数理解析研究所講究録
400巻 1980年 58-69

Z-transforms and Seminormality

広島大 理学部　伊藤 史朗

イデアル transform を拡張した概念である Z-transform を用いて，ネーター環 A の拡大環 B の性質を調べるのがこの講演の目的である。拡大環 B を調べるにあたって，全てを $\mathrm{Ass}_A(B/A)$ の点 $\mathfrak{z}$ での $(A_{\mathfrak{z}})^{\mathfrak{z}}$（又は $(A_{\mathfrak{z}})^{\mathfrak{z}} \cap B_{\mathfrak{z}}$）の性質に帰着させる。ここでは次の3つの問題を取り扱う。

(A) R をネーター環 A の拡大環で $A \subseteq R \subseteq Q(A)$ とする。このとき A が R で seminormal となる条件を $(A_{\mathfrak{z}})^{\mathfrak{z}} \cap R_{\mathfrak{z}}$ $(\mathfrak{z} \in \mathrm{Ass}_A(R/A))$ の性質で記述すること。

(B) R をネーター環 A の拡大環で $A \subseteq R \subseteq Q(A)$ とする。このとき R が A-加群として有限生成となる条件を $(A_{\mathfrak{z}})^{\mathfrak{z}} \cap R_{\mathfrak{z}}$ $(\mathfrak{z} \in \mathrm{Ass}_A(R/A))$ の性質で記述すること。

(C) Aをネーター環でSerreの条件(S_1)を満たすものとする。Aが有限(S_2)-拡大環をもつための条件を$(A_{\mathfrak{z}})^g$ $(\mathfrak{z}\in \mathrm{Spec}(A))$の性質でもって記述すること。

§1. Z-transforms

Aをネーター環，Zを$\mathrm{Spec}(A)$の部分集合で特殊化で安定なものとする。AのZ-transform $T(Z,A)$とは，次のようにして定まる$Q(A)$のA-subalgebraである。

$$T(Z,A)=\{x\in Q(A)\mid V(A:_A x)\subseteq Z\}.$$

又，Aのglobal transform A^gとはAの$\mathrm{Max}(A)$-transformのことである。定義からすぐに分かるように

(1.1) $x\in Q(A)$について，$x\in T(Z,A)\Leftrightarrow x/1\in A_{\mathfrak{z}}$ $\forall \mathfrak{z}\in \mathrm{Spec}(A)-Z$。

さて，$\mathfrak{z}\in Z$であって$\mathfrak{p}\subsetneqq\mathfrak{z}$なる$A$の素イデアル$\mathfrak{p}$については$\mathfrak{p}\notin Z$のとき$\mathfrak{z}$を$Z$のgeneric pointと呼ぶことにする。そうすると次の事実も定義より容易に分かる。

(1.2) $\mathfrak{z}\in Z$がZのgeneric pointで正則元を含んでいれば $T(Z,A)_{\mathfrak{z}}=(A_{\mathfrak{z}})^g$。

次の2つの補題も簡単ではあるが大切な事実である。

(1.3) <u>補題</u>. $A \subseteq B \subseteq Q(A)$ なる拡大環 B について,

$$\mathrm{Ass}_A(B/A) = \{ \mathfrak{z} \in \mathrm{Spec}(A) \mid A_{\mathfrak{z}} \subsetneqq (A_{\mathfrak{z}})^{\mathfrak{z}} \cap B_{\mathfrak{z}} \}。$$

(1.4) <u>補題</u>. 上と同じ条件のもとで

$$\mathrm{Ass}_A(T(Z, A) \cap B / A) = \mathrm{Ass}_A(B/A) \cap Z.$$

一般に $A^{\mathfrak{z}} = A \iff A$ のどの極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対しても $\mathrm{depth}\, A_{\mathfrak{m}} \neq 1$ が成立するので, $\mathfrak{z} \in \mathrm{Ass}_A(B/A)$ であれば $\mathfrak{z}$ は正則元を含みかつ $\mathrm{depth}\, A_{\mathfrak{z}} = 1$ となる。

§2 問題(A).

