

DISCRETE APPROXIMATION とその周辺

東京工業大学 理学部

木村俊一

0. はじめに

本稿では、GI/G/1待ち行列系での客の実待ち時間分布を数値的に求めるために一つの手法：Discrete Approximation（記語はまだ定まっていないが、以下では、離散近似と読むことにする。）を取り上げる。離散近似が、到着時間間隔及びサービス時間の分布関数を格子分布で近似したときのLindleyの積分方程式の別な表現に相当することを示し、著者の考案による数値解法：Sequential PL Approximationとの関連について考察する。

1. 準備

1-1. まず、以下で必要となる幾つかの記号と仮定を導入する。

t_n ：第n番目の客の到着時刻， $t_0 \equiv 0$.

$U_n = t_{n+1} - t_n$: i.i.d.r.v. with a d.f. $A(t) = P\{U_n \leq t\}$

v_n : 第 n 番目の客のサービス時間

i.i.d.r.v. with a d.f. $B(t) = P\{v_n \leq t\}$

<仮定1> $\{U_n\}$ と $\{v_n\}$ は互いに独立。

<仮定2> $A(0) = 0, B(0) = 0$

<仮定3> $A(\cdot), B(\cdot)$ は可算個の第一種不連続点を含んでいても構わないが、不連続点は、（以下で定義する基本単位） τ の整数倍の点に限る。

$\zeta_n = v_n - U_n$: i.i.d.r.v. with a d.f. $K(t) = P\{\zeta_n \leq t\}$

$\{\zeta_n\}$ の独立性は <仮定1> より従う。また、分布 $K(\cdot)$ は

$$K(t) = \int_0^\infty \{1 - A(x-t)\} dB(x) \quad (1)$$

$$\text{又は, } \quad = \int_0^\infty B(t+x) dA(x) \quad (1')$$

と表わすことができる。（以下、(1),(1')によって導かれる式には、夫々に対応して式番号にダッシュを付けて区別することにする。）

w_n : 第 n 番目の客の待ち時間, $w_0 = 0$.

$$W^{(n)}(t) = P\{w_n \leq t\}, \quad W(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} W^{(n)}(t)$$

1-2. 簡単な考察から、以下の基本的な役割を果たす $\{w_n\}$ に関する漸化式：

$$w_{n+1} = \max(w_n + \zeta_n, 0), \quad n \geq 0, \quad (2)$$

が導かれ。この(2)によって生成される系列 $\{w_n, n \geq 0\}$ は、

Lindley 過程と呼ばれる。Spitzer[7]は、(2)を直接用いて、母関数：

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_0^{\infty} e^{-st} dw^{(n)}(t) \\ &= \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} P \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \zeta_k \leq 0 \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \int_0^{\infty} e^{-st} dK^{*n}(t) \right], \end{aligned} \quad (3)$$

for $|z| < 1$, $\operatorname{Re} s > 0$.

を導いた。Lindley[6]は、 $\{w^{(n)}(\cdot)\}$ が Wiener-Hopf 型の積分方程式

$$w^{(n+1)}(t) = \begin{cases} \int_{-\infty}^t w^{(n)}(t-u) dK(u), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (4)$$

を満たすことを示した。(3), (4)共に、実際に数値を得るのに適した形とは言へ難い。定常分布（存在するとして）に対しても(3), (4)は大き。

$$\int_0^{\infty} e^{-st} dw(t) = \exp \left[- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^{\infty} (1 - e^{-st}) dK^{*n}(t) \right], \quad (5)$$

for $\operatorname{Re} s > 0$,

$$w(t) = \begin{cases} \int_{-\infty}^t w(t-u) dK(u), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (6)$$

と表われされ、これらもそれ程簡単に解けそうになことがわかる。

1-3. Kleinrock [5] は彼のテキストの中で、到着時間間隔とサービス時間が、基本となる時間単位 $T > 0$ の整数倍に限られる場合を取り、これを離散近似と呼んでいる。すなわち、離散確率分布

$$a(k) = P\{U_n = kT\}, \quad b(k) = P\{U_n = kT\}, \quad k=0,1,\dots,$$

によって、系の確率的構造を決定しようというわけである。

しかし、彼自身も

... Just how one goes about choosing this approximation is as yet basically unstudied and the only recommendation we make at this point is that if one wishes to represent a continuous distribution with a finite set of discontinuities then one should use this approximation to match as many of the moments of the original distribution as possible, working from the first moment and proceeding upwards.

