

点過程の複合待^タ行列システムへの応用について

東京理科大 理工 宮沢政清

§1 はじめに

点過程を待^タ行列システムへ応用する考えは、古くからあるが、ここ5,6年において、新たな発展がなされつつある。

点過程理論は、待^タ行列モデルを記述する上では、理論的に自然なものである。また、その数学的な利点は、独立性やマルコフ性の仮定を置かなくとも、定常性の仮定だけで、理論的展開ができる所にある。しかし、この点は弱点でもあり、モデルの記述は可能でも、解析的に有効な結果は、ほとんど得られない状態であった。これが、5,6年前から変り始めるのは、主に次の2つのことによる。1つは、待^タ行列での、時間平均と容平均が、後述される Palm 測度の理論により明確にされ、これらの2つ平均の関係が、一般的式で表現された点である。また、他の1つは、リトルの公式 " $L = \lambda W$ " のような広く成り立つ式が、いざいざ見つかってきた点であ

る。この報告では、これらを関係式を不变式と呼ぶことにする。不变式は、マルコフ性などの仮定がなくとも成り立つことが多く、点過程の理論を使うと、これらを体系的に得ることができる。

この報告では、点過程の理論をもって、複数窓口系、ランデム型待_s行列など、より複雑な待_s行列モデル、これらを複合待_s行列と呼ぶ、について、不变式を導びくこと及びその応用について論じる。

点過程理論を使って不变式を得る方法には、大きく分けて2つの方法がある。1つは、逆変換公式と呼ばれる Palm 測度に関する公式を利用する方法で、Franken (1976) や Miyazawa (1979) でもさりられた。他方は、遷移速度の保存則と呼ばれるもので、マルコフ過程における平衡方程式と同様な考え方で導びき出されたものである。この方法は、König et al. (1978) が得たもので、その後、König and Schmidt (1980) や Miyazawa (1981) などでもさりられた。この報告では、後者の遷移速度の保存則を使う。ただし、この法則を、複合待_s行列システムへ応用しやすい形に変形してから用いる。

§2 点過程理論

(Ω, \mathcal{F}, P) を確率空間としよう。このとき、 $\omega \in \Omega$ は、待

△行列システムの時間的経過を表すとし、 $\omega = \{\gamma(t)\}_{t=-\infty}^{+\infty}$ と表現されるものとしよう。いま、各 $\omega \in \Omega$ に対して定義された点列 $\{t_i(\omega)\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ は、 $\cdots t_{-1} \leq t_0 \leq 0 < t_1 \leq t_2 \leq \cdots$ かつ

$$\lim_{i \rightarrow -\infty} t_i = -\infty, \quad \lim_{i \rightarrow +\infty} t_i = +\infty$$

を満たしていふとする。このとき、 $\{t_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ は、点過程と呼ばれる。さて、 $\{t_i(\omega)\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ に対して、

$$(2.1) \quad U(B)(\omega) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \chi_{\{t_i(\omega) \in B\}}^{(\omega)} \quad (\forall B \in \mathcal{B}(R))$$

とおけば、 U は、整数値測度である。ここに、 χ_A は、集合 A の指示関数を表わし、 $\mathcal{B}(R)$ は、実軸上のボレル集合体を表すとする。 $\{t_i\}$ を与えよこと、 U を与えよことは同値である。点列 $\{t_i\}$ が重複点、すなはち、 $t_i = t_j$ ($i \neq j$) とをもつものを含まないとき、この点列 $\{t_i\}$ と対応する U は、単純と呼ばれる。もし、 $\{t_i\}$ が、単純でなければ、重複点を、1 点と数えて、番号の付け変えをすることにより 単純な点列 $\{t_i\}$ を得ることができる。これを単純化と呼ぶ。 $\{t_i\}$ に対応する整数値測度を U で表す。

点過程 $\{t_i\}$ は、待機行列モデルでは、たとえば、客の到着の時点を表す。しかし、待機行列モデルでは、他にも、各種の点列が考えられる。たとえば、タンデム型の場合には、

