数理解析研究所講究録
第 741 巻 1991 年 1-14

Various Strategies of Multicriteria Two-Person Games

Tamaki TANAKA*
(Faculty of Science, Hirosaki University)
田中　環
(弘前大学 理学部 情報科学科)

1 Introduction

一般にはゲームの Payoff が実数値であるとは限らず、相対的価値が確定されないいくつかの報酬を表す数量を成分とするようなベクトル値の場合がある。このような複数の比較のできない criteria を持つゲームを "games with vector payoffs" とか "multicriteria games" という。

このようなゲームについては 1956 年の [1] や 1959 年の [4] において、早くから研究されてきたが、近年の vector optimization に影響され、[5] や [6] に見られるように、再び議論されるようになった。また、ベクトル値関数のミニマックス定理や "鞍点 (saddle points)" の概念の一般化についての研究も最近の [7]–[14] に見られるように盛んに研究されている。

このような研究の背景には、実数値 Payoff の場合に本来備わっているいくつかのゲームの性質がベクトル値 Payoff の場合にも成立しているかどうか、あるいはベクトル値ならではの新しい性質があるのかどうかが興味としてあったからである。これまでの研究で、まだ未解決の点がたくさんあるが、今までの結果を中心に、本報告では、(非協力)2 人零和ゲームの立場から、実数値 Payoff を持つゲームを全順序型、ベクトル値 Payoff を持つゲームを半順序型として取扱い、この 2 つの型における類似点、相違点を明らかにする、また、新しい最適戦略 (optimal strategies) と新しい (錐) 鞍点の概念を導入する。

さて、そこで全順序型の (非協力)2 人零和ゲームについての主な性質をいくつかまとめておこう。Payoff fを $X \times Y$上の実数値関数とし、

最小化プレイヤー player1 は Payoff fを最小にするように、戦略 $x \in X$を選択する。

*Department of Information Science, Faculty of Science, Hirosaki University, Bunkyo-cho 3, Hirosaki 036, Aomori JAPAN

最大化プレイヤー player2 は Payoff fを最大にするように、戦略 $y \in Y$を選択する。

このとき、一般に次のことが成立している。

(a) 常に、次の不等式が成り立つ：

$$\sup_{y\in Y}\inf_{x\in X} f(x,y) \le \inf_{x\in X}\sup_{y\in Y} f(x,y);$$

(b) 各 player の均衡戦略と最適戦略は一致する;

(c) Payoff f が鞍点 $(x_0, y_0) \in X \times Y$を持つことと、次の等式が成立することは同値：

$$\max_{y\in Y}\inf_{x\in X} f(x,y) = \min_{x\in X}\sup_{y\in Y} f(x,y);$$

(d) Payoff f が鞍点 $(x_0, y_0) \in X \times Y$を持てば、$x_0$、$y_0$は各 player の均衡戦略であり、最適戦略でもある;

(e) 異なる均衡点から各 player は同じ Payoff を受け取る;

(f) Payoff fの 2 つの鞍点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$が存在したとき、$(x_1, y_2), (x_2, y_1)$ も Payoff fの鞍点となる。

これらの性質について、半順序型のゲームの場合、どうなっているのかを次に考えてみよう。

2 Multicriteria Two-Person Zero-Sum Games

半順序型の非協力 2 人零和ゲームとして、次のような都合の良い設定を与えることにする。

X, Y は (実 Hausdorff locally convex t.v.s. の) コンパクト凸集合
$f : X \times Y \to Z$ は連続なベクトル値 Payoff
ただし、目的空間 Zも実 Hausdorff locally convex t.v.s. で
原点の近傍の基として、$\mathcal{B}_Z$を持つ

最小化プレイヤー player1 は Payoff f を最小にするように、
戦略 $x \in X$ を選択する。

最大化プレイヤー player2 は Payoff f を最大にするように、
戦略 $y \in Y$ を選択する。

ここでの最大化、最小化とは、Payoff の評価の基準として目的空間 Z に半順序 $(\leq_C)$ を定める

$$\text{pointed}\ (C\cap(-C)=\{0\})\ \text{な凸錐 (Convex Cone)}\ C$$
$$\text{ただし、}\ \mathrm{int}C\neq\emptyset$$

が与えられていて、この順序構造について最適化をはかるものとする。このような凸錐 C を domination cone と呼ぶ。

$$cf.\ \ Z=\mathbf{R}^n, C=\mathbf{R}^n_+\ \text{の時は}\quad Pareto\ Optimization$$

