

M/G/1待ち行列における停止規則の選択を
含めた最適制御問題

高知大 理学部 大坪 義夫

§1. 序

M/G/1待ち行列システムにおける最適制御問題は、多数の人々によって研究されてきている (cf. Crabil - Gross - Magazine [2])。その中で特に、Mitchell [8] と Doshi [3] 等は、サービス率を制御する問題を、Prabhu [11] は、最適停止問題を取り扱った。しかしニホンでは、これらの問題は各自別個に議論がなされてきた。この報告では、サービス率を制御する政策と選択可能性と停止規則を対として扱う制御問題について述べる。このような政策と停止規則を対として考える問題は、次のようないくつかの観点から起つた。サービス率を制御する最適化問題において、ある時刻にサービス機関の営業を停止せざるを得ない場合、または、停止する方が有益である場合がある。このようないくつかの問題は、仮の吸収状態とともに状態空間の和集合を新しい状態空間とするところによつて、

新たに制御問題として考えることもできる。しかし、二のようには定義された制御問題では、もとの制御問題に関する、確率1で停止するとは限らない。したがって、確率1で停止する制御問題に制限するならば、上で考えた新しい制御問題は不適当である。

一般のマルコフ過程における、政策と停止規則を対として考える最適化問題は、Hordijk[5], Furukawa-Iwamoto[4], Krylov[7], Nisio[9]等により研究されている。

二の報告では、評価関数として、期待総利得関数と平均型期待利得関数を考えるが、ともに、利得率、ジヤンフ。利得、終端利得により定められる。ジヤンフに伴う利得を加味する問題は、Bieber[1]で取り扱われている。

二二の主な目的は、次の3点である；

(1) 最適期待総利得関数を逐次近似の極限として与え、

その性質を調べる。(§3)

(2) 政策と停止規則のある対や、最適であるための必要条件と十分条件を、生成作用素を含む形で与える(§4)

(3) 平均型評価関数に対する、政策と停止規則のある対や、最適であるための十分条件を与える。(§5)

§2. 問題の定式化

M/G/1 待ち行列システムにおける最適制御問題は、次の
7つの組 $(S, A, r, \rho, g, \lambda, H)$ を表される；

- (i) state space S は、仕事量(残余分) x の集合で。
 $S \equiv [0, \infty)$ 。 $\Sigma \equiv \mathbb{R}^+ \times S$ ，但し、 $\mathbb{R}^+ \equiv [0, \infty)$ は time space。
- (ii) action space A は、 $A \equiv [a_1, a_2]$ ， $0 \leq a_1 < a_2 < \infty$ 。
- (iii) reward rate r は、 $\Sigma \times A$ 上の有界連続関数。
- (iv) jump reward fact ρ は、 $\Sigma \times S$ 上の有界連続関数。
- (v) terminal reward fact g は、 Σ 上の有界連続関数。
- (vi) jump rate λ ；客の到着間分布は、parameter λ ：
 $\Sigma \rightarrow \mathbb{R}^+$ をもつ指數分布であり、 λ は次をみたす；

 - (a) λ は Σ 上の連続関数
 - (b) $\exists M < \infty$ すなはち、 $0 < \lambda(z) < M$ for $\forall z \in \Sigma$

- (vii) H ；順次到着する客のサービス量(仕事量)は、互いに独立、かつ、到着間分布に独立して確率変数で、同一分布 $H(\cdot)$ をもつ。

定義 2.1. $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ が次をみたすとき、right-left continuous on Σ という；各 $(s, x) \in \Sigma$ に対して、

$$\lim_{\substack{(t, y) \rightarrow (s, x) \\ t \geq s, y \leq x}} f(t, y) = f(s, x) .$$

定義 2.2. policy $\pi: \Sigma \rightarrow A$ は、次を満たすものとする；

- (a) π は、 Σ 上で right-left continuous。
 - (b) π は、 Σ の任意の compact subset 上で、2 变数関数の意味で有限個の不連続点をもつ。
 - (c) 各 $s \geq 0$ に対して、 $\pi(s, \cdot)$ は、 S 上で単調非減少かつまたは、連続区間にあり Lipschitz 連続である。
- (注) 条件 (c) は path の一意性のために加えたものである。

policy π の全体を Π と表す。

各 $\pi \in \Pi$ と $(s, x) \in \Sigma$ に対して、微分方程式

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = -\pi(t, x(t)), & t \geq s, \\ (s) = x \end{cases}$$