最初に次のような場合について考えてみよう。即ち, B はネーター環 A の有限拡大環で $A \subseteq B \subseteq Q(A)$ かつ $\mathrm{Ass}_A(B/A) = \{\mathfrak{z}\}$。このとき $\mathfrak{z}$ 上の B の素イデアル全体を $P_1, \cdots, P_r$ とおき, A と B の中間の環の列 $C_0, C_1, \cdots$ を帰納的に次のようにして定める。

$$\begin{array}{ccc} C_0 & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ k(\mathfrak{z}) & \longrightarrow & \prod k(P_i) \end{array}, \qquad \begin{array}{ccc} C_{n+1} & \longrightarrow & C_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ k(\mathfrak{z}) & \longrightarrow & C_n \otimes k(\mathfrak{z}) \end{array} \quad (n = 0, 1, \cdots)$$

は全て pull back 図式。

このとき次の補題が成立する。

(2.1) <u>補題</u>. A, B, C_n $(n=0,1,\cdots)$, $\mathfrak{z}$ は上の通りとする。このとき次の主張が成立する。

(1) C_0 は B で seminormal.

(2) ある n について $A=C_n$ となる.

(3) A が B で seminormal $\Leftrightarrow$ A は $\mathrm{End}_A(\mathfrak{z})\cap B$ で seminormal。

($\mathrm{End}_A(\mathfrak{z})$ は $Q(A)$ の部分環 $\{z\in Q(A) \mid z\mathfrak{z}\subseteq\mathfrak{z}\}$ と同一視する。)

この補題を用いると

<u>定理</u> A. R をネーター環 A の拡大環で $A\subseteq R\subseteq Q(A)$ とする。このとき次の4条件は同値.

(1) A は R で seminormal.

(1') 各 $\mathfrak{z}\in \mathrm{Ass}_A(R/A)$ に対し $A_{\mathfrak{z}}$ は $R_{\mathfrak{z}}$ で seminormal.

(2) 各 $\mathfrak{z}\in \mathrm{Ass}_A(R/A)$ に対し, $A_{\mathfrak{z}}$ は $(A_{\mathfrak{z}})^{\mathfrak{z}}\cap R_{\mathfrak{z}}$ で seminormal.

(3) 各 $\mathfrak{z}\in \mathrm{Ass}_A(R/A)$ に対し, $A_{\mathfrak{z}}$ は $\mathrm{End}_{A_{\mathfrak{z}}}({}_{\mathfrak{z}}A_{\mathfrak{z}})\cap R_{\mathfrak{z}}$ で seminormal.

（証明） R は A の有限拡大としてよい。又 (1) ⇒ (1′) ⇒ (3) は明らか。$\mathrm{Ass}_{A_{\mathfrak{z}}}((A_{\mathfrak{z}})^{g} \cap R_{\mathfrak{z}}/A_{\mathfrak{z}}) = \{\mathfrak{z}A_{\mathfrak{z}}\}$ であるので (2.1) を用いれば (3) ⇒ (2) が示される。(2) ⇒ (1) もし A が R で seminormal でなければ $b \in R - A$ で，b^2 $b^3 \in A$ となる元 b が存在する。$\mathfrak{z}$ を $A :_A b$ の極小素イデアルとすると $\mathfrak{z} \in \mathrm{Ass}_A(R/A)$，$b/1 \notin A_{\mathfrak{z}}$，$b/1 \in (A_{\mathfrak{z}})^{g} \cap R_{\mathfrak{z}}$ である。$b^2/1$，$b^3/1 \in A_{\mathfrak{z}}$ かつ $A_{\mathfrak{z}}$ は $(A_{\mathfrak{z}})^{g} \cap R_{\mathfrak{z}}$ で seminormal であるから $b/1 \in A_{\mathfrak{z}}$．これは矛盾．

<u>系</u> ネーター環 A が seminormal ⟺ 各 $\mathfrak{z} \in \mathrm{Ass}_A(\bar{A}/A)$ に対し A は $\mathrm{End}_A(\mathfrak{z})$ で seminormal.