すなわち、$\forall z_1,z_2\in Z$ に対して、$z_2-z_1\in C$ の時、$z_1\leq_C z_2$ と定め、ベクトルの最大化、最小化を考える。Z の部分集合 A のあるベクトル $z_0\in A$ が A の C-extreme point であるとは、

$$\{z\in A\mid z\leq_C z_0, z\neq z_0\}=\emptyset$$

が成り立つ場合をいい、そのような A の C-extreme points 全体を $\mathrm{Ext}[A\mid C]$ と表す (Ext$[A\mid C$ の詳しい性質については、[15],[16],[17] などを見よ)。ここでは、この集合のことを A の最小元の集合と呼び、

$$\mathrm{Min}A:=\mathrm{Ext}[A\mid C]$$

と書くことにする。従って、A の最大元の集合や、弱最小元の集合、弱最大元の集合も次のように定義する。

$$\mathrm{Max}A:=\mathrm{Ext}[A\mid -C]$$

$$\mathrm{Min}_w A:=\mathrm{Ext}[A\mid C^0]$$

$$\mathrm{Max}_w A:=\mathrm{Ext}[A\mid -C^0]$$

ただし、$C^0:=\mathrm{int}C\cup\{0\}$ とする。この時また、“$\leq_{C^0}$”は “$\leq_C$”より弱い順序となる。さて、このゲームにおける各 player の最適戦略というものを定義しておこう。player2 の各戦略 $y\in Y$ に対する player1 の（弱）最適反応戦略の集合を

$$R_1(y):=\arg\mathrm{Min}f(X,y)=\{x\in X: f(x,y)\in\mathrm{Min}f(X,y)\}$$

$$(\text{resp.}\ \ R_1^w(y):=\arg\mathrm{Min}_w f(X,y)=\{x\in X: f(x,y)\in\mathrm{Min}_w f(X,y)\})$$

とし、player1 の各戦略 $x\in X$ に対する player2 の（弱）最適反応戦略の集合を

$$R_2(x):=\arg\mathrm{Max}f(x,Y)=\{y\in Y: f(x,y)\in\mathrm{Max}f(x,Y)\}$$

$$(\text{resp.}\ \ R_2^w(x):=\arg\mathrm{Max}_w f(x,Y)=\{y\in Y: f(x,y)\in\mathrm{Max}_w f(x,Y)\})$$

とする。これらは各 player の自然な行動原理の表現と考えられる。従って、各（弱）最適反応集合は

$$D_1^{(w)}:=\left\{(x,y)\in X\times Y\mid x\in X, y\in R_2^{(w)}(x)\right\}$$

$$D_2^{(w)} := \left\{(x,y) \in X \times Y \mid y \in Y, x \in R_1^{(w)}(y)\right\}$$

となり、また、

$$\mathrm{m}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}(x) := \left\{y \in Y \mid (x,y) \in \arg\mathrm{Min} f(D_1^{(w)})\right\}$$

$$\mathrm{m}_{\mathrm{in}}^{\mathrm{ax}}(y) := \left\{x \in X \mid (x,y) \in \arg\mathrm{Max} f(D_2^{(w)})\right\}$$

とおくと、player1 のミニマックス戦略は$\mathrm{m}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}(x) \neq \emptyset$ となる $x \in X$であり、player2 のマックスミニ戦略は$\mathrm{m}_{\mathrm{in}}^{\mathrm{ax}}(y) \neq \emptyset$ となる $y \in Y$である。しかし、これらの戦略は最適戦略と考えられるだろうか。最適反応の意味では最適になっているが、[18] で述べられているように、"後悔" という状況が現れて、相手の戦略の選び方によっては最適であるとは判断しがたい。しかしながら、ここではこれらのミニマックス戦略及びマックスミニ戦略を最適戦略と呼ぶことにしよう。そして、各 player の最適戦略集合を

$$\mathrm{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}} := \left\{x \in X \mid \mathrm{m}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}(x) \neq \emptyset\right\}$$

$$\mathrm{M}_{\mathrm{in}}^{\mathrm{ax}} := \{y \in Y \mid \mathrm{m}_{\mathrm{in}}^{\mathrm{ax}}(y) \neq \emptyset\}$$

