数理解析研究所講究録
741巻 1991年 76-91

ナワバリをめぐる2人ゲーム II
にらみ合いと決戦

姫路工大 寺岡義伸 (Yoshinobu Tearoka)

1. はじめに

ここで取扱う問題は，筆者が以前に報告した 2人のプレーヤが1つのナワバリをめぐって対立するゲームの，一般化である [2]. このモデルは 生物進化学の分野で研究されていた直観的な取扱いを数学的に整理することから抽出されており，単に生物進化学に対してでなく，広くナワバリをめぐる対立現象での最適戦略の研究に通じるものである [1].

この基本モデルは，次のように表現できる:

2人のプレーヤ (Player I, II) が「価値」V をもったナワバリをめぐって戦っている. この対戦に際して，各々は，「誇示」・「挑み」・「逃げ」の3つの行動がとれるものとし，この行動から 次の2つの「純戦略」のうち一方を選択することになる.

タカ戦略：勝ち負けがはっきりするまで戦いを挑む.

ハト戦略：まず誇示をし，相手が戦いを挑めば逃げ出す。

もし両者ともタカ戦略を選んだときには，いずれか一方が傷つき逃げ出すことになる。そして敗れた方は価値 C を失うものとする。タカとハトをそれぞれ H と H で表わす。そして Payoff は以下のように定義されるものとする。

(i) Ⅰ，Ⅱ 共に H を選んだ時は，確率 p で Ⅰ が勝ち，確率 q で Ⅱ が勝つものとする。ここに，$p>0$，$q>0$，$p+q=1$.

(ii) 一方が H を選び他方が D を選んだ時は，H を選んだ方は価値 V を手に入れ，D を選んだ方は 0 となる。

(iii) Ⅰ，Ⅱ 共に D を選んだ時は，Ⅰ と Ⅱ は $p:q$ の比で V を分けあうものとする。 後の議論の為，$p \geqq \frac{1}{2}$ とする。▨

以上の仮定をもとに利得双行列を求めると次のようになる：

$$
\begin{array}{cc|c|c|}
 & & \multicolumn{2}{c}{\text{Ⅱ}} \\
 & & H & D \\
\hline
\text{Ⅰ} & H & pV-qC,\ qV-pC & V,\ 0 \\
\hline
 & D & 0,\ V & pV,\ qV \\
\hline
\end{array}
$$

この非0和ゲームに対しては，平衡点 (x°, y°) および平衡値 $v_1^\circ = M_1(x^\circ, y^\circ)$；$v_2^\circ = M_2(x^\circ, y^\circ)$ は $\frac{C}{V}$ と $\frac{q}{p}$ の大小関係に関連して以下のように求められる[2]。

$$0 < \frac{C}{V} \leqq \frac{q}{p} \Rightarrow (\langle 1, 0\rangle, \langle 1, 0\rangle)$$

$$v_1^\circ = pV - qC \ ; \ v_2^\circ = qV - pC,$$

$$\frac{q}{p} < \frac{C}{V} \leqq \frac{p}{q} \Rightarrow (\langle 1, 0\rangle, \langle 0, 1\rangle)$$
$$v_1^0 = V \;;\; v_2^0 = 0,$$

$$\frac{C}{V} > \frac{p}{q} \Rightarrow (\langle 1, 0\rangle, \langle 0, 1\rangle),\ v_1^0 = V \;;\; v_2^0 = 0,$$
$$(\langle 0, 1\rangle, \langle 1, 0\rangle),\ v_1^0 = 0 \;;\; v_2^0 = V,$$
$$\left(\left\langle \frac{pV}{pC-(q-p)V}, \frac{pC-qV}{pC-(q-p)V} \right\rangle, \left\langle \frac{qV}{qC-(p-q)V}, \frac{qC-pV}{qC-(p-q)V} \right\rangle\right),$$
$$v_1^0 = \frac{pV(qC-pV)}{qC-(p-q)V} \;;\; v_2^0 = \frac{qV(pC-qV)}{pC-(q-p)V}. \quad ▥$$

p, q, V, Cの値が何であっても，結果として平和的共存へ導く$(\langle 0,1\rangle, \langle 0,1\rangle)$が平衡点とはならず，常に挑戦的なHが残されている。

2．ナワバリの持久戦

前節の基本モデルには，時間的経緯が入っていなかった。より現実的なモデルとしては，対戦は誇示ではじめられ，この誇示による対戦でどこまで持続できるか，という要因を入れることであろう。この考えを導入したモデルは次のように表現できる。

