	U	/	U	U	S	/	/
e	U	U	/	U	/	S	/	/
f	S	S	U	U	U	/	/	/
g	U	S	/	U	U	/	/	/
h	U	S	/	U	/	/	/	/
i	S	/	/	S	U	/	/	/
j	S	/	/	U	U	/	/	(U, S)
k	U	/	/	U	U	/	/	(U, S)
l	U	U	/	U	/	/	/	S
m	U	/	/	S	/	/	/	/
n	S	/	/	S	/	/	/	/
o	U	U	/	S	/	/	/	/
p	U	/	/	S	/	/	/	[S, U]
q	U	S	/	U	/	U	/	S
r	U	S	/	U	/	U	/	[S, U]
s	U	U	/	U	/	S	/	[S, U]
t	U	S	/	U	/	/	/	[S, U]
u	U	S	/	S	/	U	/	[S, U]

表1. 固定点の分類. Sは安定, Uは不安定, /は存在せず. (U, S)はUまたはS. [S, U]はSとUの多重状態を示す. 添字の+, -は振幅の大小で区別したものを表す.

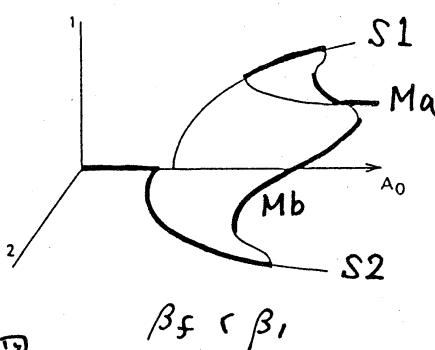
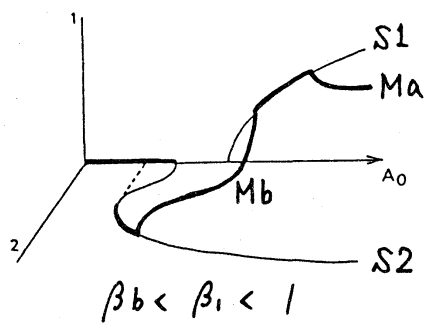
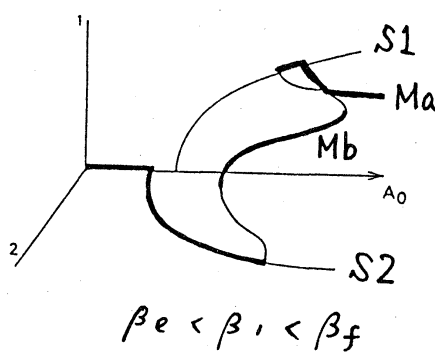
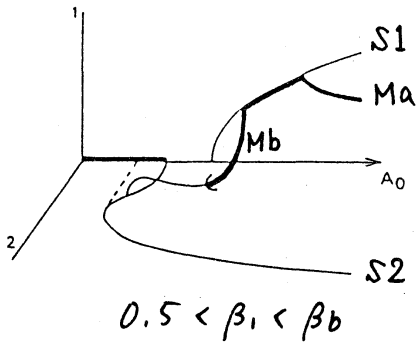
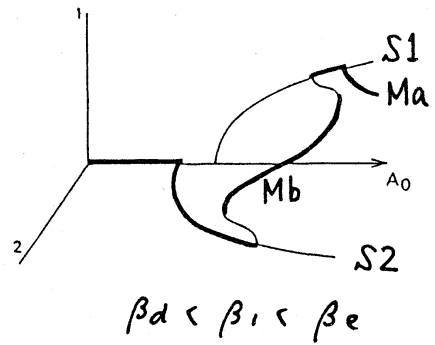
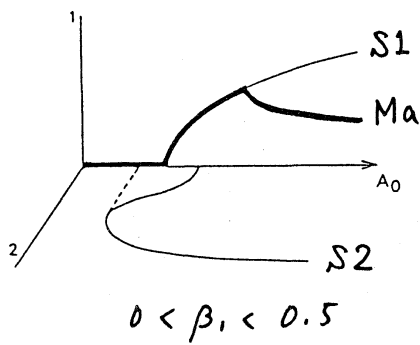
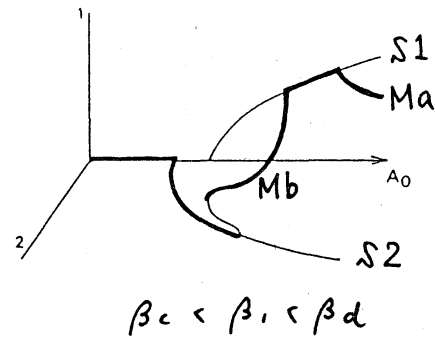
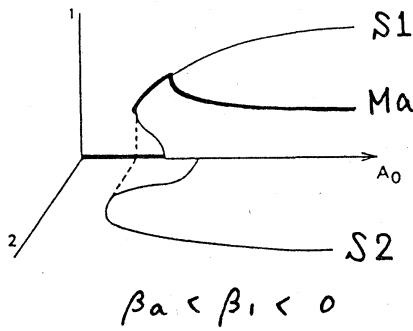
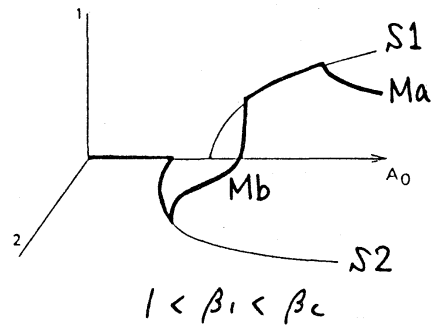
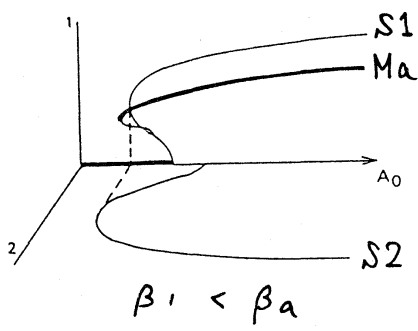