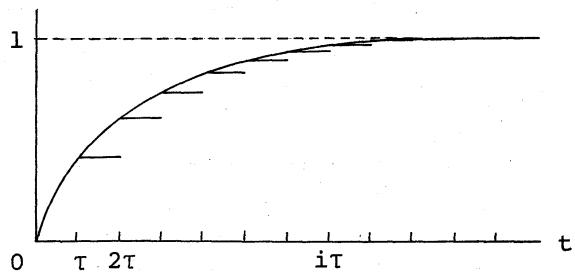
(from [5, p. 51])

と述べて、どうにか近似と呼ぶには元の系との関係、といふわけ $\{a(k)\}, \{b(k)\}$ と $A(\cdot), B(\cdot)$ との関係が明らかにされていない。次節では、Lindley の積分方程式 (4) から、この点に対する一つの解を与える。

2. 离散近似

分布 $A(\cdot)$ 及び $B(\cdot)$ を共に下図 1 に示すような等しい格子幅 $\tau (>0)$ を持つ格子分布 (lattice distribution) で近似する。

図 1.



すなはち、 $i\tau \leq t < (i+1)\tau$ に対して

$$\begin{aligned} A(t) &= A_i \triangleq A(i\tau) \\ &\quad i = 0, 1, \dots \\ B(t) &= B_i \triangleq B(i\tau) \end{aligned}$$

という近似を行なう。く後述 Σ より明らかに、 $A_0 = B_0 = 0$ 。

このとき、(1) 又は (1') より、 $i\tau \leq t < (i+1)\tau$ に対して

$$K(t) = \text{const.} \triangleq K_i \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$= 1 - \sum_{j=0}^{\infty} (B_{j+1} - B_j) A_{j-i} \quad (7)$$

又は、

$$= \sum_{j=0}^{\infty} (A_{j+1} - A_j) B_{i+j+1} \quad (7')$$

と表わせらる。従つて、 $K(\cdot)$ もまた同じ格子幅 τ を持つ格子分布にならる。 $W^{(0)}(t) = U(t)$ (単位階段関数) より、 $W^{(1)}(t) = K(t)$ より、 w_i の分布もまた格子分布となる。以下、数学的帰納法により、一般の n に対しても w_n の分布が格子分布に

なることが容易に示せる。すなはち、 $i\tau \leq t < (i+1)\tau$ に対して、

$$W^{(n)}(t) = W_i^{(n)} = \text{const.}$$

と表わせるものとする。(4)より、やはり $i\tau \leq t < (i+1)\tau$ に対して
 $\tau, (i=0, 1, \dots)$

$$\begin{aligned} W^{(n+1)}(t) &= \int_{-\infty}^t W^{(n)}(t-u) dK(u) \\ &= \sum_{k=-\infty}^i W^{(n)}(t-k\tau)(K_k - K_{k-1}) \\ &= \sum_{k=-\infty}^i W_i^{(n)}(K_k - K_{k-1}) = \text{const.} \end{aligned}$$

といふ。確かに全ての $n \geq 0$ に対して、 $W^{(n)}$ は格子幅 τ の格子
 令布になる。まとめると、

$$W_i^{(n+1)} = \sum_{j=-\infty}^i W_{i-j}^{(n)}(K_j - K_{j-1}), \quad (8)$$

又は、

$$W_i^{(n+1)} = \sum_{j=0}^{\infty} W_j^{(n)}(K_{i-j} - K_{i-j-1}), \quad (9)$$

以下では、(8) 又は (9) も、Kleinrock [5] も与えて離散近似と等
 価であることを示そう。まず、

$$\begin{cases} p_n(i) = W_i^{(n)} - W_{i-1}^{(n)}, & i \geq 1 \\ p_n(0) = W_0^{(n)}, \\ c(i) = K_i - K_{i-1}, & i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