の解が存在して、一意である。以下、policy $\pi \in \Pi$ を用いて、初期状態が (s, x) のとき、時間 $[s, s+t]$ の間に、客が到着しえなければ、時刻 $t: s \leq t \leq s+t$ の状態は、

$$y(t) = \max(x(t), 0)$$

である。必要ならば、この $y(t)$ を $y_{(s, x)}^\pi(t)$ とかく。

policy $\pi \in \Pi$ に対応する制御過程 $\{\Sigma^{\pi}\}_{t \geq 0} = \{(t, x^{\pi}_t)\}_{t \geq 0}$ と、次の確率法則を定める；

$$P_{(s,x)}^\pi [\nu(s,x) \leq t] = 1 - \exp \left(- \int_s^{s+t} \lambda(w, \gamma(w)) dw \right),$$

$$P_{(s,x)}^\pi [\gamma(s+t) \leq X_{s+t}^\pi \leq \gamma(s+t) + v \mid \nu(s,x) = t] = H(v),$$

for $(s,x) \in \mathbb{Z}$, $t \geq 0$, $v \geq 0$,

$\gamma(w) = \gamma_{(s,x)}^\pi(w)$, $w \geq s$, 2.あり, $\nu(s,x)$ は $(s,x) \in$ start set とされ, 次の客の到着するまでの経過時間を表す。

定理 2.1. 各 $\pi \in \Pi$ に対し

(i) $\{\mathbb{Z}_t^\pi\}_{t \geq 0}$ の a.a. of sample paths は、左極限を持つ、右連続で、かつ有限区間で有限個の不連続点をもつ

(ii) $\{\mathbb{Z}_t^\pi\}_{t \geq 0}$ は、strong Markov process である。

(証明)

(i) は、 $\{\mathbb{Z}_t^\pi\}_{t \geq 0}$ の定義から明らかである。

(ii) Ito[6] の §2.4における strong Markov 性に対する十分条件を用いて、定理の証明方法により。

「任意の $f \in F$ に対し、もし各 $(s,x) \in \mathbb{Z}$ に対し

$$\lim_{t \downarrow 0} f(\mathbb{Z}_{s+t}^\pi) = f(s,x) \quad P_{(s,x)}^\pi \text{-a.s.},$$

2.あるならば、各 $(s,x) \in \mathbb{Z}$ と任意の $t > 0$ に対し

$$\lim_{t \downarrow 0} T_t^\pi f(\mathbb{Z}_{s+t}^\pi) = f(s,x) \quad P_{(s,x)}^\pi \text{-a.s.}.$$

が成立する」とを示せばよい。ここで F は、 \mathbb{Z} 上の有界可測な関数の全体であり、

$$T_t^\pi f(s,x) \equiv E_{(s,x)}^\pi [f(\mathbb{Z}_{s+t}^\pi)]$$

である。以下略。

sample space Ω と、 $\omega : [0, \infty) \rightarrow \Sigma$ (可測) の全体とし、 \mathcal{F}_s^{ω} と、集合 $\{\omega \in \Omega \mid \omega(s') \in B\}$ ($s \leq s' \leq t$, $B \in \mathcal{B}(\Sigma)$) で生成された σ -algebra とする。但し、 $\mathcal{B}(\Sigma)$ は、 Σ の Borel-algebra である。

$C_s(\pi)$ と、 $P_{(s,x)}^{\pi} [s \leq \tau < \infty] = 1$ ($\forall x \in S$) とみたす $\{\mathcal{F}_t^{\omega}\}_{t \geq s}$ に関する stopping time τ の全体とし、

$$\Lambda(s) \equiv \{(\pi, \tau) \mid \pi \in \Pi, \tau \in C_s(\pi)\}$$

とおく。

各 $(s, x) \in \Sigma$, $(\pi, \tau) \in \Lambda(s)$ に対し 2.

$$\begin{aligned} D_{\tau}^{\pi} f(s, x) &\equiv E_{(s,x)}^{\pi} \left[\int_s^{\tau} r(Z_t^{\pi}, \pi(Z_t^{\pi})) dt \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^{\infty} p(\tau_j, \bar{X}_{\tau_j}^{\pi}, X_{\tau_j}^{\pi}) x(\tau_j \leq \tau) + f(Z_{\tau}^{\pi}) \right] \end{aligned}$$