§3 問題 (B).

<u>定理</u> B. B をネーター環 A の拡大環で $A \subseteq B \subseteq Q(A)$ とする。このとき次の条件は同値である。

(1) B は有限生成 A-加群.

(2) $\mathrm{Ass}_A(B/A)$ は有限集合で 各 $\mathfrak{z} \in \mathrm{Ass}_A(B/A)$ に対し $(A_{\mathfrak{z}})^{g} \cap B_{\mathfrak{z}}$ は $A_{\mathfrak{z}}$-加群として有限生成.

（証明） (1) ⇒ (2) は明らかである。(2) ⇒ (1)：

$\mathrm{Ass}_A(B/A)$ が有限集合であるから，特殊化で安定な $\mathrm{Spec}(A)$ の部分集合の列 $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ で，$\mathrm{Spec}(A)=Z_0\supset Z_1\supset Z_2\supset\cdots$, $\bigcap_n Z_n=\phi$, Z_n-Z_{n+1} は Z_n の generic points の一部からなる，$\mathrm{Ass}_A(B/A)\cap(Z_n-Z_{n+1})$ は空集合又は1点よりなる——ようなものが選べる。n_0 を $\mathrm{Ass}_A(B/A)\cap Z_{n_0}=\phi$ にとれば (1.4) より $T(Z_{n_0},A)\cap B=A$。さて $L=T(Z_{n+1},A)\cap B$ が有限生成 A-加群であることを仮定して $L'=T(Z_n,A)\cap B$ もそうであることを示そう。$L\neq L'$ としてよい。このときは (1.1)(1.2)(1.3) を用いて $\mathrm{Ass}_A(B/A)\cap(Z_n-Z_{n+1})$ は1点（それを $\mathfrak{z}$ としよう）からなる集合であることが分かる。さて，$L_{\mathfrak{z}}=A_{\mathfrak{z}}$，$L'_{\mathfrak{z}}=(A_{\mathfrak{z}})^{\mathfrak{z}}\cap B_{\mathfrak{z}}$ ((1.1) 及び (1.2)) である。従って正則元 $t\in\mathfrak{z}$ を適当にとれば $tL'_{\mathfrak{z}}\subseteq L_{\mathfrak{z}}$。このとき (1.1)(1.2)(1.3) を用いると $tL'\subseteq L$ が示される。よって L' は有限生成 A-加群である。以下帰納法を用いて $T(Z_0,A)\cap B=B$ は有限生成 A-加群。

この定理 B は Nishimura による結果 [5, (2.6.2)] 及び [5, (3.1)] を含んでいる。次の系は次節で用いる。

<u>系</u>　A をネーター整域とする。又 $\Delta=\{\mathfrak{z}\in\mathrm{Spec}(A)\mid \mathrm{ht}\,\mathfrak{z}\geqq 2,\ \mathrm{depth}\,A_{\mathfrak{z}}=1\}$ とおく。このとき $A^{(1)}=$

$\bigcap_{\mathrm{ht}\,\mathfrak{p}=1} A_{\mathfrak{p}}$ が有限生成 A-加群 $\Longleftrightarrow$ Δ は有限集合で各 $\mathfrak{p}\in\Delta$ に対し $(A_{\mathfrak{p}})^{g}$ は有限生成 $A_{\mathfrak{p}}$-加群。

(証明) $Z=\{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}(A) \mid \mathrm{ht}\,\mathfrak{p}\geqq 2\}$ とし，$B=A^{(1)}=T(Z,A)$ とおく。(1.4) より $\mathrm{Ass}_A(B/A)=\mathrm{Ass}_A(T(Z,A)\cap Q(A)/A)=\mathrm{Ass}_A(Q(A)/A)\cap Z=\Delta$. 又 $\mathfrak{p}\in Z$ のとき $(A_{\mathfrak{p}})^{g}\subseteq B_{\mathfrak{p}}$ であるから $(A_{\mathfrak{p}})^{g}\cap B_{\mathfrak{p}}=(A_{\mathfrak{p}})^{g}$. 従って系は定理より従う。

§4. 問題(C).