と定義する。また、離散たてかけ \mathcal{H} (discrete convolution) を、(4)
 意の二つの離散確率分布 $\{f(i)\}, \{g(i)\}$ に対して、

$$f(i) * g(i) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f(i-j) g(j) = \sum_{j=0}^{+\infty} f(j) g(i-j)$$

で定義する。特に、 $\{f(i)\}, \{g(i)\}$ の内いずれか一方、例えば、 $\{f(i)\}$ が、非負整数上でしか定義されていないときは、

$$f(i) * g(i) = \sum_{j=-\infty}^i f(i-j) g(j) = \sum_{j=0}^{\infty} f(j) g(i-j)$$

で与えられる。 $i \geq 1$ に対して、(8) と、

$$\begin{aligned} p_{n+1}(i) &= \sum_{j=-\infty}^i w_{i-j}^{(n)} (K_j - K_{j-1}) - \sum_{j=-\infty}^{i-1} w_{i-j-1}^{(n)} (K_j - K_{j-1}) \\ &= \sum_{j=-\infty}^{i-1} p_n(i-j) c(j) + w_0^{(n)} c(i) \\ &= \sum_{j=-\infty}^i p_n(i-j) c(j) \\ &= p_n(i) * c(i), \end{aligned}$$

$i=0$ に対しては、

$$\begin{aligned} p_{n+1}(0) &= \sum_{j=-\infty}^0 w_{-j}^{(n)} c(j) \\ &= \sum_{j=-\infty}^0 \left(\sum_{k=j}^0 p_n(k-j) \right) c(j) \\ &= \sum_{k=-\infty}^0 \sum_{j=-\infty}^k p_n(k-j) c(j) \\ &= \sum_{k=-\infty}^0 p_n(k) * c(k) \end{aligned}$$

と書き表わせる。結局、 $i \geq 0$ に対して

$$p_{n+1}(i) = \pi(p_n(i) * c(i)) \quad (10)$$

ここで、 $\pi(\cdot)$ は任意の数列 $\{x(k)\}$ に対して

$$\pi(x(k)) = \begin{cases} x(k), & k \geq 1 \\ \sum_{j=-\infty}^0 x(j), & k=0 \\ 0, & k \leq -1, \end{cases} \quad (11)$$

で定義される。また、 $\{c(i)\}$ については、(7) すな

$$\begin{aligned} c(i) &= \sum_{j=0}^{\infty} (B_{j+1} - B_j)(A_{j-i+1} - A_{j-i}) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} (B_j - B_{j-1})(A_{j-i} - A_{j-i-1}) \end{aligned}$$

と表わせらる。ここで

$$\begin{cases} a(j) = A_j - A_{j-1}, & j \geq 1, \\ a(0) = 0, & \end{cases} \quad \begin{cases} b(j) = B_j - B_{j-1}, & j \geq 1 \\ b(0) = 0, & \end{cases} \quad (12)$$

とおくと、

$$\begin{aligned} c(i) &= \sum_{j=0}^{\infty} b(j)a(j-i) \\ &= a(-i) * b(i) \end{aligned} \quad (13)$$

とする。(10), (13) は、確かに Kleinrock や「手元に離散近似と一致し、(12) や「元の系との関係、すなわち、格子分布による近似に他ならないことを示している。

Remark. 関係式 (8) や (10) 及び (13) が等価であることを示しておきたい。

数値計算を行なう上で (8) の方が優っている。何故なら、(10) では、 $p_{n+1}(0)$ を計算する際に、 $k \leq 0$ に対する $p_n(k) * c(k)$ の

値を計算する必要が生じるのでに対し、(8)あるいは(9)では、 $w_{\text{R}}^{(n)}$ の方が非負の値だけに着目していればよいからである。夫々の式で現われる無限級数を原点に関して対称に打ち切った場合には、(8)ではたたみこむ項数が(10)に比べて約半分ですむため、直接たたみ込みを計算するときには(cf. [1, 2])、その手間数は約 $\frac{1}{4}$ になる。