とおく。ここで、 τ_j は、 $(s, x) \in \text{start} \cup \Sigma$ からの j th の客の到着時刻を表し、 x は定義関数であり、 $\bar{X}_{\tau}^{\pi} \equiv \lim_{w \uparrow \tau} X_w^{\pi}$ 。
このとき、

期待総利得関数 と、 $\Phi_{\tau}^{\pi}(s, x) \equiv D_{\tau}^{\pi} g(s, x)$, $(s, x \in \Sigma, (\pi, \tau) \in \Lambda(s))$

最適総利得関数 と、 $u^*(s, x) \equiv \sup_{(\pi, \tau) \in \Lambda(s)} \Phi_{\tau}^{\pi}(s, x)$, $(s, x \in \Sigma)$

とおく。

定義2.3.

(π^*, τ^*) が optimal であるとは、 $(\pi^*, \tau^*) \in \Lambda(s) (\forall s \geq 0)$ かつ、 $U^*(z) = \varphi_{\tau^*}^{\pi^*}(z) (\forall z \in \Sigma)$ のときをいう。

= 例 2.1 以後、 $r^\pi(z) \equiv r(z, \pi(z))$, $\rho(X_{\tau_j}^\pi) \equiv \rho(\tau_j, \bar{X}_{\tau_j}^\pi, X_{\tau_j}^\pi)$ とする。

次の仮定を課す；

仮定1. 各 $(s, x) \in \Sigma$ は $\exists \tau \in \mathbb{R}$.

$$\sup_{\pi \in \Pi} E_{(s, x)}^\pi \left[\sup_{t \geq s} \left(\int_s^t r^\pi(Z_w^\pi) dw + \sum_{j=1}^{\infty} \rho(X_{\tau_j}^\pi) X(\tau_j \leq t) \right)^+ \right] < +\infty,$$

$$= 2^{\circ}, b^+ \equiv \max(0, b).$$

仮定2. $(s, x) \in \Sigma$, $(\pi, \tau) \in \Lambda(s)$ は $\exists \tau \in \mathbb{R}$.

$$E_{(s, x)}^\pi \left[\int_s^\tau r^\pi(Z_t^\pi) dt + \sum_{j=1}^{\infty} \rho(X_{\tau_j}^\pi) X(\tau_j \leq \tau) \right] \neq -\infty$$

\Rightarrow

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \left\{ \left[\int_s^N r^\pi(Z_t^\pi) dt + \sum_{j=1}^{\infty} \rho(X_{\tau_j}^\pi) X(\tau_j \leq N) \right]^- dP_{(s, x)}^\pi \right\} = 0,$$

$$= 2^{\circ}, N \text{ は自然数}, b^- \equiv \max(0, -b).$$

仮定1, 2 をともにみたす簡単な例としては、

$$(i) r \leq 0, \rho \leq 0.$$

$$(ii) r(s, x, a) = e^{-\alpha_1 s} \hat{r}(x, a), \rho(s, x, y) = e^{-\alpha_2 s} \hat{\rho}(x, y)$$

$$(\hat{r}, \hat{\rho} \text{ は有界}, \alpha_1 > 0, \alpha_2 > M)$$

§3. 最適総利得と逐次近似

二の節では、最適総利得関数を得るために逐次近似法を与える。結果だけ述べるが、証明は Ohtsubo [10] を参照。

整数 $n \geq 0$ 、自然数 N に対して、 $V_N^n(\pi)$ を次で定める；

$$\begin{cases} V_N^n(\pi)(s, x) = \max \left\{ q(s, x), D_{f_{k_n}(s)}^{\pi} V_N^n(\pi)(s, x) \right\} \\ \quad \text{for } (s, x) \in [0, N) \times S \equiv \Sigma_N, \\ V_N^n(\pi)(s, x) = q(s, x) \quad \text{for } (s, x) \in \Sigma - \Sigma_N, \end{cases}$$

$\Sigma = \Sigma$: $f_{k_n}(s) = \min_{k_n} \{ k_n \cdot 2^{-n} \mid k_n \cdot 2^{-n} > s, k_n = 1, 2, \dots \}$ 。

$V_N^n(\pi)$ は、“backward-inductively” で定められ、各 n に対して単調である。

$$V_N(\pi)(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} V_N^n(\pi)(z), \quad z \in \Sigma,$$

