

G -CW複体に対する Wall 型障害類

阪大 理 飯塚 邦彦

CW複体に対する finiteness condition は Wall 型の障害類によって与えられる [4]。同様の定理が G が有限群の場合には G -CW複体に対しても知られている [1]。

本稿では G がコンパクト Lie 群の場合に、 G -CW複体に対する finiteness condition 即ち「有限 G -CW複体に G -dominate された G -CW複体が有限 G -CW複体の G -ホモトピー型をもつ必要十分条件」は何かを考察する。

問題はいくつか分解される。軌道型の個数については §1 で扱う。§2 で Hauschild のアイデア (cf. [3]) による G -空間 $F(Y, X)$ の構成を述べる。 $F(Y, X)$ を用いて胞体の数、次元の有限性の考察は、non-equivariant な場合に帰着させることができる (§3) が、本稿では $F(Y, X)$ の構成を述べることに重点を置き、§3 の定理の証明は省略する。

各次元の胞体の数が有限な G -CW複体を有限型であるとい

うが、次の問題は (G がコンパクト Lie 群のときには) 未解決である; 有限型の G -CW 複体 X に G -dominate された G -CW 複体は有限型の G -CW 複体の G -ホモトピー型をもつか?

以下 G はコンパクト Lie 群とする。

§1 軌道型の個数に対する finiteness condition

軌道型の個数に関して、次の定理が得られた。

定理 1.1 G -CW 複体 X に対して次の (a) と (b) とは同値である:

(a) X は有限個の軌道型をもつ G -CW 複体と G -ホモトピー同値である。

(b) X は有限個の軌道型をもつ G -CW 複体 Y に G -dominate される。

証明. (a) $\Rightarrow$ (b) は明らかである。(b) $\Rightarrow$ (a) を示そう。仮定により有限個の軌道型を持つ G -CW 複体 Y と、 G -写像 $r: Y \rightarrow X$ 及び $j: X \rightarrow Y$ が存在して、 $r \circ j \simeq \text{id}_X$ となる。 Y の軌道型の全体を $\{(H_k)\}_{1 \leq k \leq p}$ とする。ここで $(H_i) \leq (H_j)$ (i.e. H_i は H_j の subconjugate) ならば $i \geq j$ が成り立つように index を決める。また X の軌道型の

全体を $\{(H_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ として,

$$\Lambda_i = \left\{ \alpha \in \Lambda \mid \max \{t \mid (H_\alpha) \leq (H_t)\} = i, \right. \\ \left. (H_\alpha) \notin \{(H_k)\}_{1 \leq k \leq p} \right\}$$

ここに $1 \leq i \leq p$,

とおく。定義から明らかに $\Lambda_i \cap \Lambda_j = \emptyset$ ($i \neq j$) であり,

$\forall \alpha \in \Lambda - \bigcup_{i=1}^p \Lambda_i$ に対し, $(H_\alpha) \in \{(H_k)\}_{1 \leq k \leq p}$ が成り立つ。

さて $\Lambda_m \neq \emptyset$ となる最小 $m \in \mathbb{N}_0$ とする。このとき

$$\bigcup_{\alpha \in \Lambda_{m_0}} GY^{H_\alpha} \subset \bigcup_{i=1}^{m_0} GX^{H_i}$$

が成り立つから、 Γ の制限

$$r_1 : \left(\bigcup_{i=1}^{m_0} GX^{H_i}, \bigcup_{i=1}^{m_0} GX^{H_i} \right) \longrightarrow \left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda_{m_0}} GX^{H_\alpha} \cup \bigcup_{i=1}^{m_0} GX^{H_i}, \bigcup_{i=1}^{m_0} GX^{H_i} \right)$$

は G -dominating map である。このことから、 G -strong deformation retraction

$$\varphi : \bigcup_{\alpha \in \Lambda_{m_0}} GX^{H_\alpha} \cup \bigcup_{i=1}^{m_0} GX^{H_i} \longrightarrow \bigcup_{i=1}^{m_0} GX^{H_i}$$