関係式(12)は、離散近似にとって重大な性質、ある意味では致命的な欠陥を示唆している。よく知られていうように、 $A(\cdot)$ 又は $B(\cdot)$ の格子分布で与えられるとき、定常分布 $w(\cdot)$ の存在は一般に保証されない。分布 $w^{(n)}(\cdot)$ が実際に収束しない場合、その顕著な挙動は、 n がある正数 N を越えた点から振動を開始することである。これは、 $\{w_i^{(n)}\}$ から $\{w_i^{(n+1)}\}$ を計算する関係式(8)を、離散確率分布の空間上での写像と考えた場合、それが縮少写像にはなっていないことに起因している。

以上より、少なくとも離散近似の一つの解釈としての(12)による離散化は、自然ではあるが、離散近似が数値的に常に安定であるためには不適当であることがわかる。しかし実際には、振動を開始する N の値が十分大きいために、振動を開始する以前に、適当に与えた収束判定条件を満たしてしまう場合が多い。筆者が行なった $E_R/E_\ell/1, E_R/H_\ell/1, H_R/E_\ell/1$ 系に対する

数値実験では、ルガ小エイ値での振動は全く見られなかった。恐らく、病的な例は別として、Erlang 分布や超指数分布を(12)で離散化した^①素直な分布では、実際上必要な精度の幅での振動は見出し難いのではないかと思われる。しかし、いずれにしても、分布 $A(\cdot), B(\cdot)$ から $a(\cdot), b(\cdot)$ への離散化に関して、

① 数値的に安定な離散化の方法

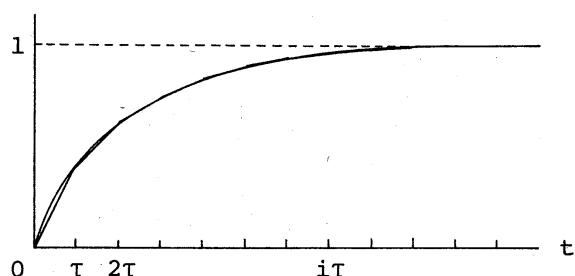
② Kleinrock の意味で、元の分布の情報を失わない離散化の方法

を検討する必要がある。

3. Sequential PL Approximation

筆者は、格子分布近似して Lindley の積分方程式が、いかにも離散近似に相当することに着目して、区分的線形近似 (Piecewise Linear (PL) approximation) による Lindley の積分方程式の新しい数値解法を提案した[4]。すなはち、分布 $A(\cdot), B(\cdot)$ を共に下図に示すような等しい区間幅 $\tau (> 0)$ の連続な区分的線形関数で近似する。

図2.



すなはち、 $iT \leq t < (i+1)T$ に対して、

$$A(t) = \frac{1}{T} (A_{i+1} - A_i)(t - iT) + A_i \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

$$B(t) = \frac{1}{T} (B_{i+1} - B_i)(t - iT) + B_i$$

という近似を行なう。ここで、以下の議論の見通しを良くするために、仮定3の代わりに次のことを仮定する。

〈仮定3'〉 $A(\cdot), B(\cdot)$ は共に二回連続的微分可能

Remark. この仮定3'は、 $A(\cdot), B(\cdot)$ の内いずれか一方が格子分布である場合を別に考察することで、結局、仮定3にまで帰ることができる。

このとき、(1) 又は(1')より、 $iT \leq t < (i+1)T$ に対して、

$$K(t) = K_i + M_i(t - iT) + R_i(t - iT)^2, \quad i = 0, \pm 1, \dots \quad (14)$$