オ₁のシステムを出てオ₂のシステムに入る時点や、オ₂のシステムから退去する時点も考えられる。これらを数学的に表すためには、同時に複数個の点過程を考えると便利である。ここで、点過程 U_1, U_2 を考え、それらに対して、

$$(2.2) \quad (U_1 + U_2)(B) = U_1(B) + U_2(B) \quad (\forall B \in \mathcal{B}(R))$$

とおくことによって、新たな点過程 $U_1 + U_2$ を定義しておく。
また、時間のずらし T_α を定義しておこう。

$$(2.3) \quad T_\alpha \{\zeta(t)\} = \{\zeta(t+\alpha)\} \quad (\forall t \in R: \text{実数全体})$$

いま、 $\omega = \{\zeta(t)\}$ であるから、 (2.3) より $T_\alpha \omega$ が定められる。
次に、事象 $\theta \in \mathcal{F}$ に対して、

$$(2.4) \quad T_\alpha \mathcal{F} = \{\omega : T_\alpha \omega \in \mathcal{F}\}$$

を定義しておこう。

これからは、任意の θ に対して、

$$(2.5) \quad P(T_\alpha \mathcal{F}) = P(\mathcal{F}) \quad (\forall \theta \in \mathcal{F})$$

と仮定する。すなはち、 P は、 $\{T_\alpha\}$ について定常を確率測度である。このとき、 $\{\zeta(t)\}$ や、点過程 U_1, U_2 などは、同時に定常となる。次に、Palm 測度を定義しよう。

点過程 U に対して、

$$(2.6) \quad P_U(D) = \nu^{-1} E \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} g(s) \chi_{\{T=s\}} U(ds) \right\} \quad (\forall D \in \mathcal{F})$$

により、 (Ω, \mathcal{F}) 上の確率測度 P_U を定義し、これを、 U に関する Palm 測度と呼ぶ。すなはち、 $\nu = E\{U(0,1)\}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} g(s) ds = 1$ ($g(s) \geq 0$) とする。 (2.6) 式は、 g の形に依存しないことが証明されていいる。

Palm 測度 P_U は、標本平均と次のように関係づけられる。

$$(2.7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\zeta(t_i)) = E_U \{ f(\zeta(0)) \} \quad a.s. \text{ P.}$$

ここに、 f は、非負の関数であるとする。また、P は、エルゴード的とする。 (2.7) より、待つ時間など、客ごとに定義される量に対しては、Palm 測度が便利なことがわかる。

§3 遷移速度の保存則と一般公式

確率過程 $\{\zeta(t)\}$ の状態空間を K とする。König et al.(1978) は、單純点過程 U と、 U に依存した K の部分集合族 k_U に対して、若干の仮定のもとに次の公式を得た。

$$[\text{公式 I}] \quad \partial_{t_j}(A) = \nu [P_U(\zeta(0-) \in A) - P_U(\zeta(0+) \in A)]$$

$$(\forall A \in k_U)$$

ここで、 $\{\zeta(t)\}$ は、左右の極限をもつ確率過程であると仮定

する。また、

$$(3.1) \quad \sigma_U(A) = \lim_{t \downarrow 0} \left[\int_K P(\{z(t) \in A | z(0) = x, U[0,t] = 0) \times P(z(0) \in dx) - P(z(0) \in A) \right]$$

とする。

たとえば、 $\{z(t)\}$ を、单一窓口系 $G/G/1$ の返り待ち時間過程としよう。このとき、 $U[0,t] = 0$ 、すなわち、 $[0,t]$ 内に客が来なければ、

$$(3.2) \quad z(t) = (z(0) - t)^+$$

であるから、 $A = (u, +\infty)$ とすると、 $u > 0$ に対して、

$$\begin{aligned} (3.3) \quad P(z(t) > u | z(0) = x, U[0,t] = 0) \\ &= P(z(0) - t > u | z(0) = x, U[0,t] = 0) \\ &= \chi_{\{x > u+t\}} \end{aligned}$$