と表すことにする。また、以下では、弱最適反応集合 D_1^w と D_2^wを取り扱うことにする。例えば、実数値 Payoff の場合と比較すると、

$$\min_{x \in X} \max_{y \in Y} f(x,y) \longleftrightarrow \mathrm{Min} f(D_1^w) \quad (= \ \mathrm{Min} \bigcup_{x \in X} \mathrm{Max}_w f(x, Y)\ )$$

$$\max_{y \in Y} \min_{x \in X} f(x,y) \longleftrightarrow \mathrm{Max} f(D_2^w) \quad (= \ \mathrm{Max} \bigcup_{y \in Y} \mathrm{Min}_w f(X, y)\ )$$

を考えることになる。このような最適戦略では、Introduction で述べた全順序型のゲームの性質については、もはやほとんど成立していないように思われる。ただし、いくつかの興味ある結果がある。まず、各 player の最適戦略の存在性について次のことがわかる。今の場合、つまり戦略空間がコンパクトで、Payoff f が連続である時、

(I) 目的空間 Z が有限次元なら、各 player の最適戦略は存在する (Theorem 4.1 in [16] より)。

(II) 目的空間 Z が有限次元、無限次元に関わらず、domination cone C が次のいずれかの条件を満たしているならば、各 player の最適戦略は存在する。ただし、条件２を満たす凸錐ならば条件１も満たす (Lemma 2.1 in [10] を見よ)。また、目的空間 Zが有限次元ならば、条件１は成立する (Remark 2.1 in [19] を見よ)。

条件 1 — Sterna-Karwat's Condition [19,20]:

For every closed vector subspace L of Z,
$C \cap L$ is a vector subspace whenever $\mathrm{cl}(\ C \cap L\ )$ is a vector subspace.

条件２ — Our Condition [9,10]:

$$(C\backslash\{0\}) + \mathrm{cl}C \subset C. \tag{1}$$

また、両 player が最適戦略をとったとき、"均衡"という状況が起きるだろうか。例えば、

$$\mathrm{Min} f(D_1^w) \cap \mathrm{Max} f(D_2^w) \neq \emptyset$$

ならば

$$f(x_0, y_0) \in \mathrm{Min} f(D_1^w) \cap \mathrm{Max} f(D_2^w) \tag{2}$$

となるような戦略の組 (x_0, y_0) をこのゲームの均衡点と考えても良い。しかし、一般に各 player の最適戦略 $x^* \in \mathrm{M}^{\mathrm{in}}_{\mathrm{ax}}$、$y^* \in \mathrm{M}^{\mathrm{ax}}_{\mathrm{in}}$ に対して上の条件 (2) が成り立つとは限らない。

そこで、次に鞍点との関係に注目してみる。実は、興味深い結果がいくつか成り立っている。まず、次の 3 つのベクトル値鞍点の定義をする。

DEFINITION 1. (See Definition 2.1 in [14])

(a) A point (x_0, y_0) is said to be a C-saddle point of f with respect to $X \times Y$, a C-saddle point for short, if

$$f(x_0, y_0) \in \mathrm{Max} f(x_0, Y) \cap \mathrm{Min} f(X, y_0). \tag{3}$$

(b) A point (x_0, y_0) is said to be a weak C-saddle point of f with respect to $X \times Y$, a weak C-saddle point for short, if

$$f(x_0, y_0) \in \mathrm{Max}_w f(x_0, Y) \cap \mathrm{Min}_w f(X, y_0). \tag{4}$$

(c) A point (x_0, y_0) is said to be a proper C-saddle point of f with respect to $X \times Y$, a proper C-saddle point for short, if the point (x_0, y_0) is a C-saddle point and

$$\begin{aligned} 0 \;\in\; & \mathrm{Max}\,[\mathrm{cl}K\,(f(X, y_0) - C; f(x_0, y_0))] \\ & \cap \mathrm{Min}\,[\mathrm{cl}K\,(f(x_0, Y) + C; f(x_0, y_0))] \end{aligned} \tag{5}$$

where the set $K(A; z)$ denotes the contingent cone of tangents to a subset A of Z at a vector z (e.g., see [21, p.55]), i.e., a vector v in Z belongs to $K(A; z)$ if and only if, for any $U \in \mathcal{B}_Z$ and $\varepsilon > 0$, there exist a scalar $t \in (0, \varepsilon)$ and a vector $w \in v + U$ such that $z + tw \in A$ (thus $z \in \mathrm{cl}A$ necessarily).

For the convenience, we will denote the set of all C-saddle points (resp. weak C-saddle points, proper C-saddle points) by S (resp. S^w, S^p).