とおくと。

定理 3.1. 各 $N < \infty$ と任意の $\pi \in \Pi$ に対して、

$$(i) \quad V_N(\pi)(s, x) = \begin{cases} \sup_{\tau \in C_s^N(\pi)} \varphi_{\tau}^{\pi}(s, x), & (s, x) \in \Sigma_N \\ q(s, x), & (s, x) \in \Sigma - \Sigma_N \end{cases}$$

$\Sigma = \Sigma$: $C_s^N(\pi) = \{ \tau \in C_s(\pi) \mid P_{(s, x)}^{\pi}(\tau \leq N) = 1 \quad \forall x \in S \}$ 。

i.e. $V_N(\pi)$ は、有限区間ににおける停止問題の最適利得。

(ii) $\varepsilon > 0$ を任意にとる。二のとき、任意の $(s, x) \in \Sigma$ に対して、

$$V_N(\pi)(s, x) \leq \varphi_{\sigma_N^{\pi}}^{\pi}(s, x) + \varepsilon,$$

$\Sigma = \Sigma$: $\sigma_N^{\pi} \equiv \inf \{ \tau \geq s \mid V_N(\pi)(\Sigma_{\tau}^{\pi}) \leq q(\Sigma_{\tau}^{\pi}) + \varepsilon \}$ 。

同様にレ₂. $U_N^n \in$ 次₂ 定めろ;

$$\begin{cases} U_N^n(s, x) \equiv \max \left\{ g(s, x), \sup_{\pi \in \Pi} D_{P_{k_n}(s)}^{\pi} U_N^n(s, x) \right\} \\ \quad \text{for } (s, x) \in \Sigma_N \\ U_N^n(s, x) \equiv g(s, x) \quad \text{for } (s, x) \in \Sigma - \Sigma_N \end{cases}$$

$\{U_N^n\}$ は、各 $n, N \in \mathbb{N}$ に対して、単調であるから、

$$U(z) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} U_N^n(z), \quad z \in \Sigma,$$

とおくと、

定理 3.2.

$$(i) \quad u^* = u = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{\pi \in \Pi} U_N(\pi) \quad \text{on } \Sigma.$$

(ii) u^* が、 Σ 上₂ 有界かつ、right-left continuous であるとき。

(a) $u^* \geq g$ on Σ かつ、 u^* は、additively excessive

i.e. 任意の $(s, x) \in \Sigma, \pi \in \Pi$ は_{レ₂}.

$$u^*(s, x) \geq D_x^{\pi} u^*(s, x), \quad t \geq s,$$

$$\liminf_{t \downarrow s} u^*(\Sigma_t^{\pi}) \geq u^*(s, x) \quad P_{(s, x)}^{\pi} \text{-a.s.}$$

(b) h が additively excessive かつ、 $h \geq g$ on Σ で
みたすならば、 $h \geq u^*$ on Σ (u^* の最小性)。

(iii) 任意の固定 $t = s \geq 0$ は_{レ₂}. $u^*(s, \cdot)$ は S 上₂ universally measurable な関数である。

§ 4. 最適性に対する必要条件と十分条件

F を、 Σ 上の有界 Borel 可測作用素の全体とし、

$$F^\pi = \{ f \in F \mid \lim_{\tau \downarrow 0} T_\tau^\pi f(z) = f(z) \quad \forall z \in \Sigma \}, \quad \pi \in \Pi,$$

$$\text{とおく。} \quad T_\tau^\pi f(s, x) = E_{(s, x)}^\pi [f(Z_{s+\tau}^\pi)].$$

$$A^\pi f(z) = \lim_{\tau \downarrow 0} \frac{1}{\tau} [T_\tau^\pi f(z) - f(z)], \quad \pi \in \Pi, \quad z \in \Sigma,$$

$$U^\pi f(z) = \lim_{\tau \downarrow 0} \frac{1}{\tau} [D_{s+\tau}^\pi f(z) - f(z)], \quad \pi \in \Pi, \quad z = (s, x) \in \Sigma,$$

上の作用素は、右辺が存在して、 F^π に属するときには定義し、

A^π の定義域 $\Sigma \otimes^\pi (\subset F^\pi)$ とする。

補題 4.1. $f \in F$ に対して次の仮定する；

(i) $\frac{\partial}{\partial s} f, \frac{\partial^-}{\partial x} f$ が存在して、有界。

(ii) $\frac{\partial}{\partial s} f, \frac{\partial^-}{\partial x} f$ はともに Σ 上で right-left continuous。