図2 分岐の模式図

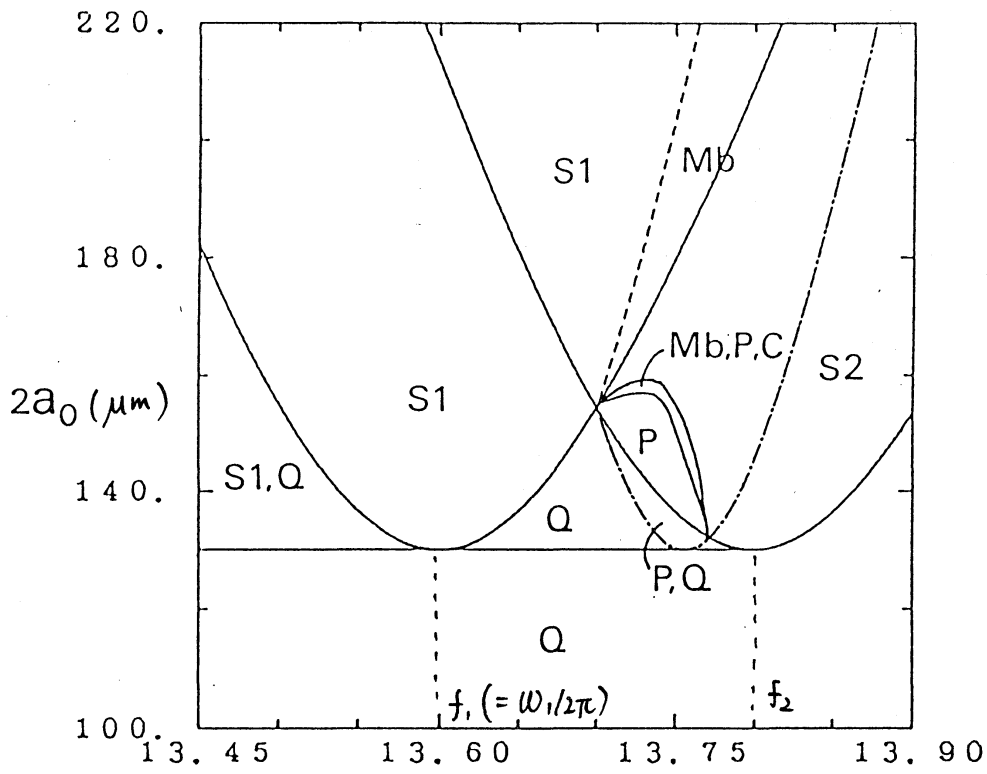


図3 長方形容器の分岐図 (記号は安定状態を示す)