と表わせる。ここで、

$$K_i = 1 - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} (B_{j+1} - B_j)(A_{j-i+1} + A_{j-i}) \quad (15)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} (A_{j+1} - A_j)(B_{i+j+1} + B_{i+j}) \quad (15')$$

$$M_i = \frac{1}{T} \sum_{j=0}^{\infty} (B_{j+1} - B_j)(A_{j-i+1} - A_{j-i}) \quad (16)$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{j=0}^{\infty} (A_{j+1} - A_j)(B_{i+j+1} - B_{i+j}) \quad (16')$$

$$R_i = -\frac{1}{2T^2} \sum_{j=0}^{\infty} (B_{j+1} - B_j)(A_{j-i+1} - 2A_{j-i} + A_{j-i-1}) \quad (17)$$

$$= \frac{1}{2T^2} \sum_{j=0}^{\infty} (A_{j+1} - A_j)(B_{i+j+2} - 2B_{i+j+1} + B_{i+j}) \quad (17')$$

と表わせらる。(14)の第3項は、後走3'の下では $R_i < +\infty$ となるから、てゞ十令小さいときには他の2項に比べて無視でモる。

$$\text{i.e., } K(t) \approx K_i + M_i(t-iT) \quad \text{for } iT \leq t < (i+1)T \quad (18)$$

となり、 $A(\cdot), B(\cdot)$ も同様に $K(\cdot)$ もまた区令的線形関数で近似でモる。 $A(\cdot), B(\cdot)$ も連続ゆえ $K(\cdot)$ もまた連続でなければならぬが、(18)は R_i を無視したために連続性が損失してしまう。

従つて、 $K(\cdot)$ の連続性を保つために、 $\{K_i\}$ あるいは $\{M_i\}$ のいずれかを補正する必要が生ずる。 $K(\cdot)$ が連続であるためには、

$$M_i = \frac{1}{T} (K_{i+1} - K_i) \quad (19)$$

ある。まは、

$$K_i = T \sum_{j=-\infty}^{i-1} M_j \quad (20)$$

が成立する必要がある。このとき、今布の『高士』に相当する $\{K_i\}$ を基準にとるか、『眞王』に相当する $\{M_i\}$ を基準にとるかで次の2通りの補正方法が考えられる。

① $\{K_i\}$ を基準とする場合 … (19) まリ $\{M_i\}$ は

$$\tilde{M}_i = \frac{1}{2T} \sum_{j=0}^{\infty} (B_{j+1} - B_j)(A_{j-i+1} - A_{j-i-1}) \quad (21)$$

$$= \frac{1}{2T} \sum_{j=0}^{\infty} (A_{j+1} - A_j)(B_{i+j+2} - B_{i+j}) \quad (21')$$

と補正される。

② $\{M_i\}$ を基準とする場合 … (20) 及び $\{K_i\}$ は

$$\tilde{K}_i = \sum_{j=0}^{\infty} (B_{j+1} - B_j)(1 - A_{j-i+1}) \quad (22)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} (A_{j+1} - A_j) B_{j+i} \quad (22')$$

と補正される。

前節と同様に、分布 $K(\cdot)$ を離散化した確率密度関数を

$$C^*(i) = K_i - K_{i-1} \quad i = 0, \pm 1, \dots$$

$$\tilde{C}^*(i) = \tilde{K}_i - \tilde{K}_{i-1}$$

と定義すると、(15), (22) より

$$\begin{aligned} C^*(i) &= \frac{1}{2} \{ a(-i+1) * b(i-1) + a(-i) * b(i) \} \\ &= \frac{1}{2} \{ c(i-1) + c(i) \}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\tilde{C}^*(i) = a(-i) * b(i) = C(i) \quad (24)$$

となる。ここで、 $a(\cdot), b(\cdot)$ 及び $c(\cdot)$ は、夫々、(12) 及び (13) によって定義される。(24) が離散近似の場合と一致することに注意しよう。