Player I, II は各々$[0, \infty)$内のどの時点までねばるかを決めようとしている。大きな時点を選んだ方が勝ちとなり，勝者は価値Vを敗者は価値0を得る。しかしながら時刻$t \in [0, \infty)$まで対戦を持続するためには Player I, II はそれぞれ

$h_1(t)$, $h_2(t)$ のコストを費やさなければならない。ここにコスト $h_i(t)$ は, $h_i(0)=0$, $h_i'(t)>0$ for $t\in[0,\infty)$, かつ $h_i(t)\nearrow\infty$ as $t\nearrow\infty$ であると仮定する ($i=1,2$). また両者が同時刻までねばった時は $p:q$ の比で勝敗が決まるものとする. 両者共最適な持続時間を決めなければならない。

Player I, II にとっての純戦略をそれぞれ $x\in[0,1)$, $y\in[0,1)$ とし, $M_i(x,y)$ を Player i にとっての利得とすると

$$M_1(x,y)=\begin{cases}-h_1(x), & x<y\\ pV-h_1(x), & x=y\\ V-h_1(y), & x>y\end{cases};$$

$$M_2(x,y)=\begin{cases}-h_2(y), & y<x\\ qV-h_2(y), & y=x\\ V-h_2(x), & y>x,\end{cases}$$

が得られ, 次の結論を得る[2].

$[0,\infty)$ 上の cdfs $F^\circ(x)$ と $G^\circ(y)$ を次のようにおく:

$$F^\circ(x)=\int_0^x\frac{h_2'(t)}{V}e^{-\frac{h_2(t)}{V}}dt,\qquad x\geqq0\ ;$$

$$G^\circ(y)=\int_0^y\frac{h_1'(t)}{V}e^{-\frac{h_1(t)}{V}}dt,\qquad y\geqq0,$$

そうすると (F°,G°) はこのゲームの1つの平衡点となり, 平衡値として

$$v_1^\circ=v_2^\circ=0$$

を与える.

3. 誇示・にらみ合い・そして決戦

今までのモデルでは，時間的経過を全然考えずにハト戦略を選ぶかタカ戦略を選ぶかを決定するか，あるいは時間的経過を考えても誇示をどこまで持続するか，といった内容のものばかりであった．しかしながら，現実の問題にあっては，対戦は誇示ではじまり，そしてしばらくのにらみ合いが続きある一定時間の後にまだ両者共にらみ合っているようであれば決戦という形態をとる．

本報告では，上記の経過をモデル化した，ナワバリのゲームを，提案し解析する．我々が目的とするゲームは次のように端的に表現できるゲームである．

2人の Player（Player I, II）は与えられた有限区間 $[0, \delta]$ のどの時点までにらみ合いを続けるかを決めなければならない．大きな時点まで続けた方が勝ちとなり，勝者は V を敗者は 0 を得る．しかしながら時刻 $t \in [0, \delta]$ までにらみ合いを持続するためには Player I, II はそれぞれ $h_1(t)$, $h_2(t)$ のコストを費やさなければならない．ここに $h_i(t)$ は $h_i(0)=0$, $h_i'(t)>0$ for $t \in (0, \delta)$ であると仮定する（$i=1, 2$）．両者共 δ より前の同時刻までにらみ合った時は V を $p:q$ の比で分け合い，両者共上限の δ までねばった時は決戦となり，I と II はそれぞれ期待値として $pV-qC$ を，$qV-pC$ を

得るものとする. なぜなら両者共勝てばVを得 敗ればCを失うからであり, Iの勝つ確率がpで, IIの勝つ確率がqであるからである. 両者は自分にとっての最適持続時間を決定しなければならない.

上記のモデルによって与えられるゲームの純戦略をIにとっては $x\in[0,\delta]$, IIにとっては $y\in[0,\delta]$とする. そうすると Player i にとっての利得関数 $M_i(x,y)$ $(i=1,2)$ は

$$(1)\quad M_1(x,y)=\begin{cases} -h_1(x), & x<y \\ pV-h_1(x), & x=y<\delta \\ pV-qC-h_1(\delta), & x=y=\delta \\ V-h_1(y), & x>y \end{cases} \;;$$

$$(2)\quad M_2(x,y)=\begin{cases} -h_2(y) & y<x \\ qV-h_2(y) & y=x<\delta \\ qV-pC-h_2(\delta) & y=x=\delta \\ V-h_2(x) & y>x, \end{cases}$$

となる.