B がネーター環の有限(S_2)-拡大環であるとは，$A\subseteq B\subseteq Q(A)$，$B$ は A-加群として有限生成かつ Serre の条件(S_2) をみたす。さて，問題(C)に関しては複雑な議論をさけるために整域のみを考えよう。

議論に必要な事柄を列挙しておこう。A はネーター整域とする。

(4.1) (Matijevic) B を A と A^{g} の中間の環とする。このとき任意の $t(\neq 0)\in A$ に対し B/tB は有限生成 A-加群。とくに B はネーター環となる。又，A が局所環であれば，$\dim A\geqq 2$ で B は半局所環となる。

(4.2) $A \subseteq B \subseteq A^g \Rightarrow B^g = A^g$。

(4.3) $A \subseteq B \subset Q(A)$, B は A 上有限 $\Rightarrow$ B^g は A^g 上有限（加群として）。

(4.4) A が半局所環のとき，$t(\neq 0) \in A$ を高さ $\geqq 2$ のどの極大イデアルにも含まれない，高さ1のどの極大イデアルにも含まれるようにとると $A_t \subseteq A^g$。

(4.5) A が半局所環のとき，適当な有限拡大環 B（$A \subseteq B \subseteq A^g$）と積閉集合 S に対し $A^g = S^{-1}B$ であったとする。このとき B の高さ $\geqq 2$ の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対して $\operatorname{depth} B_{\mathfrak{m}} \geqq 2$。

(4.6) R を A の有限拡大環（$A \subseteq R \subseteq Q(A)$），$B = A^g \cap R$ とおくと {R の高さ1の極大イデアル} と {B の高さ1の極大イデアル} とは対応 $N \mapsto N \cap B$ によって1対1対応がつく。さらに N を R の高さ1の極大イデアルとすると $B_{N \cap B} = R_N$。

(4.2)～(4.5) は A^g の定義から容易に導かれる。(4.6) については [4] 又は [6] を参考にせよ。

さて，局所ネーター整域 A が（$\dim A \geqq 2$ かつ）有限 (S_2)-拡大環 R をもつとしよう。$B = A^g \cap R$ とおくと B は半局所環である。

そこで $t(\neq 0) \in B$ を高さ $\geqq 2$ の B のどの極大イデアルにも含まれないが，高さ1の B のすべての極大イデアルにも含まれるようにとる。このとき，§1の最後に述べた注意及び(4.2)(4.4)(4.6)より $A^{\mathfrak{g}} = (B_t)^{\mathfrak{g}} \subseteq (R_t)^{\mathfrak{g}} = R_t$。従って $A^{\mathfrak{g}}$ は B_t 上 finite。よって $A^{\mathfrak{g}}$ は A 上 essentially finite である。

以上の注意より次の定理Cの (1)⇒(2) はほとんど明らかである。

<u>定理</u>C. A をネーター整域，$\Delta = \{ \mathfrak{z} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \mathrm{ht}\,\mathfrak{z} \geqq 2,\ \mathrm{depth}\, A_{\mathfrak{z}} = 1 \}$ とおく。このとき次の条件は同値である。

(1) A は有限 (S_2)-拡大環をもつ。

(2) Δ は有限集合で各 $\mathfrak{z} \in \Delta$ に対し $(A_{\mathfrak{z}})^{\mathfrak{g}}$ は $A_{\mathfrak{z}}$ 上 essentially finite.