この時、このような鞍点をそれぞれ、

(a) 錐鞍点　(b) 弱錐鞍点　(c) 真の錐鞍点

と呼ぶことにする。実際には、定義からすぐわかるように

$$S^p \subset S \subset S^w$$

なる関係が成立していて、$C^0 = C$ならば$S = S^w$であることもわかる。また、

$$S = D_1 \cap D_2,$$

$$S^w = D_1^w \cap D_2^w$$

ということもわかる。これは最適反応集合の共通部分が錐鞍点になっているということで、先ほど (2) 式で考えたゲームの均衡点 (x_0, y_0) は

$$f(x_0, y_0) \in \mathrm{Min} f(D_1^w) \cap \mathrm{Max} f(D_2^w)$$

を満たしているので、弱錐鞍点にもなっている。これらの弱錐鞍点の特徴付けについては [14] を見よ。存在定理もいくつかあり、Payoff fにある種の凸性の条件が満たされていれば十分である。しかし、弱錐鞍点の場合だけはもっと一般に次のようになる。

THEOREM 1. (See Theorem 3.1 in [9]) *Let X and Y be two nonempty compact convex subsets of two locally convex Hausdorff topological vector spaces, respectively, and let the payoff function $f : X \times Y \longrightarrow Z$ be continous. If the weak optimal response strategy sets $R_1^w(y)$ and $R_2^w(x)$ are convex for every $y \in Y$ and $x \in X$, respectively, then the payoff f has at least one weak C-saddle point.*

PROOF. Although this theorem is the same as Theorem 3.1 in [9], for the reader's convenience we give here an outline of the proof. Since the cone C^0 satisfies the condition (1) (条件２), for every $y \in Y$ and $x \in X$, the sets $R_1^w(y)$ and $R_2^w(x)$ are nonempty by Theorem 2.2 in [19]. Also, it is easily seen that the two sets are closed. Moreover, they are convex sets by the assumption. Further, we can prove that the set-valued maps $R_1^w(\cdot)$ and $R_2^w(\cdot)$ are u.s.c., and then based on Browder's coincidence theorem ([2,3]), there exists a point $(x_0, y_0) \in X \times Y$ such that

$$x_0 \in R_1^w(y_0) \quad \text{and} \quad y_0 \in R_2^w(x_0).$$

Therefore $(x_0, y_0) \in D_1^w \cap D_2^w$, and hence $(x_0, y_0) \in S^w$. □

各 player の弱最適反応戦略の集合 $R_1^w(\cdot)$ と $R_2^w(\cdot)$ が凸であるための Payoff f に関する十分条件には次のようなものがある。

(1) $f(\cdot, y)$ is properly quasi C-convex for every $y \in Y$ and
$f(x, \cdot)$ is properly quasi C-convcave for every $x \in X$;

(2) $f(\cdot, y)$ is properly quasi C-convex for every $y \in Y$ and
$f(x, \cdot)$ is C-concave for every $x \in X$;

(3) $f(\cdot, y)$ is C-convex for every $y \in Y$ and
$f(x, \cdot)$ is properly quasi C-convcave for every $x \in X$;

(4) $f(\cdot, y)$ is C-convex for every $y \in Y$ and
$f(x, \cdot)$ is C-concave for every $x \in X$.

さらに、全順序型のゲームの性質 (c) に関連して、次の結果がある。

THEOREM 2. (See Lemma 3.1' in [10]) *Let X and Y be two nonempty compact convex subsets of two locally convex Hausdorff topological vector spaces, respectively. Assume that the payoff function $f : X \times Y \longrightarrow Z$ be continous and the pointed convex cone C satisfies the condition* (1) (条件 2). *If the payoff f has a weak C-saddle point $(x_0, y_0) \in S^w$, there exist some vectors*

$$z_1 \in \mathrm{Min} f(D_1^w) \quad and \quad z_2 \in \mathrm{Max} f(D_2^w)$$

such that

$$z_1 \leq_C f(x_0, y_0) \quad and \quad f(x_0, y_0) \leq_C z_2.$$

□

これは $z_1 \leq_C z_2$を意味し、全順序型のゲームの性質 (c) の式に類似している。つまり、(c) の式を性質 (a) により次のように考える。

$$\max_{y \in Y} \inf_{x \in X} f(x, y) \geq \min_{x \in X} \sup_{y \in Y} f(x, y).$$