ここで, Player I とIIの混合戦略をそれぞれ区間$[0,\delta]$上のcdfs $F(x)$と$G(y)$とし, その形を次のように想定する:

Iの混合戦略$F(x)$は, 点0でのmass part α_0, 区間$(0,\delta)$上のpdf $f(x)$, および点δでのmass part α_δ よりなり;

IIの混合戦略$G(y)$は, 点0でのmass part β_0, 区間$(0,\delta)$上のpdf $g(y)$, および点δでのmass part β_δ よりなり,

構成されているものとする.

上記の混合戦略に対して，期待値の記号として

$$M_i(F,y)=\int_0^\delta M_i(x,y)\,dF(x)\ ;\quad M_i(x,G)=\int_0^\delta M_i(x,y)\,dG(y),$$

$$M_i(F,G)=\int_0^\delta\int_0^\delta M_i(x,y)\,dF(x)\,dG(y),\qquad (i=1,2)$$

を用いることにする．そうすると

$$(3)\quad M_2(F,y)=\begin{cases}\alpha_0\delta V+\{-h_2(y)\}[1-F(0)]=\alpha_0\delta V, & y=0\\ \alpha_0V+\int_0^y\{V-h_2(x)\}f(x)\,dx & \\ \quad+\int_y^\delta\{-h_2(y)\}f(x)\,dx+\alpha_\delta\{-h_2(y)\}, & 0<y<\delta\\ \alpha_0V+\int_0^\delta\{V-h_2(x)\}f(x)\,dx & \\ \quad+\alpha_\delta\{\delta V-PC-h_2(\delta)\}, & y=\delta\end{cases}$$

となるから

$$M_2(F,y)=v_1^0\quad \text{for all } y\in(0,\delta)$$

を解き normalization condition

$$\int_0^\delta f(t)\,dt=1-\alpha_0-\alpha_\delta$$

を使うと

$$(4)\qquad f(t)=k_1\frac{h_2'(t)}{V}e^{-\frac{h_2(t)}{V}},\qquad \text{for } t\in(0,\delta)$$

$$\text{ここに}\quad k_1=(1-\alpha_0-\alpha_\delta)/\{1-e^{-\frac{h_2(\delta)}{V}}\},$$

を得る．まったく同様にして

$$(5)\qquad g(t)=k_2\frac{h_1'(t)}{V}e^{-\frac{h_1(t)}{V}},\qquad \text{for } t\in(0,\delta)$$

$$\text{ここに}\quad k_2=(1-\beta_0-\beta_\delta)/\{1-e^{-\frac{h_1(\delta)}{V}}\}$$

を得る．(4)式と(5)式で与えられる密度部分にもつような cdfs $F(x)$ と $G(y)$ は

$$M_2(F,y)=\begin{cases}\alpha_0 \varepsilon \bar{V}, & y=0\\ \alpha_0\bar{V}+h_2(y)\left\{k_1 e^{-\frac{h_2(\gamma)}{\bar{V}}}-\alpha_\gamma\right\}, & 0<y<\gamma\,;\\ \alpha_0\bar{V}+k_1 h_2(\gamma)e^{-\frac{h_2(\gamma)}{\bar{V}}} & \\ \qquad +\alpha_\gamma\{\varepsilon\bar{V}-pC-h_2(\gamma)\}, & y=\gamma\end{cases}$$

$$M_1(x,G)=\begin{cases}\beta_0 p\bar{V}, & x=0\\ \beta_0\bar{V}+h_1(x)\left\{k_2 e^{-\frac{h_1(\gamma)}{\bar{V}}}-\beta_\gamma\right\}, & 0<x<\gamma\\ \beta_0\bar{V}+k_1 h_1(\gamma)e^{-\frac{h_1(\gamma)}{\bar{V}}} & \\ \qquad +\beta_\gamma\{p\bar{V}-\varepsilon C-h_1(\gamma)\}, & x=\gamma\end{cases}$$

を満足する．したがって，今

$$\alpha_\gamma=k_1 e^{-\frac{h_2(\gamma)}{\bar{V}}}\quad ;\quad \beta_\gamma=k_2 e^{-\frac{h_1(\gamma)}{\bar{V}}}$$

と選ぶと

$$M_2(F,y)=\mathrm{const}\qquad \text{for all } x\in(0,\gamma)\,;$$
$$M_1(x,G)=\mathrm{const}\qquad \text{for all } y\in(0,\gamma)$$