$\therefore \sigma_U(A) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} [P(z(0) > u+t) - P(z(0) > u)]$ とする。したがって、

$$\begin{aligned} (3.4) \quad \sigma_U(A) &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} [P(z(0) > u+t) - P(z(0) > u)] \\ &= \frac{d}{dt} P(z(0) > u+t) \Big|_{t=0} \end{aligned}$$

となることがわかる。

Miyazawa (1981) は、公式上で、複数人の点過程の場合へ変

形し、次の式を得た。

$$[\text{公式II}] \quad \alpha_U(A) = \sum_{i=1}^n \nu_i (P_{U_i}(\{0\} \in A) - P_{U_i}(\{0+\} \in A)) \\ (\forall A \in \mathcal{F}_U)$$

ここで、 U_1, U_2, \dots, U_n は、単純点過程であり、

$$(3.5) \quad U^* = U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

の関係が成り立つとする。また、 $\nu_i = E U_i [0, 1] \quad (i=1, 2, \dots, n)$ とする。

次に、公式IIを、待機行列モデルへ応用する際に、 $\{t_i\}$ として何を選ぶとよいかを考えておこう。一般の待機行列の問題では、窓口に並んでいる人の数や、サービス中の人が窓口を出るまでの時間等の分布があかれば十分であろう。たとえば、待機時間は、この2つの量から計算できる。そこで、これからは、待機人数を表す量 L 及び、サービス中の人が窓口を出るまでの時間も表す量 T を考える。ただし、 L は、タンデム型のように窓口が多數ある場合も考慮して、一般にベクトル値を取るとする。 L の状態空間を J で表す。Jは離散型の空間であるとする。また、 T は、点過程 $U = \{t_i\}_{i=1}^\infty$ に対し、

$$(3.6) \quad r(t) = (r(t_i+) - C_{L(t_i+)}(t-t_i))^+ \quad (\forall t \in (t_i, t_{i+1}))$$

の関係を満たしているとする。ここに, c_j ($j \in J$) は, K に依存する定数であるとする。

この場合に, 公式Ⅱを適用すると, $\forall u > 0$ に対して,

$$\begin{aligned} [\text{公式} \text{II}] \quad & G \cdot P(L=j, r>u) \\ &= \sum_{i=1}^n \bar{\nu}_i (E_{V_i} \{(r-u)^+ : L^+=j\} \\ &\quad - E_{V_i} \{(r-u)^+ : L^-=j\}) \end{aligned}$$

($\forall j \in J$)
が得られる。ここで,

$$L = L(0), \quad L^+ = \overset{\circ}{L}(0+), \quad L^- = L(0-)$$

$$r = r(0), \quad r^+ = r(0+), \quad r^- = r(0-)$$

とする。

複合待行列システィムを考える上で基本単位にあるものとして, 複数窓口系とタンデム型待行列の2つを取りあげてみる。以下では, これら2つの系について不变式を求める。ただし, 簡単のために, 複数窓口系は, 待行列は無限, タンデム型に対しては, 単一窓口2段で, 各窓口の待行列は無限とする。また, 両方のシステムとも, 客は, 定常点過程で到着すると仮定する。このとき, これらのシステムをそれぞれ, $G/G/1$ 及び $G/G/1 \rightarrow G/1$ で表すことにする。

§4 G/G/1 の不変式

次の記号をもとめる。

N_0 … 到着時点よりなる点過程 ($\lambda = E\{N_0(0,1)\}$ とする。)