が存在することがわかる (cf. [5, Proposition 1.3.]). $\gamma \in \phi$ の G -胞体近似写像として、接着空間 X' を

$$X' = \bigcup_{i=1}^{m_0} GX^{H_i} \cup_\gamma X$$

によって定義する。 X' は X と G -ホモトピー同値な G -CW 複体で、 X' の軌道型は $\{(H_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda - \Lambda_{m_0}}$ である。

X' はまた Y に G -dominate されるから、上と同様の操作をくり返す (高々 p 回) ことにより、有限個の軌道型

$\{(H_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda - \bigcup_{i=1}^p \Lambda_m}$ をもち X と G -ホモトピー同値な G -CW

複体を得らる。

(証明終)

§2. $F(Y, X)$ の構成

$p: EG \rightarrow BG$ を普通主 G 束とする。 G -CW複体 X に対し、 $EG \times X$ に G の対角作用を考え、自由 G -空間を EX で表わす。

定理 2.1. EX は G -CW複体の G -ホモトピー型をもつ。

定理の証明は EX が numerable principal G -space (cf. [2]) であることを用いて、まず EX が $G \times G$ -CW複体 E_0X (EX に弱位相を与えたもの) と G -ホモトピー同値であることを示し、次に E_0X の各 $G \times G$ -胞体を G -CW分割することにより、 E_0X が G -CW複体の G -ホモトピー型をもつことをいう。

さて (Y, X) は G -CW対で、 $Y-X$ 上には自由に G が作用しているとする。このとき G 空間対 (EY, EX) と G -ホモトピー同値な相対 G -CW複体 $(F(Y, X), EX)$ で、すべての整数 k ($k \geq 0$) に対して $Y-X$ に含まれる k 次元 G -胞体と、 $F(Y, X)$ に含まれる k 次元 G 胞体とが一対一に対応するものを構成する。

Step 1 まず $Y-X$ に含まれる G -胞体がすべて n 次元であるときを考える。したがって

$$Y = X \cup_{\varphi} (\coprod I^n \times G)$$

(ここに φ は

$$\varphi: \coprod I^n \times G \longrightarrow X$$

なる G -写像) と表わされる。 EG の一点 $*$ を固定して、

$$\psi: \coprod I^n \times G \longrightarrow EX$$

を

$$\psi(x, g) = (g \cdot *, \varphi(x, g)), \quad (x \in \coprod I^n, g \in G)$$

によって定義する。この ψ を用いて $F(Y, X)$ を

$$F(Y, X) = EX \cup_{\psi} (\coprod I^n \times G)$$

と定める。このとき $(F(Y, X), EX)$ と (EY, EX) とが G -ホモトピー同値であることは以下のように証明される。

可換図式

$$\begin{array}{ccc} F(Y, X) & \xrightarrow{i} & EY \\ & \searrow p' \quad \swarrow p & \\ & Y & \end{array}$$

を考える。ここに i は包含写像 ($F(Y, X)$ は自然に EY の G -不変部分空間とみなせる)、 p は射影、 p' は p の制限である。

$p \circ \psi = \varphi$ であるから p' がホモトピー同値写像であることがわかるが、 EY は numerable principal G -space だから i は

G -ホモトピー同値写像である。したがって $\text{id}: EX \longrightarrow EX$ は G -ホモトピー同値写像 $f: EY \longrightarrow F(Y, X)$ に拡張する ([2; Appendix, Lemma 4.2] を参照)。

Step 2 次に帰納法を用いて一般の場合に $F(Y, X)$ を構成する。可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} EX & \subset & EY_0 & \subset & EY_1 & \subset & \cdots \subset EY_k \\ \parallel & & \downarrow f_0 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_k \\ EX & \subset & F(Y_0, X) & \subset & F(Y_1, X) & \subset & \cdots \subset F(Y_k, X) \end{array}$$