このとき、 $f \in \mathcal{Q} \equiv \bigcap_{\pi \in \Pi} \mathcal{Q}^\pi$ かつ

$$A^\pi f(s, x) = \frac{\partial}{\partial s} f(s, x) - \pi(s, x) \frac{\partial^-}{\partial x} f(s, x) \delta(x)$$

$$+ \lambda(s, x) \int_0^\infty (f(s, x+v) - f(s, x)) H(dv),$$

$$== 2^-. \quad \delta(x) = 1 \quad \text{if } x > 0, \quad = 0 \quad \text{if } x = 0.$$

次に、

$$U^\pi f(s, x) = A^\pi f(s, x) + R^\pi(s, x) + \lambda(s, x) \int_0^\infty f(s, x, x+v) H(dv).$$

証明は、 A^π, U^π の定義にしたがって、実際に計算すればよい。

補題 4.2. $f: \Sigma \times \Xi$ 上の additively excessive function f とす。

このとき、各 $(s, x) \in \Sigma$, $\pi \in \Pi$ と、 $\tau \in \sigma(P_{(s, x)}^\pi - a.s.)$ とす。

任意の τ , $\sigma \in C_s(\pi)$ に対して

$$D_\tau^\pi f(s, x) \geq D_\sigma^\pi f(s, x).$$

証明は、Sirjaev [13] の Lemma III.5 を参照。

任意に固定した τ ($0 < \tau \leq \infty$) に対して

$$\xi \equiv s + \min(\tau, \nu(\Sigma_s^\pi)), \quad s \geq 0, \quad \pi \in \Pi,$$

とし、また、 $\Gamma^* \equiv \{z \in \Xi \mid u^*(z) = g(z)\}$,

$$\sigma^* \equiv \inf\{\tau \geq s \mid \Sigma_s^\pi \in \Gamma^*\}, \quad s \geq 0, \quad \pi \in \Pi,$$

とかく。

定理 4.1. (最適性に対する必要条件)

(π^*, τ^*) が optimal である

(i) $\varphi_{\tau^*}^{\pi^*}$ が上から有界で、 Ξ 上で right-left continuous

(ii) $\frac{\partial}{\partial s} \varphi_{\tau^*}^{\pi^*}$ と $\frac{\partial}{\partial x} \varphi_{\tau^*}^{\pi^*}$ がともに存在して、有界かつ Ξ 上で right-left continuous

であるならば、以下が成り立つ；

(a) $\tau^* \geq \sigma^*$ $P_z^{\pi^*} - a.s.$ ($\forall z \in \Xi$),

(b) (π^*, σ^*) も optimal,

(c) $\varphi_{\tau^*}^{\pi^*} (= \varphi_{\sigma^*}^{\pi^*})$ は、次の 2 組の関係式をみたす；

$$\begin{cases} \max_{\pi \in \Pi} U^\pi \varphi_{\tau^*}^{\pi^*}(z) = 0, & z \notin T^* \\ \varphi_{\tau^*}^{\pi^*}(z) = q(z), & z \in T^* \end{cases}$$

$$\begin{cases} \max_{\pi \in \Pi} U^\pi \varphi_{\tau^*}^{\pi^*}(z) \leq 0, & z \in Z, \\ \varphi_{\tau^*}^{\pi^*}(z) \geq q(z), \\ [\varphi_{\tau^*}^{\pi^*}(z) - q(z)] [\max_{\pi \in \Pi} U^\pi \varphi_{\tau^*}^{\pi^*}(z)] = 0, \end{cases}$$

(証明)

(a) 定理3.2の(ii)から、 $U^* = \varphi_{\tau^*}^{\pi^*}$ は additively excessive である。 $U^* \geq q$ on Z であるから、補題4.2より。

$$U^*(z) \geq D_{\tau^*}^{\pi^*} U^*(z) \geq D_{\tau^*}^{\pi^*} q(z).$$

また、 (π^*, τ^*) の最適性より、

$$U^*(z) = \varphi_{\tau^*}^{\pi^*}(z) = D_{\tau^*}^{\pi^*} q(z), \quad z \in Z.$$

$\cup \subseteq \mathbb{R}^n \setminus Z$

$$U^*(z) = D_{\tau^*}^{\pi^*} U^*(z) = D_{\tau^*}^{\pi^*} q(z), \quad z \in Z.$$

明らかに、 $U^*(Z_{\tau^*}^{\pi^*}) \geq q(Z_{\tau^*}^{\pi^*})$ $P_z^{\pi^*}$ -a.s. ($z \in Z$)。