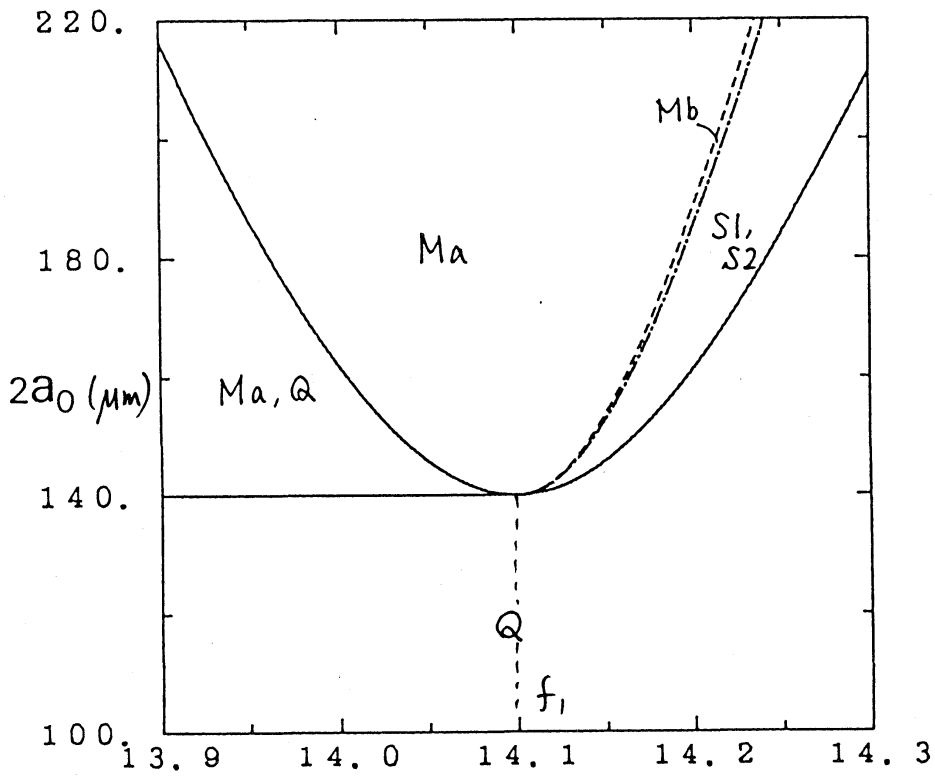
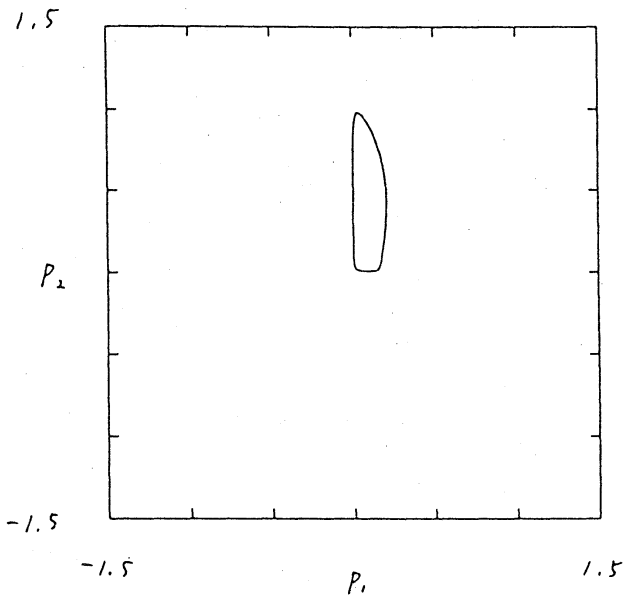
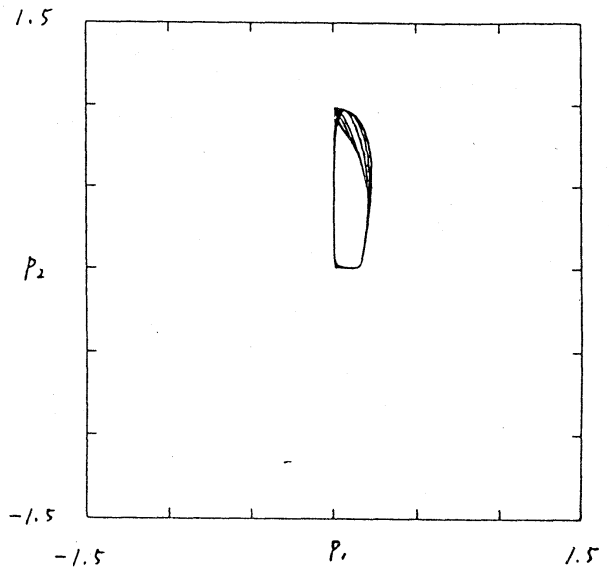