とでき，その結果

$$M_2(F,y)=\begin{cases}\alpha_0\varepsilon\bar{V}\leqq\alpha_0\bar{V}, & y=0\\ \alpha_0\bar{V}, & 0<y<\gamma\\ \alpha_0\bar{V}+\alpha_\gamma(\varepsilon\bar{V}-pC), & y=\gamma\end{cases}$$

および

$$M_1(x,G)=\begin{cases}\beta_0 pV \leqq pV, & x=0\\ \beta_0 V, & 0<x<\gamma \\ \beta_0 V+\beta_\gamma(pV-qC), & x=\gamma\end{cases}$$

が得られる。

上二式を観察すると，第1節の基本モデルの時とまったく同様の考察，すなわち，

(i) $pV-qC\geqq 0$ かつ $qV-pC\geqq 0$ の場合，

(ii) $pV-qC<0$ かつ $qV-pC\geqq 0$ の場合

(iii) $pV-qC\geqq 0$ かつ $qV-pC<0$ の場合

(iv) $pV-qC<0$ かつ $qV-pC<0$ の場合

に応じて，決戦へ突入するか — 点γにmass α_γ や β_γ を残すか，最初から逃げをきめこむか — 点0でのmassに全確率を投入し $\alpha_0=1$ 又は $\beta_0=1$ とするか，が決まってきて平衡戦略が定まる。

以上より，定理1を得る。

定理1. $p\geqq\frac{1}{2}$，すなわち，$p\geqq q$と仮定する。そうすると，非0和無限ゲーム(1)と(2)の平衡戦略および平衡値は以下のように与えられる。

(a) $0<\frac{C}{V}\leqq\frac{q}{p}$ の時

$$F^0(x)=\int_0^x \frac{h_2'(t)}{V}e^{-\frac{h_2(t)}{V}}dt+e^{-\frac{h_2'(\gamma)}{V}}I_\gamma(x),\quad 0\leqq x\leqq\gamma$$

$$G^\circ(y)=\int_0^y \frac{h_1'(t)}{V} e^{-\frac{h_1(t)}{V}}dt + e^{-\frac{h_1(t)}{V}} I_\delta(y),\quad 0<y\leqq\delta$$

とおくと，$F^\circ(x)$ と $G^\circ(y)$ はそれぞれ Player I, II の平衡混合戦略となり，この場合の平衡値 v_1° と v_2° は，それぞれ

$$v_1^\circ=(pV-qC)e^{-\frac{h_1(\delta)+h_2(\delta)}{V}}\ ;$$

$$v_2^\circ=(qV-pC)e^{-\frac{h_1(\delta)+h_2(\delta)}{V}},$$

で与えられる．

(b) $\frac{q}{p}<\frac{C}{V}\leqq\frac{p}{q}$ の時

$$F^\circ(x)=\int_0^x \frac{h_2'(t)}{V} e^{-\frac{h_2(t)}{V}}dt + e^{-\frac{h_2(\delta)}{V}} I_\delta(x),\quad 0\leqq x\leqq\delta$$

$$G^\circ(y)=1,\qquad 0\leqq y\leqq\delta$$

とおくと，$F^\circ(x)$ と $G^\circ(y)$ はそれぞれ I, II の平衡混合戦略となり，この場合の平衡値 v_1° と v_2° はそれぞれ

$$v_1^\circ=V\quad ;\quad v_2^\circ=0$$

で与えられる．

(c) $\frac{C}{V}>\frac{p}{q}$ の時 平衡戦略は次の3つの型となる．

(i) $$F^\circ(x)=\int_0^x \frac{h_2'(t)}{V} e^{-\frac{h_2(t)}{V}}dt + e^{-\frac{h_2(\delta)}{V}} I_\delta(x),\quad 0\leqq x\leqq\delta$$

$$G^\circ(y)=1,\qquad 0\leqq y\leqq\delta$$

とおくと，この $F^0(x)$ と $G^0(y)$ は1組の平衡混合戦略を構成し，この戦略に対して平衡値 v_1^0 と v_2^0 はそれぞれ

$$v_1^0 = V \quad ; \quad v_2^0 = 0$$

で与えられる．

(ii) $F^0(x) = 1, \qquad 0 \leqq x \leqq \delta$

$$G^0(y) = \int_0^y \frac{h_1'(t)}{V} e^{-\frac{h_1(t)}{V}} dt + e^{-\frac{h_1(\delta)}{V}} I_\delta(y), \qquad 0 \leqq y \leqq \delta$$