N_1 … サービス完了時点よりなる点過程

P_0 … N_0 についての Palm 測度, P_0 に関する期待値は、

E_0 で表す。

P_1 … N_1 についての Palm 測度, P_1 に関する期待値は、

E_1 で表す。

$L(t)$ … 時刻 t での系内人数 (サービス中も含む)。

$\alpha(t)$ … 時刻 t で次の客が到着するまでの時間, なお、客の到着間隔は、 T で表す。

$X_i(t)$ … 時刻 t で i 番目の窓口でサービス中の客の残りサービス時間, なお, 客のサービス時間は, S で表す ($i=1, 2, \dots, d$)。

$$R(t) = X_1(t) + \dots + X_d(t)$$

公式 III で, $U_1 = N_0$, $U_2 = N_1$, $U = U_1 + U_2$, $L(t) = L(t)$, $R(t) = 0$ (定義), $\alpha(t)$, or $R(t)$ における, 次の 3 組の式が得られる。

$$(4.1) \quad P_0(L^- = j^+) = P_1(L^+ = j^+) \quad (j^+ = 0, 1, 2, \dots)$$

$$(4.2) \quad P_0(L = j^+) = \lambda \{ E_0(T; L^- = j^+ - 1) + E_1(\alpha^+; L^+ = j^+) \\ - E_1(\alpha^-; L^+ = j^+ - 1) \} \quad (j^+ = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\begin{aligned}
 (4.3) \quad & \min(s, j) P(l=j) \\
 & = \lambda \{ E_0(\delta^+ : l^- = j-1) - E_0(\delta^- : l^- = j') \\
 & \quad + E_1(\delta^+ : l^+ = j) - E_1(\delta^- : l^+ = j') \} \\
 & \quad (j' = 1, 2, 3, \dots)
 \end{aligned}$$

ここで、 $\ell^\pm = \ell(0^\pm)$, $\alpha^\pm = \alpha(0^\pm)$, $\delta^\pm = \delta(0^\pm)$ 等の略号を用いた。また、 $E_0(\delta : l^- = j-1)$ 等は、条件 $\{l^- = j-1\}$ を満す ω の集合上での期待値を表す。

(4.3) 式は、窓口が空いていようと空に、客が等確率で窓口を選ぶとするとき、次の式へ変形できる (König and Schmidt (1980) を参照)。

$1 \leq j \leq A-1$ を満す j に対して、

$$\begin{aligned}
 (4.4) \quad jP(l=j) &= \lambda \{ [E_0(\delta, |l^- = j-1) + (j-1)E_0(\delta^- | \delta_i^+ > 0, l^- = j-1)] \\
 &\quad \times P_0(l^- = j-1) \\
 &\quad - jE_0(\delta^- | \delta_i^+ > 0, l^- = j) P_0(l^- = j) \\
 &\quad + j'E_1(\delta^+ | \delta_i^+ > 0, l^+ = j') P_1(l^+ = j') \\
 &\quad - (j'-1)E_1(\delta^+ | \delta_i^+ > 0, l^+ = j-1) P_1(l^+ = j-1) \}
 \end{aligned}$$

$j = A$ に対して、

$$\begin{aligned}
 (4.5) \quad jP(l=j) &= \lambda \{ [E_0(\delta, |l^- = j-1) + (j-1)E_0(\delta^- | \delta_i^+ > 0, l^- = j-1)] P_0(l^- = j-1) \\
 &\quad - jE_0(\delta^- | \delta_i^+ > 0, l^- = j) P_0(l^- = j) + [E_1(\delta, |l^+ = j) + (j-1) \times \\
 &\quad E_1(\delta^+ | \delta_i^+ > 0, l^+ = j) P_1(l^+ = j) - (j-1)E_1(\delta^- | \delta_i^+ > 0, l^- = j-1) P_1(l^+ = j-1)] \}
 \end{aligned}$$

$j \geq s+1$ を満す j に対して,

$$(4.6) \quad \lambda P(l=j) = \lambda \{ \lambda E_0(\gamma_i^+ | \gamma_i^- > 0, l^- = j-1) P_0(l^- = j-1) \\ - \lambda E_0(\gamma_i^- | \gamma_i^- > 0, l^- = j) P_0(l^- = j) \\ + [E_1(s | l^+ = j) + (s-1) E_1(\gamma_i^+ | \gamma_i^- > 0, l^+ = j)] P_1(l^+ = j) \\ - (s-1) E_1(\gamma_i^- | \gamma_i^- > 0, l^+ = j-1) P_1(l^+ = j-1) \}$$