図5 正方形容器の分岐図

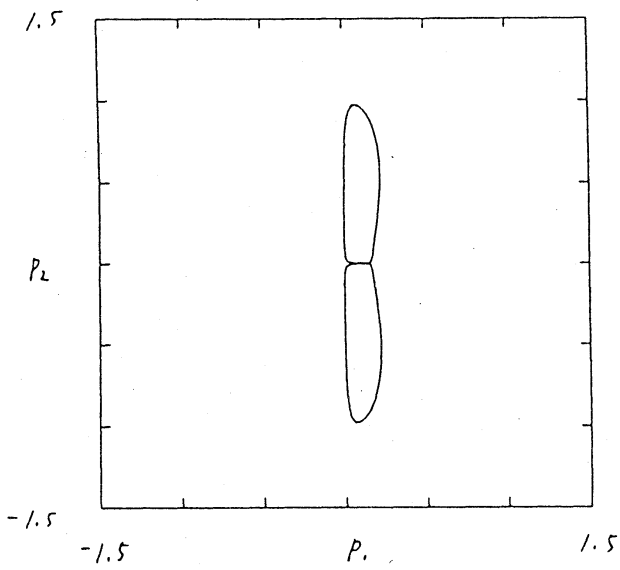
//



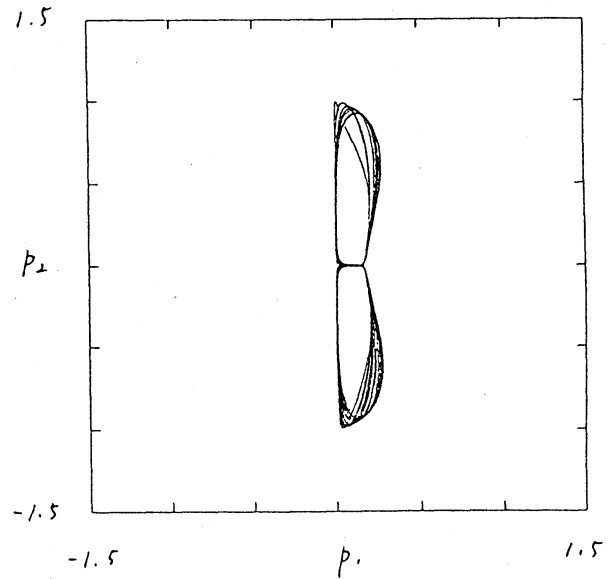
$2a_0 = 155 (\mu\text{m})$



$2a_0 = 156.2$



$2a_0 = 157.4$



$2a_0 = 158.5$

図4. 周期カオス軌道の  $(p_1, p_2)$  平面への射影

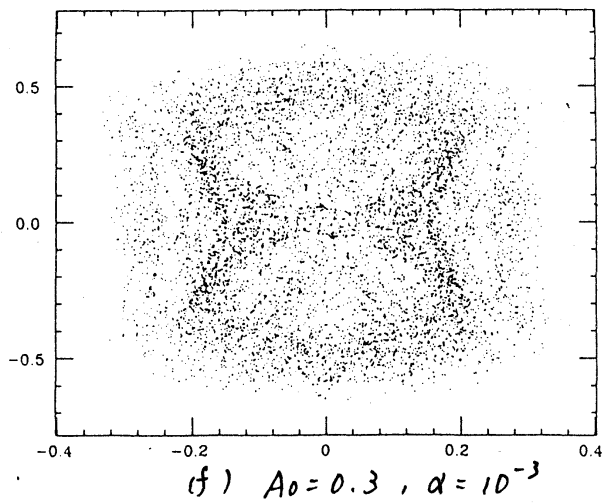
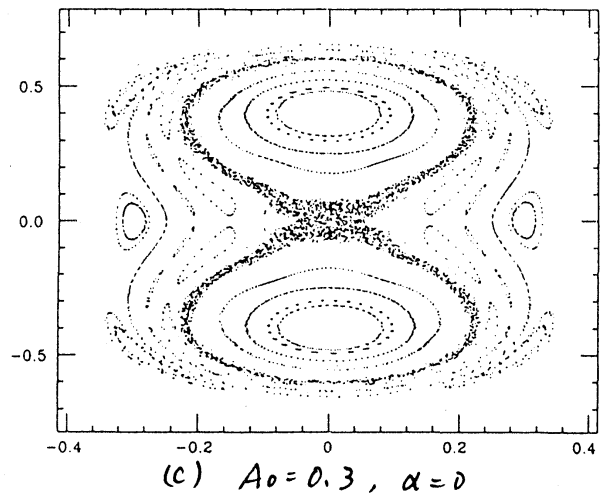