しかし、全順序型のゲームの性質 (d) が成り立つとは限らない。ただし、ある $(x_0, y_0) \in S^w$ $(= D_1^w \cap D_2^w)$ に対して、(2) 式が満たされれば、

$$\begin{aligned}
(x_0, y_0) &\in \arg \mathrm{Min} f(D_1^w) \\
&\Longrightarrow \mathrm{m}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}(x_0) \neq \emptyset \\
&\Longrightarrow x_0 \in \mathrm{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}} \\
&\Longrightarrow x_0 \text{はplayer1の最適戦略(ミニマックス戦略)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(x_0, y_0) &\in \arg \mathrm{Max} f(D_2^w) \\
&\Longrightarrow \mathrm{m}_{\mathrm{in}}^{\mathrm{ax}}(y_0) \neq \emptyset \\
&\Longrightarrow y_0 \in \mathrm{M}_{\mathrm{in}}^{\mathrm{ax}} \\
&\Longrightarrow y_0 \text{はplayer2の最適戦略(マックスミニ戦略)}
\end{aligned}$$

となって、x_0、y_0は各 player の最適戦略であり、また均衡戦略ともなる。だが、このような場合は特別であり、ゲームが決着するとは限らない。そこで、次に新しい行動原理について考えてみる。

3 Optimal Security Strategies and Strong Saddle Points

いままで述べてきたように、目的空間Zにはdomination cone C によって半順序の構造が入っている。しかし、必ずしも "交わり (meet)"—greatest lower bound や "結び (join)"—least upper bound が一意に存在するとは限らず、目的空間 Zが "束 (lattice)"になるとは限らない。そこで、この順序による "交わりの集合"—the set of greatest lower bounds と "結びの集合"—the set of least upper bounds を次のように定義しよう。任意のベクトル $x, y \in Z$に対して、

$$x \wedge y := \mathrm{Max}\{z \in Z \mid z \leq_C x \text{ and } z \leq_C y\}$$

を x と yの交わりの集合 (the collection of meets) と呼び、

$$x \vee y := \mathrm{Min}\{z \in Z \mid x \leq_C z \text{ and } y \leq_C z\}$$

を x と yの結びの集合 (the collection of joins) と呼ぶ。特に、次の Lemma で示されるように、目的空間 Zが有限次元 (R^n) の場合、domination cone Cがその次元数と同じ数の一次独立なベクトルから生成される polyhedral cone ならば、$x \wedge y$や $x \vee y$は singleton となる。この時は、目的空間である順序空間 $(Z, \leq_C)$ は "束 (lattice)" となる。

LEMMA 1. *Let $n := \dim Z < \infty$. If the domination cone C is a polyhedral cone generated by n linearly independent vectors, then both the sets $a \wedge b$ and $a \vee b$ are singleton.*

PROOF. We only prove that the collection $a \vee b$ of joins of a and b is a singleton set. First, in order to show the set $a \vee b$ to be nonempty, let

$$C(a, b) := (a + C) \cap (b + C),$$

and note that

$$a \vee b = \mathrm{Min}C(a, b).$$

Since $\mathrm{int}C \neq \emptyset$, there exist a vector $z_0 \in C$ and a convex symmetric neighborhood $U \in \mathcal{B}_Z$ of the origin such that

$$z_0 + U \subset C.$$

Also, the neighborhood U is an absorbing set, i.e., for any $z \in Z$ there exists $t > 0$ such that $z \in tU$, and so there exists $\tilde{t} > 0$ such that $a, b \in \tilde{t}U$. Thus, we have

$$a, b \in \tilde{t}z_0 - C,$$

and hence $C(a, b) \neq \emptyset$. Moreover, it is easy to prove that the cone C is closed and that the set $C(a, b)$ is C-bounded and C-closed (in the sense of [17]), i.e., $C(a, b) \subset \tilde{z} + C$ for some $\tilde{z} \in Z$ and $C(a, b) + \mathrm{cl}C$ is closed. Therefore, from Proposition 4.1 in [17] it follows that the set $a \vee b$ $(= \mathrm{Min}C(a, b))$ is nonempty.