(4.6) を $j, j+1, \dots$ について加えると, $j \geq s+1$ に対して j について

$$(4.7) \quad \lambda P(l \geq j) = \lambda \{ E_0(s, | l^+ \geq j) P_0(l^+ \geq j) \\ + \lambda E_0(\gamma_i^- | \gamma_i^- > 0, l^- = j-1) P_0(l^- = j-1) \\ + (s-1) E_1(\gamma_i^+ | \gamma_i^+ > 0, l^+ = j-1) P_1(l^+ = j-1) \}$$

が得られる。

§ 5 $G/G/1 \rightarrow G/1$ の不変式

次の記号をもとめる。

N --- オ1の窓口への客の到着時点からなる点過程
($\lambda = EN_0(0, 1)$)。

N_1 --- オ1の窓口でサービスを終了し, オ2の窓口へ並ぶ時点からなる点過程。

N_2 --- オ2の窓口でサービスを完了する時点からなる点

過程。

$$P_i = P_{N_i} \quad (i=0,1,2)$$

$l_i(t)$ --- i 番目の窓口でサービス中の客も含めた待人数 ($i=1,2$)。

$r_i(t)$ --- i 番目の窓口でサービス中の客の残りサービス時間, なお, サービス時間は S_i とする ($i=1,2$)。

$r_0(t)$ --- オリの窓口への次の到着までの時間, 到着時間は, T で表す。

$$l(t) = l_1(t) + l_2(t) ; \text{ 所内総人数}$$

このとき, $L(t) = (l_1(t), l_2(t))$ とし, $r(t) = 0$ (定数), $r_0(t)$, $r_i(t)$, または, $r_0(t)$ とすれば, 次の 4 組の式が得られる。

$$(5.1) \quad P_0(l_1^+ = i, l_2^+ = j) + P_1(l_1^+ = i, l_2^+ = j) + P_2(l_1^+ = i, l_2^+ = j) \\ = P_0(l_1^+ = i+1, l_2^+ = j) + P_1(l_1^+ = i-1, l_2^+ = i+1) + P_2(l_1^+ = i, l_2^+ = j+1) \\ (i, j \geq 0)$$

$$(5.2) \quad P(l_1 = i, l_2 = j) = \lambda \{ E_0(T; l_1^+ = i, l_2^+ = j) \\ + E_1(r_0; l_1^+ = i, l_2^+ = j) - E_1(r_0; l_1^+ = i-1, l_2^+ = j+1) \\ + E_2(r_0; l_1^+ = i, l_2^+ = j) - E_2(r_0; l_1^+ = i, l_2^+ = j-1) \} \\ (i, j \geq 0)$$

$$(5.3) \quad P(l_1=i, l_2=j)$$

$$= \lambda \{ E_o(r_i^+; l_i^+=i, l_2^+=j) - E_o(r_i^-; l_i^+=i+1, l_2^+=j) \}$$

$$+ E_1(S_1; l_1^+=i, l_2^+=j)$$

$$+ E_2(r_i^+; l_i^+=i, l_2^+=j) - E_2(r_i^-; l_i^+=i, l_2^+=j-1) \}$$

$$(i \geq 1, j \geq 0)$$

$$(5.4) \quad P(l_1=i, l_2=j)$$

$$= \lambda \{ E_o(r_i^+; l_i^+=i, l_2^+=j) - E_o(r_i^-; l_i^+=i+1, l_2^+=j) \}$$