で、 $f_0, \dots, f_k$ は G -ホモトピー同値写像であるものができたと仮定する。ただし Y_i は (Y, X) の相対 i 切片 (i.e. $Y_i = X \cup Y_i$) である。いま

$$F(Y_{k+1}, X) = F(Y_k, X) \cup_{f_k} F(Y_{k+1}, Y_k)$$

において、図式

$$\begin{array}{ccccc} EY_k & \xlongequal{\quad} & EY_k & \subset & F(Y_{k+1}, Y_k) \\ \downarrow f_k & & \parallel & & \parallel \\ F(Y_k, X) & \xleftarrow{f_k} & EY_k & \subset & F(Y_{k+1}, Y_k) \end{array}$$

を考えると、 f_k は G -ホモトピー同値写像

$$f': F(Y_{k+1}, Y_k) \longrightarrow F(Y_{k+1}, X)$$

に拡張することがわかる。

一方、Step 1 で見たように、 $\text{id}: EY_k \longrightarrow EY_k$ は G -ホモ

トピー同値写像 $f: EY_{k+1} \longrightarrow F(Y_{k+1}, Y_k)$ に拡張する。

$f_{k+1} = f' \cdot f$ とおくことにより帰納法は完結する。

ここで $F(Y, X) = \varinjlim_k F(Y_k, X)$ と定義すれば、これが求めるものであることは容易にみられる。

§3 主定理

X を有限型の G -CW 複体、 Y を有限 G -CW 複体とし、

$r: Y \longrightarrow X$ を G -dominating map とする。したがって G -写像 $j: X \longrightarrow Y$ で $r \circ j$ が id_X と G -ホモトピックになるものが存在する。

さて X は (H) 型の G -胞体をもつとする。 $NH \in H$ の G における正規化群とし、 WH で商群 NH/H を表わすことにする。

Y^H は WH -空間である。いま $X_1^H, X_2^H, \dots, X_i^H \in X^H$ の WH -連結成分とする (Y に G -dominate されることからこれらは有限個である)。 $X^{>H} = \bigcup_{K \neq H} X^K$ (K は G の開部分群)、 $X_k^{>H} = X_k^H \cap X^{>H}$ ($1 \leq k \leq i$) とおくと、 $(X_k^H, X_k^{>H})$ は WH -CW 対である。ここで $X_k^H - X_k^{>H}$ に含まれる WH -胞体はすべて自由な WH -作用をもち、これらは同じ次元の X の (H) 型の G -胞体と一対一に対応していることに注意しておく。各 k ($1 \leq k \leq i$) に対し、 $j(X_k^H)$ は Y^H のある WH -連結成分に含まれる。これを Y_k^H とする。このとき

$$\Gamma|Y_k^H : (Y_k^H, Y_k^{>H}) \longrightarrow (X_k^H, X_k^{>H})$$

は、WH-dominating map である。

$EX, F(Y, X)$ 等の軌道空間を $BX, B(Y, X)$ 等と表わすことにする。このとき次の補題が成り立つ。

補題 3.1 WH-CW対としての $(Y_k^H, Y_k^{>H})$ の次元が n であるならば、 $(BX_k^H, BX_k^{>H})$ は n 次元の有限CW対に dominate される。

証明 下の図式からわかるように、相対CW複体 $(B(X_k^H, X_k^{>H}), BX_k^{>H})$ は有限相対CW複体 $(B(Y_k^H, Y_k^{>H}), BY_k^{>H})$ に dominate される。

$$\begin{array}{ccc}
 (EY_k^H, EY_k^{>H}) & \xrightarrow[\text{WH-dominating map}]{\text{id} \times \Gamma|Y_k^{>H}} & (EX_k^H, EX_k^{>H}) \\
 \downarrow \cong_{\text{WH}} & & \downarrow \cong_{\text{WH}} \\
 (F(Y_k^H, Y_k^{>H}), EY_k^{>H}) & \xrightarrow{\text{WH-dominating map}} & (F(X_k^H, X_k^{>H}), EX_k^{>H}) \\
 \downarrow \text{射影} & & \downarrow \text{射影} \\
 (B(Y_k^H, Y_k^{>H}), BY_k^{>H}) & \xrightarrow{\text{dominating map}} & (B(X_k^H, X_k^{>H}), BX_k^{>H})
 \end{array}$$