Next, in order to show the set $a \vee b$ to consist of a single element, we assume that the domination cone C is generated by n linearly independent vectors $e_1, \ldots, e_n$. If $a \leq_C b$, $b \leq_C a$ then obviously $a \vee b = \{b\}$, $a \vee b = \{a\}$, respectively. Assume that $a \not\leq_C b$ and $b \not\leq_C a$. We consider any vectors $z_1, z_2 \in a \vee b$. Hence, there are $\alpha_i^1, \beta_i^1 > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ such that

$$\begin{aligned} z_1 &= a + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^1 e_i \\ &= b + \sum_{i=1}^{n} \beta_i^1 e_i, \end{aligned} \tag{6}$$

and there are $\alpha_i^2, \beta_i^2 > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ such that

$$\begin{aligned} z_2 &= a + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 e_i \\ &= b + \sum_{i=1}^{n} \beta_i^2 e_i. \end{aligned} \tag{7}$$

Therefore, we have

$$z_1 - z_2 = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i^1 - \alpha_i^2) e_i = \sum_{i=1}^{n} (\beta_i^1 - \beta_i^2) e_i.$$

Since the vectors $e_1, \ldots, e_n$ are linearly independent,

$$\alpha_i^1 - \alpha_i^2 = \beta_i^1 - \beta_i^2 \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{8}$$

Also, we have

$$a - b = \sum_{i=1}^{n} (\beta_i^1 - \alpha_i^1) e_i = \sum_{i=1}^{n} (\beta_i^2 - \alpha_i^2) e_i.$$

Since $a \not\leq_C b$ and $b \not\leq_C a$, all coefficients $\beta_i^1 - \alpha_i^1$ of the above can not have the same sign, and so we may assume that

$$\begin{aligned} \beta_i^1 &> \alpha_i^1 \quad (i = 1, \ldots, r), \\ \beta_i^1 &\leq \alpha_i^1 \quad (i = r+1, \ldots, n). \end{aligned} \tag{9}$$

By (8) and (9),

$$\begin{aligned} \beta_i^2 &> \alpha_i^2 \quad (i = 1, \ldots, r), \\ \beta_i^2 &\leq \alpha_i^2 \quad (i = r+1, \ldots, n). \end{aligned} \tag{10}$$

From (6) and (9), it follows that

$$a + \sum_{i=r+1}^{n} (\alpha_i^1 - \beta_i^1) e_i = b + \sum_{i=1}^{r} (\beta_i^1 - \alpha_i^1) e_i. \tag{11}$$

Let us set

$$\gamma_i^1 = \begin{cases} \alpha_i^1 - \beta_i^1, & \text{if } i = r+1, \ldots, n \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

and

$$\delta_i^1 = \begin{cases} \beta_i^1 - \alpha_i^1, & \text{if } i = 1, \ldots, r \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Then, the expression (11) becomes

$$a + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^1 e_i = b + \sum_{i=1}^{n} \delta_i^1 e_i.$$

Since

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i^1 e_i, \quad \sum_{i=1}^{n} \delta_i^1 e_i \in C$$

and

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^1 e_i \geq_C \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^1 e_i, \quad \sum_{i=1}^{n} \beta_i^1 e_i \geq_C \sum_{i=1}^{n} \delta_i^1 e_i,$$

we have

$$\alpha_i^1 = \gamma_i^1, \quad \beta_i^1 = \delta_i^1 \quad (i = 1, \ldots, n)$$

because $z_1 \in a \vee b$. Hence,

$$\begin{cases} \alpha_i^1 = 0 & (i = 1, \ldots, r), \\ \beta_i^1 = 0 & (i = r+1, \ldots, n). \end{cases} \tag{12}$$

Similarly,

$$\begin{cases} \alpha_i^2 = 0 & (i = 1, \ldots, r), \\ \beta_i^2 = 0 & (i = r+1, \ldots, n). \end{cases} \tag{13}$$

From (8), (12) and (13), it follows that

$$\alpha_i^1 = \alpha_i^2 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Thus, $z_1 = z_2$, and so $a \vee b$ is a singleton set. □