$K(\cdot)$ に対する上述の区令的線形近似を $W^{(n)}(\cdot)$ に対しても同様に適用する。 $W^{(0)}(t) = U(t)$ より、 $W^{(1)}(t) = K(t)$ も (よ)り、 $n=1$ のとき、 $W^{(n)}(\cdot)$ は連続な区令的線形関数で近似できる。 $n \geq 2$, $iT \leq t < (i+1)T$ に対して、

$$W_i^{(n)}(t) = W_i^{(n)} + m_i^{(n)}(t - iT) \quad (25)$$

と表わせらるるものとする。(4)より、やはり $iT \leq t < (i+1)T$ に付く

$$W_i^{(n+1)}(t) = W_i^{(n+1)} + m_i^{(n+1)}(t - iT) + r_i^{(n+1)}(t - iT)^2$$

と書き表わせらる。二つで、

$$W_i^{(n+1)} = T \sum_{j=0}^{\infty} M_{i-j-1} \left(\frac{1}{2} m_j^{(n)} T + W_j^{(n)} \right) \quad (26)$$

$$m_i^{(n+1)} = \sum_{j=0}^{\infty} (M_{i-j} - M_{i-j-1}) W_j^{(n)} \quad (27)$$

$$r_i^{(n+1)} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} (M_{i-j} - M_{i-j-1}) m_j^{(n)} \quad (28)$$

従つて、 T が十分小さいときには、 $iT \leq t < (i+1)T$ において

$$W_i^{(n+1)}(t) \approx W_i^{(n+1)} + m_i^{(n+1)}(t - iT)$$

なる近似的線形関数で近似でまる。以下、帰納的に全ての自然数 n に対して (25) が成立する。 $K(\cdot)$ を同様な 2 次の項を除くことによって生ずる線形化誤差を連続条件：

$$m_i^{(n)} = \frac{1}{T} (W_{i+1}^{(n)} - W_i^{(n)}) \quad (29)$$

又は、

$$W_i^{(n)} = T \sum_{j=-\infty}^{i-1} m_j \quad (30)$$

を用いて補正する。

① $\{W_i^{(n)}\}$ を基準とする場合 … (29) より $\{m_i^{(n)}\}$ は

$$\tilde{m}_i^{(n)} = \frac{1}{T} (W_{i+1}^{(n)} - W_i^{(n)})$$

と補正され、これを(26)に代入すると次式を得る。

$$\begin{aligned} w_i^{(n+1)} &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} (K_{i-j} - K_{i-j-1})(w_{j+1}^{(n)} + w_j^{(n)}) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ (K_i - K_{i-1})w_0^{(n)} + \sum_{j=1}^{\infty} (K_{i-j+1} - K_{i-j-1})w_j^{(n)} \right\} \quad (31) \end{aligned}$$

② $\{m_i^{(n)}\}$ を基準とする場合 … (30) より $\{w_i^{(n)}\}$ は

$$\tilde{w}_i^{(n)} = T \sum_{j=-\infty}^{i-1} m_j^{(n)}$$

と補正される。従って、(27) より、

$$\tilde{w}_i^{(n+1)} = \sum_{j=0}^{\infty} (K_{i-j} - K_{i-j-1}) \tilde{w}_j^{(n)} \quad (32)$$

を得る。(32) は離散近似によると(9) と一致することに注意しよう。

以上より、Sequential PL Approximation を実行するにあたっては、 $K(\cdot)$ 及び $w^{(n)}(\cdot)$ の線形化誤差の補正法の組み合わせにより、次の4種の変形が存在することわかる。

(i) $\{K_i\}, \{w_i^{(n)}\}$ を用いる方法, i.e., (15), (31)

(ii) $\{\tilde{K}_i\}, \{w_i^{(n)}\}$ " " i.e., (22), (31)

(iii) $\{K_i\}, \{\tilde{w}_i^{(n)}\}$ " " i.e., (15), (32)

(iv) $\{\tilde{K}_i\}, \{\tilde{w}_i^{(n)}\}$ " " i.e., (22), (32)

これら4つの近似法と離散近似との関係をより明確にするために、 $w^{(n)}(\cdot)$ を離散化して確率密度関数:

$$\begin{cases} p_n^*(i) = w_i^{(n)} - w_{i-1}^{(n)}, & i \geq 1 \\ p_n^*(0) = w_0^{(n)} \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{p}_n^*(i) = \tilde{w}_i^{(n)} - \tilde{w}_{i-1}^{(n)}, & i \geq 1 \\ \tilde{p}_n^*(0) = \tilde{w}_0^{(n)} \end{cases}$$