$$+ E_1(r_i^+; l_1^+=i, l_2^+=j) - E_1(r_i^-; l_1^+=i-1, l_2^+=j+1) \}$$

$$+ E_2(S_2; l_1^+=i, l_2^+=j) \}$$

$$(i \geq 0, j \geq 1)$$

§ 6 不変式の応用

(I) M/GI/A の近似式

M/GI/A 型待付行列の平均待付人数(サービス中の客を含まない) $i = 1, 2, \dots$ にて近似式を求める。これに $i = 1$ では、

Hofstad (1978) や, Nozaki and Ross (1978) 等で、求められてゐるが、ここでは、彼らより仮定をゆるめを考える。

(仮定1) $\forall j \geq 1$ に対して、

$$(6.1) \quad E_o(r_i^- | r_i^- > 0, l_i^-=j) \cong E_1(r_i^- | r_i^- > 0, l_i^+=j)$$

(仮定 2) $1 \leq r_j \leq s-1$ に対して,

$$(6.2) E_0((r_1^- + \dots + r_s^-)^2 | l^- = j')$$

$$\cong E_1((r_1^- + \dots + r_s^-)^2 | l^+ = j')$$

これらの仮定のもとで、§4 の結果を使って計算すると、

$$(6.3) E\{(l-d)^+\} \cong \frac{\lambda^2 E(S^2)}{2(s-1)! (s-p)^2} \times \frac{\frac{p^{d-1}}{\sum_{j=0}^{s-1} \frac{p^j}{j!}}}{\frac{p^d}{(s-p)(s-1)!}}$$

が得られる。これは、Hokstad + Nozaki and Ross の結果と一致している。

(II) GI/GI/s の近似式.

GI/GI/s 型待機行列とは、致着間隔が互いに独立で同一分布にしたがい、またサービス時間も互いに独立で同一分布にしたがい、さらには、これら 2 つの量も、また、互いに独立であるモデルである。このとき、 $r_j \geq 0$ に対して、

(仮定 3)

$$(6.4) E_0(\alpha | l^- = j') \cong \frac{E(T^2)}{2E(T)}$$

$$(6.5) E_1(\alpha | l^+ = j') \cong \frac{E(T^2)}{2E(T)}$$

および、

(仮定 1') $\forall j \geq 1$ に対して,

$$(6.6) \quad E_0(r^- | r_i > 0, l^- = j) \cong \frac{E(s^2)}{2E(s)}$$

$$(6.7) \quad E_0(r^- | r_i > 0, l^+ = j) \cong \frac{E(s^2)}{2E(s)}$$

を仮定すると、(I) の場合と同様にして次の近似式が得られる。

$$(6.8) \quad E(l^- \geq \lambda) \cong \frac{\rho(\delta_s^2 + \delta_T^2)}{2(\lambda - \rho)} \times P_0(l^- \geq \lambda)$$

$$\text{ここで}, \quad \delta_s^2 = \frac{E(s^2)}{(E(s))^2}, \quad \delta_T^2 = \frac{E(T^2)}{(ET)^2}, \quad \text{であり},$$

$$(6.9) \quad P_0(l^- \geq \lambda) \cong \frac{2\rho - \lambda(1 - \delta_T^2)}{2(\lambda - \rho)}$$

$$\xrightarrow{\quad} \times \frac{1}{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(s-1)! (\delta_T^2 + 1)^{j-\Delta+1}}{j! [2\rho + (\delta_T^2 + 1)(s+1)] \times \cdots \times [2\rho + (\delta_T^2 + 1)(s-j)]} + \frac{2\rho - \lambda(1 - \delta_T^2)}{2(\lambda - \rho)} \times \frac{\frac{1}{2}(1 + \delta_T^2)}{2\rho + (\delta_T^2 - 1)(s-1)}}$$