次に、全順序型では意識されなかった保証水準というものを考えてみる。確かに、ミニマックス戦略とマックスミニ戦略による最適値は最適な保証水準を与えているが、保証水準を与える戦略は最適反応戦略と一致していたために、保証水準を最適にすることは特に意識されなかったと思う。しかし、半順序型の場合では最適反応戦略が保証水準を与えるとは限らないので、異なる様子を呈している。そこで、まず、目的空間Zにおいて、集合Aの最大保証水準 (maximal security level) と最小保証水準 (minimal security level) を次のように定める。

$$\overline{sl}(A) := \mathrm{Min}\,\{z \in Z \mid A \subset z - C\}$$

$$\underline{sl}(A) := \mathrm{Max}\,\{z \in Z \mid A \subset z + C\}$$

明らかに、前と同様に、目的空間Zが有限次元(R^n)の場合、domination cone Cがその次元数と同じ数の一次独立なベクトルから生成されるpolyhedral coneならば、$\overline{sl}(A)$と$\underline{sl}(A)$はsingletonとなり、それぞれAの最大元(の集合)、最小元(の集合)となる(ここでの方法とは異なるが、このような集合の最大元、最小元などを取り扱って、ベクトル値関数のミニマックス問題を考察している文献として[11]がある)。すると、player1の各戦略$x \in X$に対する最大保証水準は$\overline{sl}(f(x,Y))$となり、player2の各戦略$y \in Y$に対する最小保証水準は$\underline{sl}(f(X,y))$となる。そこで、player1の最適保証戦略の集合を

$$OS_1 := \arg\mathrm{Min} \bigcup_{x \in X} \overline{sl}(f(x,Y))$$

とし、player2の最適保証戦略の集合を

$$OS_2 := \arg\mathrm{Max} \bigcup_{y \in Y} \underline{sl}(f(X,y))$$

とすれば、この時、全順序型のゲームの性質(a)に似た関係式が成立する。

THEOREM 3. *Let $n := \dim Z < \infty$. If the domination cone C is a polyhedral cone generated by n linearly independent vectors, then*

$$z_1 \leq_C f(x^*,y^*) \quad \text{and} \quad f(x^*,y^*) \leq_C z_2, \tag{14}$$

for any $x^* \in OS_1, y^* \in OS_2$ and $z_1 \in \underline{sl}(f(X,y^*)), z_2 \in \overline{sl}(f(x^*,Y))$.

PROOF. Obviously, (14) holds for any $x^* \in X$ and $y^* \in Y$. □
これは、各playerが最適保証戦略をとっている限り、そのPayoffの値は保証値(security level)を越えることはないことを示している。

最後に、上の定理の仮定の下で(有限次元でdomination coneが有限生成)、強鞍点の概念を導入しよう。前の章で3つの錐鞍点を考えたが、ゲームを決定するような性質は持たなかった。

DEFINITION 2. *A point (x_0,y_0) is said to be a strong C-saddle point of f with respect to $X \times Y$, a strong C-saddle point for short, if*

$$f(x_0,y_0) \in \overline{sl}(f(x_0,Y)) \cap \underline{sl}(f(X,y_0)) \tag{15}$$

この時、このような鞍点を強鞍点と呼び、強鞍点全体の集合をS^sと表せば、

$$S^s \subset S^p \subset S \subset S^w$$

となっていることがわかる。さらに、全順序型のゲームの性質(c)(d)(f)に類似の次のような結果が成り立つこともわかる。

THEOREM 4. *Let $n := \dim Z < \infty$ and the domination cone C be a polyhedral cone generated by n linearly independent vectors. If the payoff f has a point $(x_0, y_0) \in S^s$, then the following properties hold:*

$$\text{(i)} \qquad x_0 \in OS_1 \text{ and } y_0 \in OS_2,$$

$$\text{(ii)} \quad f(x_0, y_0) \in \operatorname{Min} \bigcup_{x \in X} \overline{sl}(f(x, Y)) \cap \operatorname{Max} \bigcup_{y \in Y} \underline{sl}(f(X, y)).$$

PROOF. We only prove the part (i) of the assertion. Let a point $(x_0, y_0) \in X \times Y$ be a strong C-saddle point of f. We suppose to the contrary that $x_0 \notin OS_1$. Then, for any $z(x_0) \in \overline{sl}(f(x_0, Y))$, there exists $\hat{x} \in X$ such that

$$z(\hat{x}) \leq_C z(x_0) \quad \text{and} \quad z(\hat{x}) \neq z(x_0),$$

for some $z(\hat{x}) \in \overline{sl}(f(\hat{x}, Y))$. Therefore, there exists nonzero $c_1 \in C$ such that

$$f(\hat{x}, y_0) + c_1 = z(x_0). \tag{16}$$

Since $z \leq_C f(\hat{x}, y_0)$ for any $z \in \underline{sl}(f(X, y_0))$, there exists $c_2 \in C$ such that

$$z + c_2 = f(\hat{x}, y_0). \tag{17}$$

From (16) and (17), it follows that

$$z + (c_1 + c_2) = z(x_0). \tag{18}$$

Since both $\underline{sl}(f(X, y_0))$ and $\overline{sl}(f(x_0, Y))$ are singleton by assumption, and $0 \neq c_1 + c_2 \in C$, from (18) it follows that

$$\underline{sl}(f(X, y_0)) \cap \overline{sl}(f(x_0, Y)) = \emptyset,$$

which is a contradiction. Thus we have $x_0 \in OS_1$. Similarly, $y_0 \in OS_2$. □