について調べてみよう。 $(31), (32)$ より、前節と同様にして、

$$p_{n+1}^*(i) = \frac{1}{2} \left[\pi(p_n^*(i+1) * c^*(i+1)) + \pi(p_n^*(i) * c^*(i)) - \{c^*(i+1) - c^*(i)\} p_n^*(0) \right], \quad (33)$$

$$\tilde{p}_{n+1}^*(i) = \pi(\tilde{p}_n^*(i) * c^*(i)) \quad (34)$$

が導かれうる。 $(33), (34)$ は方法(i), (iii)について書き下したものであるが、方法(ii), (iv)に対しては、 $c^*(\cdot)$ を $\tilde{c}^*(\cdot)$ で置き換えればよい。また、明らかに、方法(iv)を用いた場合には、 $n \geq 1$,

$i = 0, 1, \dots$ に対する

$$\tilde{p}_n^*(i) = p_n(i)$$

が成り立ち、方法(iv)は離散近似に他ならないことがわかる。

4. $\{w_i^{(n)}\}$ の基本的性質

この節では、前節で考察された方法(i)～(iv)によって生成される系列（統約して $\{w_i^{(n)}\}$ で表わすことにする）が満たす幾つかの性質を証明なしに与える。

補題 1. $K_{i+1} \geq K_i$ for all i .

補題 乙.

$$\lim_{i \rightarrow \infty} K_i = 1$$

これらの補題は、 $\{A_i\}, \{B_i\}$ や γ に関して単調非減少で、極限値が 1 であることを用いれば、容易に証明される。

定理 1.

$$w_{i+1}^{(n)} \geq w_i^{(n)} \quad \text{for } n \geq 1, i \geq 0.$$

定理 2.

$$\lim_{i \rightarrow \infty} w_i^{(n)} = 1 \quad \text{for } n \geq 1.$$

系.

$$w_i^{(n)} \leq 1 \quad \text{for } n \geq 1, i \geq 0.$$

定理 3.

$$w_i^{(n+1)} \leq w_i^{(n)} \quad \text{for } n \geq 1, i \geq 0.$$

以上の定理 1 ~ 3 の証明は全て数学的帰納法によっている。

5. あわりに

離散近似と Sequential PL Approximation の関係を中心に、Lindley の鎖立方程式のある数値解法を紹介したが、 $\{w_i^{(n)}\}$ の $n \rightarrow \infty$ での挙動については未知な部分がまだ残っている。数値計算を実際にに行なうにあたっての細かい工夫と共に、今後の重要な課題である。

** References **

- [1] Ackroyd, M.H., "Computing the Waiting Time Distribution for the GI/G/1 Queue by Signal Processing Methods," IEEE Transactions on Communications, COM-28, 52-58 (1980).
- [2] Ackroyd, M.H., "Iterative Computation of the M/G/1 Queue Length Distribution via the Discrete Fourier Transform," IEEE Transactions on Communications, COM-28, 1929-1932 (1980).
- [3] Kimura, T., "An Interpretation of the Discrete Approximation for the GI/G/1 Queue," in preparation.
- [4] Kimura, T., "On a Numerical Method for Solving the Lindley's Integral Equation - Part I: Basic Properties," in preparation.
- [5] Kleinrock, L., Queueing Systems, Vol. 2: Computer Applications, Wiley-Interscience, New York, 1976.
- [6] Lindley, D.V., "The Theory of Queues with a Single Server," Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 48, 277-289 (1952).
- [7] Spitzer, F., "The Wiener-Hopf Equation whose Kernel is a Probability Density," Duke Mathematical Journal, 24, 327-344 (1957).

Toshikazu KIMURA:

Department of Information Sciences,
Tokyo Institute of Technology,
Oh-okayama, Meguro-ku, Tokyo 152.