とおくと，この $F^0(x)$ と $G^0(y)$ も1組の平衡混合戦略を構成し，この戦略に対して平衡値 v_1^0 と v_2^0 はそれぞれ

$$v_1^0 = 0 \quad ; \quad v_2^0 = V$$

で与えられる．

(iii)

$$F^0(x) = \begin{cases} \dfrac{pC - qV}{pV + (pC - qV)}, & x = 0 \\[2ex] \dfrac{(pC - qV) + pV\left(\int_0^x \frac{h_2'(t)}{V} e^{-\frac{h_2(t)}{V}} dt + e^{-\frac{h_2(\delta)}{V}} I_\delta(x)\right)}{pV + (pC - qV)}, & 0 < x \leqq \delta \end{cases}$$

$$G^0(y) = \begin{cases} \dfrac{qC - pV}{qV + (qC - pV)}, & y = 0 \\[2ex] \dfrac{(qC - pV) + qV\left(\int_0^y \frac{h_1'(t)}{V} e^{-\frac{h_1(t)}{V}} dt + e^{-\frac{h_1(\delta)}{V}} I_\delta(y)\right)}{qV + (qC - pV)}, & 0 < y \leqq \delta \end{cases}$$

とおくと，この $F^0(x)$ と $G^0(y)$ もまた1組の平衡混合戦略を構成し，この戦略に対して平衡値 v_1^0 と v_2^0 はそれぞれ

$$v_1^0=\frac{p\bar{V}(qC-p\bar{V})}{\{p\bar{V}+(pC-q\bar{V})\}\{q\bar{V}+(qC-p\bar{V})\}}\left\{pC+p\bar{V}-q\bar{V}e^{-\frac{r_1(t)+r_2(t)}{\bar{V}}}\right\};$$

$$v_2^0=\frac{q\bar{V}(pC-q\bar{V})}{\{p\bar{V}+(pC-q\bar{V})\}\{q\bar{V}+(qC-p\bar{V})\}}\left\{qC+q\bar{V}-p\bar{V}e^{-\frac{r_1(t)+r_2(t)}{\bar{V}}}\right\}.$$

で与えられる。▨

上記の定理1に対して，$r \to 0$ とすると第1節の基本モデルの平衡点に，$r \to \infty$ とすると第2節の持久線のモデルの平衡戦略に一致する。

4. Silent 型の持久戦

前節までのモデルは 互に2人のプレーヤは相手の行動が観測できる Noisy 型の ものであった．ここでは前回の発表の時に提起した，「2人のプレーヤは 互に相手の行動を観測できない状態で，$(0, \infty)$ のどの時点までにらみ合うかを決定し，自分の決めた計画持続時間が実現されてみてはじめて既に相手が引いてしまっていたのか まだ頑張っているのかがわかる」という Silent 型のモデルを扱う．したがって，ここでは 第2節の Silent 型を扱うのであって，前節のような 決戦による効果は扱わない。

第3節の時と同様に，$x \in [0, \infty)$，$y \in [0, \infty)$ をそれぞれ Player I と II の純戦略とし，$M_i(x, y)$ を Player i の

利得関数とすると $(i=1,2)$

$$(6)\quad M_1(x,y)=\begin{cases} -h_1(x), & x<y \\ pV-h_1(x), & x=y \\ V-h_1(x), & x>y \end{cases}\quad ;$$

$$(7)\quad M_2(x,y)=\begin{cases} -h_2(y), & y<x \\ qV-h_2(y), & y=x \\ V-h_2(y), & y>x, \end{cases}$$

を得る。このゲームに対しても 純戦略の中に平衡戦略は存在しない。そこで Player I, II の混合戦略 cdfs on $[0,\infty)$ をそれぞれ $F(x)$, $G(y)$ とし，以下のように規定する：

I の混合戦略 $F(x)$ は 点 0 での mass 部分 $\alpha\geqq 0$ と 区間 $(0,u)$ 上での density 部分 $f(x)$ で構成される。

II の混合戦略 $G(y)$ は 点 0 での mass 部分 $\beta\geqq 0$ と 同じ区間 $(0,u)$ 上での density 部分 $g(y)$ で構成される。 ▥

すなわち，両者共 最初の $[0,u)\subset[0,\infty)$ 部分にのみ努力（確率）を配分するというクラスの中に平衡戦略をみつけられると考える。そうすると

$$M_2(F,y)=\begin{cases} \alpha qV, & y=0 \\ \alpha V+V\int_0^y f(x)dx-h_2(y)\int_0^u f(x)dx, & 0<y<u \\ \alpha V+\{V-h_2(y)\}\int_0^u f(x)dx, & y\geqq u \end{cases}$$