THEOREM 5. *Let $n := \dim Z < \infty$ and the domination cone C be a polyhedral cone generated by n linearly independent vectors. The set S^s of strong C-saddle points has interchangeability, i.e., the set S^s is of the form $A_0 \times B_0$ where*

$$A_0 \subset X \quad \text{and} \quad B_0 \subset Y.$$

PROOF. Obviously, for any $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in S^s$, the point (x_1, y_2) belongs to S^s. □

Theorem 4 により、強鞍点 $(x_0, y_0) \in S^s$が存在すれば、その点において最適保証水準の意味で均衡するので、x_0は player1 の均衡戦略、y_0は player2 の均衡戦略となり、また各 player の最適保証戦略にもなっている。従って、Payoff fが強鞍点を持てば、この行動原理の下ではゲームは決定されることになる。また、この強鞍点によって、ゲームの値が一意に決まり、Theorem 5 のような性質も持つことになる。

参考文献

[1] D.Blackwell, *An analog of the minimax theorem for vector payoffs*, Pacific J.Math., 6(1956), 1-8.

[2] F.E.Browder, *Coincidence theorems, minimax theorems, and variational inequalities*, Contemp. Math., 26(1984), 67-80.

[3] S.Simons, *Cyclical coincidences of multivalued maps*, J. Math. Soc. Japan, 38(1986), 515-525.

[4] L.S.Shapley, *Equilibrium points in games with vector payoffs*, Naval Research Logistics Quarterly, 6(1959), 57-61.

[5] H.W.Corley, *Games with vector payoffs*, J. Optim. Theory Appl., 47(1985), 491-498.

[6] D.Ghose and U.R.Prasad, *Solution concepts in two-person multicriteria games*, J. Optim. Theory Appl., 63(1989), 167-189.

[7] J.W.Nieuwenhuis, *Some minimax theorems in vector-valued functions*, J. Optim. Theory Appl., 40(1983), 463-475.

[8] T.Tanaka, *Some minimax problems of vector-valued functions*, J. Optim. Theory Appl., 59(1988), 505-524.

[9] T.Tanaka, *Existence theorems for cone saddle points of vector-valued functions in infinite-dimensional spaces*, J. Optim. Theory Appl., 62(1989), 127-138.

[10] T.Tanaka, *Two-types of minimax problems for vector-valued functions*, to appear in J. Optim. Theory Appl.

[11] F.Ferro, *Minimax type theorems for n-valued functions*, Ann. Mat. Pura Appl.(4), 32(1982), 113-130.

[12] F.Ferro, *A minimax theorem for vector-valued functions*, J. Optim. Theory Appl., 60(1989), 19-31.

[13] W.Rödder, *A generalized saddle-point theory: Its application to duality theory for linear vector optimum problems*, European J. Oper. Res., 1(1977), 55-59.

[14] T.Tanaka, *A characterization of cone sadle points of vector-valued functions via scalarization*, preprint, 1988.

[15] P.L.Yu, *Cone convexity, cone extreme points, and nondominated solutions in decision problems with multiobjectives*, J. Optim. Theory Appl., 14(1974), 319-377.

[16] R.Hartley, *On Cone-Efficiency, Cone-Convexity, and Cone-Compactness*, SIAM J. Appl. Math., 34(1978), 211-222.

[17] T.Tanaka, *On cone-extreme points in* R^n, Sci. Rep. Niigata Univ., 23(1987), 13-24.

[18] T.Tanaka, *On equilibrium strategies of multicriteria games* RIMS Kokyuroku, 726(1990), 67-82.

[19] A.S.Karwat, *On existence of cone-maximal points in real topological linear spaces*, Isreal J. Math., 54(1986), 33-41.

[20] A.S.Karwat, *A note on convex cones in topological vector spaces*, Bull. Australian Math. Soc., 35(1987), 97-109.

[21] F.H.Clarke, *Optimization and nonsmooth analysis*, John Wiley, New York, 1983.