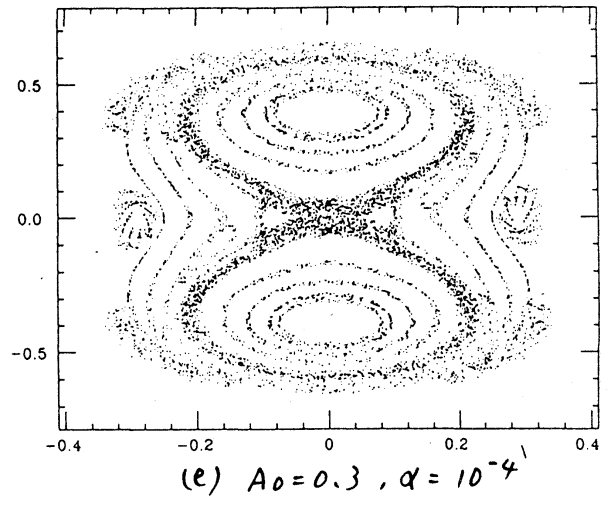
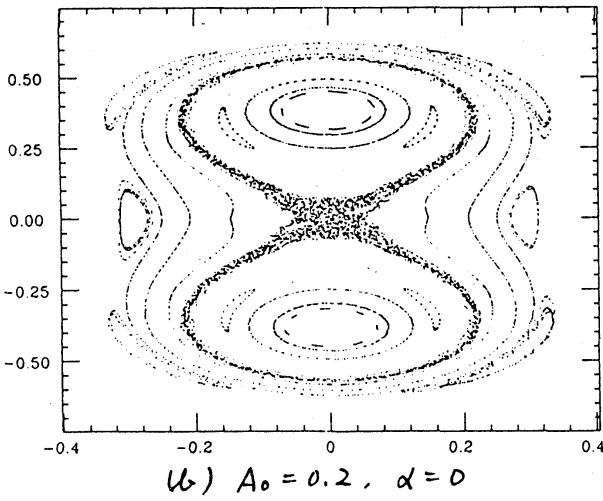
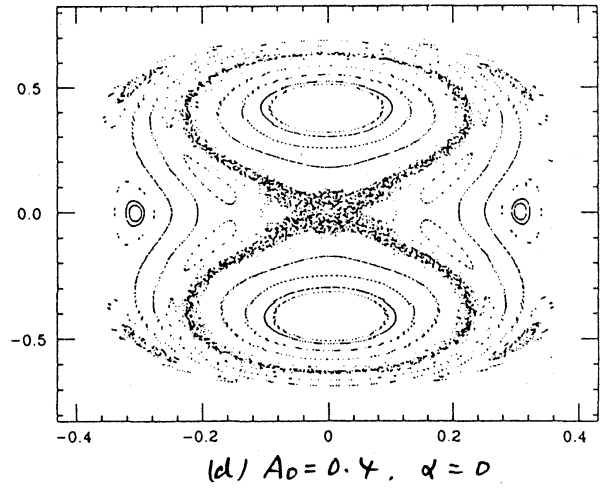
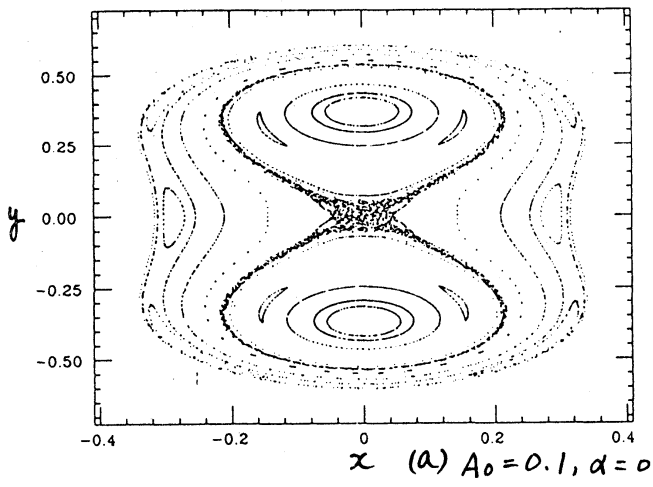


図6 系(2)のホップカレ断面( $Q_2=0$ )

初期条件  $P_2=0.25, Q_2=0, P_1=0.001, 0.05, Q_1=2\pi k/40,$   
 $k=1, \dots, 40.$