とする。ただし、(6.9) の意味をもつのは、その値が正の数にならなければならぬので、

$$(6.10) \quad \frac{\rho}{\lambda} > \frac{1}{2} (1 - \delta_T^2)$$

の場合である。(6.8) と (6.9) で与えられる、二の近似式については、数値的検証は、まだ行なっていなない。

(III) $G/G/1 \rightarrow G/1$ の不等式。

以下の 3 つの場合について考える。

① 到着間隔が互いに独立で, T が NBUE (NWUE) 分布にしたがうとき, すなはち,

$$(6.11) \quad E(T-x)^+ \underset{(\geq)}{\leqq} E(T) \cdot P(T > x) \quad (\forall x \geq 0)$$

であるとき, $\forall i, k \geq 0$ に対して,

$$(6.12) \quad P(l_i \geq i, l_k \geq k) \underset{(\leq)}{\leqq} P_0(l_i^+ \geq i+1, l_k^+ \geq k)$$

が成り立つ。

② オフの窓口のサービス時間が互いに独立で, S_2 が NBUE (NWUE) 分布にしたがうとき, $\forall k \geq 0, \forall j \geq 1$ に対して,

$$(6.13) \quad P(l \geq k, l_j \geq j) \underset{(\geq)}{\leqq} P_2 P_2(l^+ \geq k, l_j^+ \geq j-1)$$

$\therefore \lambda = \lambda E(S_2)$ とする。

③ オンの窓口のサービス時間が互いに独立で, S_1 が NBUE (NWUE) 分布にしたがうとき, $\forall j \geq 0$ に対して,

$$(6.14) \quad P(l_i \geq i, l_j \geq j) \underset{(\leq)}{\leqq} P_1 P_1(l_i^+ \geq j+1)$$

が成り立つ。 $\therefore \lambda = \lambda E(S_1)$ とする。なお, (6.14) 式は次のようにならん。

$$(6.15) \quad P(l_2 \geq j' | l_1 \geq 1) \geq P_1(l_1^+ \geq j'+1)$$

§ 7 結語

本論で述べた方法を使えば、一般的なネットワーク型待合行列に対しても、不变式を得ることができる。今後の問題は、これらの不变式から、どうようにすれば、应用上有益な結果を導びくことができるかという点であろう。少くとも、すでに得たように、近似式や不等式を考える際には、これらの不变式が役立つものと思う。

(参考文献)

- [1] Franken, P. (1976) Einige Anwendungen der Theorie zufälliger Punktprozesse in der Bedienungstheorie I. Math. Nachr. 70, 303-319.
- [2] Hokstad, P. (1978) Approximation for the M/G/m queue. Opns. Res. 26, 510-523.
- [3] König, D., Rolski, T., Schmidt, V., and Stoyan, D. (1978) Stochastic processes with imbedded marked point process (PMP) and their applications in queueing. Math. Operationsforsch. Statist. 9, 125-141.
- [4] König, D. and Schmidt, V. (1980) Stochastic inequalities between customer-stationary and time-stationary characteristics of queueing systems with point processes. J. Appl. Prob. 17, 768-777.
- [5] Little, J.D.C. (1961) A proof for the queueing formula: $L = W$. Opns. Res. 9, 383-387.

- [6] Mecke, J.(1967) Stationäre zufällige Masse auf lokalkom-pakten Abelschen Gruppen. Z. Wahrscheinlichkeit. 9, 36-58.
- [7] Miyazawa(1979) A formal approach to queueing processes in the steady state and their applications. J. Appl. Prob. 16, 332-346.
- [8] Miyazawa(1981) Note on Palm measure in the intensity conservation law and inversion formula in PMP and their applications. Math. Operationsforsch. Statist., Ser. Optimization 12, 281-293.
- [9] 森村英典・宮次政清 「複雑な待ち行列システムへ点過程理論をもすり方とその応用について」 電気公社電気通信研究所研究成果報告(1981年9月)
- [10] Mori,M.(1980) Relations between queue-size and waiting-time distributions. J. Appl. Prob. 17, 822-830.
- [11] Nozaki,S.A. and Ross,S.M.(1978) Approximations in finite capacity multi-server queues with Poisson arrivals. J. Appl. Prob. 15, 826-834.