が得られる。したがって

$$M_2(F, y) = \text{const} \quad \text{for} \quad y \in (0, u)$$

を満足するような $f(x)$ を求めると

$$f(x) = \frac{1-\alpha}{V} h_2'(x), \qquad 0 < x < u$$

を得る。まったく同様にして

$$g(y) = \frac{1-\beta}{V} h_1'(x), \qquad 0 < y < u \quad .$$

上記のような density 部分をもつ F と G に対して

$$M_2(F, y) = \begin{cases} \alpha q V, & y = 0 \\ \alpha V + \{V - h_2(u)\} \frac{1-\alpha}{V} h_2(y), & 0 < y < u\,; \\ \alpha V + \{V - h_2(y)\} \frac{1-\alpha}{V} h_2(u), & y > u \end{cases}$$

$$M_1(x, G) = \begin{cases} \beta p V, & x = 0 \\ \beta V + \{V - h_1(u)\} \frac{1-\beta}{V} h_1(x), & 0 < x < u \\ \beta V + \{V - h_1(x)\} \frac{1-\beta}{V} h_2(u), & x > u \end{cases}$$

が成立する。そこで 今 u として

$$u_1^* = h_2^{-1}(V) \quad ; \quad u_2^* = h_1^{-1}(V)$$

と選べば この u_1^* と u_2^* に対して

$$M_2(F, y) = \begin{cases} \alpha q V < \alpha V, & y = 0 \\ \alpha V, & 0 < y < u_1^* \\ \alpha V + \{V - h_2(y)\} \frac{1-\alpha}{V} h_2(u_1^*) < \alpha V, & y > u_1^* \end{cases}$$

および

$$M_1(x,G)=\begin{cases}\beta p V < \beta V, & x=0\\ \beta V, & 0<x<u_2^*\\ \beta V+\{V-h_1(x)\}\dfrac{1-\beta}{V}h_1(u_2^*)<\beta V, & x>u_2^*\end{cases}$$

を得る。

以上より，次の定理2が成立する。

定理2. $u_1^*=h_2^{-1}(V)$; $u_2^*=h_1^{-1}(V)$ と選び，かつ

$$u=\min(u_1^*,u_2^*)$$

とせよ。そこで以下のような cdf's $F^*(x)$ と $G^*(y)$ を考える:

$$F^*(x)=\begin{cases}h_2(x)/V, & 0\leqq x<u\\ 1, & x>u\end{cases};$$

$$G^*(y)=\begin{cases}h_1(y)/V, & 0\leqq y<u\\ 1, & y>u,\end{cases}$$

ただし，$u=u_1^*<u_2^*$ の時は $y=u$ で，$u=u_2^*<u_1^*$ の時は $x=u$ で mass があるものとする。

そうすると，2人非0和ゲーム (6) と (7) に対して，混合戦略 $F^*(x)$ と $G^*(y)$ は以下の関係を満足する:

(i) $u=u_1^*<u_2^*$ の時

$$\begin{cases}M_2(F^*,G)\leqq M_2(F^*,G^*),\\ M_1(F^*,G^*)=\dfrac{h_1(u)}{V}\Big[\displaystyle\int_0^u\{V-h_2(y)\}\frac{h_1(y)}{V}dy\\ \qquad+\{V-h_1(u)\}\Big\{1-\dfrac{h_2(u)}{V}\Big\}\Big].\end{cases}$$

(ii) $u = u_2^* < u_1^*$ の時

$$\begin{cases} M_1(F, G^*) \leqq M_1(F^*, G^*), \\ M_2(F^*, G^*) = \dfrac{h_2(u)}{V}\left[\displaystyle\int_0^u \{V - h_1(x)\}\dfrac{h_2(x)}{V}dx + \{V - h_2(u)\}\left\{1 - \dfrac{h_1(u)}{V}\right\}\right]. \end{cases}$$

この節で展開したモデルは，競争入札の Highest Bid の問題にも適用できる。

参考文献

[1] J. M. Smith : Evolution and the Theory of Games, Cambridge University Press, 1982.
（寺本訳：進化とゲームの理論 ― 闘争の論理，産業図書 1985）.

[2] 寺岡義伸：ナワバリをめぐる2人ゲーム，京都大学数理解析講究録680「計画数学とその関連分野」（研究代表者 安田正實）pp. 275－284（1989）.