(証明) (2)⇒(1): A の有限拡大環 B $(\subseteq Q(A))$ に対し

$\Delta(B) = \{ Q \in \mathrm{Spec}(B) \mid \mathrm{ht}\, Q \geqq 2,\ \mathrm{depth}\, B_Q = 1 \}$

$\Delta^*(B) = \{ Q \in \Delta(B) \mid (B_Q)^{\mathfrak{g}}$ は有限 B_Q-加群でない $\}$

$n(B) = \inf \{ \mathrm{ht}\, Q \cap A \mid Q \in \Delta(B) \}$

$n^*(B) = \sup \{ \mathrm{ht}\, Q \cap A \mid Q \in \Delta^*(B) \}$

とおく。$\Delta(B)$ は必然的に有限集合となる。

Aの適当な有限拡大環Rについて $\Delta^*(R)=\phi$ であればよい。実際そのようなRについては §3の系より $R^{(1)}$ は R（従って A）上有限であって $R^{(1)}$ は (S_2) をみたす。そこで $\Delta^*(A)\neq\phi$ としよう。$\Delta=\Delta(A)$ の有限性より Aの適当な有限拡大環 C をとれば各 $\mathfrak{z}\in\Delta(A)$ に対して $(A_{\mathfrak{z}})^{\mathfrak{z}}$ は $(A_{\mathfrak{z}})^{\mathfrak{z}}\cap C_{\mathfrak{z}}$ の局所化となるように出来る。そこで $Z=\bigcup_{\mathfrak{z}\in\Delta(A)} V(\mathfrak{z})$，$B=T(Z,A)\cap C$ とおく。このとき B は定理の条件 (2) をみたし $n^*(A)\geq n^*(B)$（もし $\Delta^*(B)\neq\phi$ ならば）となることが容易に示される。又，(4.5) を用いることにより $n(B)>n(A)$（もし $\Delta(B)\neq\phi$ ならば）であることが証明出来る。これらの事実を用いて帰納的に Aの有限拡大環の列 B_n $(\subseteq Q(A))$ で，

(a) 各 B_n は定理の条件 (2) をみたし，

(b) もし $\Delta^*(B_i)\neq\phi$ $(i=1,\cdots,n)$ であれば

$$n^*(A)\geq n^*(B_1)\geq\cdots\geq n^*(B_n)\geq n(B_n)>\cdots>n(B_1)>n(A),$$

となるものが構成できる。数列 $n(B_i)$ は上に有界であるので適当な j について $\Delta^*(B_j)=\phi$ でなければならない。

<u>注意</u>　上の定理において Aの整域性は不要である。（[6] を参考にせよ。）

注意　[2] において示されているように ネーター局所環 A で $\operatorname{depth} A = 1$ なるものについて

(1) $A^{\mathfrak{g}}$ が A 上 finite $\Leftrightarrow$ 任意の $\mathfrak{z} \in \operatorname{Ass} \hat{A}$ に対し $\dim \hat{A}/\mathfrak{z} \geqq 2$,

(2) $A^{\mathfrak{g}}$ が A 上 integral $\Leftrightarrow$ 任意の $\mathfrak{z} \in \operatorname{Min} \hat{A}$ に対し $\dim \hat{A}/\mathfrak{z} \geqq 2$

である。これと類似の結果として,

(3) $A^{\mathfrak{g}}$ が A 上 essentially finite $\Leftrightarrow$ $\hat{A}$ の embedded prime ideal $\mathfrak{z}$ について $\dim \hat{A}/\mathfrak{z} \geqq 2$

が成立する。とくに $\hat{A}$ が embedded prime ideals をもたない (即ち (S_1)) ならば $A^{\mathfrak{g}}$ は A 上 essentially finite である。

参考文献

[1] M. Brodmann, Finiteness of ideal transforms, J. of Algebra 63, 162 - 185 (1980)

[2] D. Ferrand - M. Raynaud, Fibres formelles d'un anneaux local noethérien, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 3 (1970), 295 - 311.

[3] J. Matijevic, Maximal ideal transforms of noetherian rings, Proc. Amer. Math. Soc. 54 (1976), 49 - 52.

[4] J. Nishimura, On ideal transforms of noetherian rings I, J. Math. Kyoto Univ., 19 (1979), 41-46

[5] ——, —— II, J. Math. Kyoto Univ., 20 (1980), 149-154.

[6] S. Itoh, Z-transforms and overrings of a noetherian rings, (to appear in Hiroshima Math. J.)