ところが §2 で述べたことより、 $(B(X_k^H, X_k^{>H}), BX_k^{>H})$ と $(BX_k^H, BX_k^{>H})$ はホモトピー同値であり、また $(B(Y_k^H, Y_k^{>H}), BY_k^{>H})$ は n 次元の有限CW対とホモトピー同値であるから補題の主張が成り立つ。 (証明終)

定義 本節の最初の仮定のもとに、 X の (H) 型の Wall 型障害類 $W_{(H)}(X)$ を

$$\begin{aligned} W_{(H)}(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} W(BX_k^H, BX_k^{>H}) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{K}_0(\mathbb{Z}\pi_1(BX_k^H)) \end{aligned}$$

と定義する。ここで $W(BX_k^H, BX_k^{>H})$ は位相空間対 $(BX_k^H, BX_k^{>H})$ に対する Wall 型障害類を表わす。

定理 3.2 $W_{(H)}(X)$ は直和因子の置換を除いて、 X の G -ホモトピー型のみによって定まる。

定理 3.3 H を G の閉部分群とし、 Y に含まれる (H) 型の G -胞体の最高次元を n とする。このとき次の (i) および (ii) が成り立つ。

(i) $W_{(H)}(X) = 0$ であるならば、 X は有限型の G -CW 複体 Z で、次の (a), (b), (c) を満足するものと G -ホモトピー同値である。

(a) Z に含まれる (H) 型の G -胞体の個数は有限。

(b) Z に含まれる (H) 型の G -胞体の最高次元は $\max(3, n)$ 。

(c) J を H と共役でない G の閉部分群とすると、 X に含まれる (J) 型の m 次元 G -胞体の個数と、 Z に含まれる (J) 型の m 次元 G -胞体の個数は任意の m に対して等しい。

(ii) X が有限型の G -CW複体 Z' で、 Z' に含まれる (H) 型の G -胞体の個数が有限なものと G -ホモトピー同値であれば、
 $W_{(H)}(X) = 0$ である。

定理の(i)は $W(BX_{\mathbb{R}}^H, BX_{\mathbb{R}}^{>H}) = 0$ より、 $(BX_{\mathbb{R}}^H, BX_{\mathbb{R}}^{>H})$ が次元が $\max(3, n)$ の有限CW対とホモトピー同値になることから証明される。(ii)は仮定より $W(BX_{\mathbb{R}}^H, BX_{\mathbb{R}}^{>H}) = 0$ となるからである。

最後に、 G -CW複体の次元の有限性に関しては次の定理が得られる。

定理 3.4 G -CW複体 X が、有限個の軌道型をもつ n 次元 G -CW複体と G -dominate されるならば、 X は次元が $\max(3, n)$ の G -CW複体と G -ホモトピー同値である。

定理 1.1 より、 X の軌道型も有限個であるとしてよく、その各軌道型 (H) に対し、 $(BX^H, BX^{>H})$ が $\max(3, n)$ 次元のCW対とホモトピー同値になることから、定理 3.4 が得られる。

参考文献

- [1] Baglivo, J. A. : An equivariant Wall obstruction theory, Trans. Amer. Math. Soc., 256 (1979), pp. 305 - 324.
- [2] Boardman, J. M., and R. M. Vogt : Homotopy invariant algebraic structure on topological spaces, Lecture Notes in Math., 347 (1973), Berlin - Heidelberg - New York : Springer.
- [3] Hauschild, H. : Äquivariante Whitehead torsion, Manuscripta Math., 26 (1978), pp. 63 - 82.
- [4] Wall, C. T. C. : Finiteness conditions for CW complexes, Ann. of Math., 81 (1965), pp. 55 - 69.
- [5] Illman, S. : Whitehead torsion and group actions, Ann. Acad. Sci. Fenn., A. I. 588 (1974).