しかし、ある $z_0 \in Z$ は $\not\in \cup$ 。

$$P_{z_0}^{\pi^*} [U^*(Z_{\tau^*}^{\pi^*}) > q(Z_{\tau^*}^{\pi^*})] > 0$$

と仮定する

$$U^*(z_0) = D_{\tau^*}^{\pi^*} U^*(z_0) > D_{\tau^*}^{\pi^*} q(z_0).$$

これは矛盾である。 $\cup \subseteq \mathbb{R}^n \setminus Z$ 、各 $z \in Z$ は $\not\in \cup$ 。

$$U^*(Z_{\tau^*}^{\pi^*}) = q(Z_{\tau^*}^{\pi^*}) \quad P_z^{\pi^*}\text{-a.s.}.$$

よって、 σ^* の定義より、 $\tau^* \geq \sigma^*$ $P_z^{\pi^*}$ -a.s. ($\forall z \in Z$)。

(b) (a) の結果と、補題 4.2 から、各 $z \in \mathbb{Z}$ に對し z .

$$u^*(z) \geq \varphi_{\pi^*}^{\pi^*}(z) = D_{\pi^*}^{\pi^*} g(z) = D_{\pi^*}^{\pi^*} u^*(z) \geq D_{\pi^*}^{\pi^*} u^*(z) = u^*(z).$$

$z \in \mathbb{Z}$ に對し z . $u^*(z) = D_{\pi^*}^{\pi^*} g(z) = \varphi_{\pi^*}^{\pi^*}(z)$, $z \in \mathbb{Z}$, つまり、

(π^*, π^*) は、optimal z である。

(c) (b) より、 $u^* = \varphi_{\pi^*}^{\pi^*} = \varphi_{\pi^*}^{\pi^*}$ であるから、 $\varphi_{\pi^*}^{\pi^*}$ は z 証明する。 $\varphi_{\pi^*}^{\pi^*}$ が additive excessive z である = とく。

補題 4.2 より、任意の $\pi \in \Pi$ に對し z .

$$\begin{aligned} \varphi_{\pi^*}^{\pi^*}(s, x) &\geq D_s^\pi \varphi_{\pi^*}^{\pi^*}(s, x) \\ &= [1 - G^\pi(s, x; t)] \left[\int_s^{s+t} r^\pi(w, \gamma(w)) dw + \varphi_{\pi^*}^{\pi^*}(s+t, \gamma(s+t)) \right] \\ &\quad + \int_0^\infty \int_s^t G^\pi(s, x; dw) \left[\int_s^{s+w} r^\pi(w', \gamma(w')) dw' \right. \\ &\quad \left. + \beta(s+w, \gamma(s+w), \gamma(s+w)+v) + \varphi_{\pi^*}^{\pi^*}(s+w, \gamma(s+w)+v) \right] dH(w) \end{aligned}$$

$$= z. \quad G^\pi(s, x; t) = P_{(s, x)}^\pi [V(s, x) \leq t].$$

この式において $\pi = \pi^*$ のときは、strong Markov 性はよ).

等式が成立する。したがって、上の両辺に $\frac{1}{t}$ を掛け z . 極限操作を z . 補題 4.1 を用いれば、得た結果を証明される。

補題 4.3. (Dynkin の公式)

各 $s \geq 0$ に對し z . $(\pi, \tau) \in \Lambda(s)$ とする。このとき、

$f \in \mathcal{D}^\pi$ やつ、各 $z \in \mathbb{Z}$ に對し z . $E_z^\pi[\tau] < \infty$ であるならば

各 $(s, x) \in \mathbb{Z}$ に付く

$$E_{(s, x)}^{\pi} \left[\int_s^{\tau} U^{\pi} f(\mathbb{Z}_t^{\pi}) dt \right] = D_{\tau}^{\pi} f(s, x) - f(s, x).$$

定理 4.2. (最適性に対する十分条件)

(π^*, τ^*) が存在し \mathbb{Z} .

(i) $(\pi^*, \tau^*) \in \Lambda(s)$ ($\forall s \geq 0$),

(ii) $\varphi_{\tau^*}^{\pi^*} \in \mathcal{Q}$, もつ,

(iii) $\begin{cases} \varphi_{\tau^*}^{\pi^*}(z) \geq q(z), & \forall z \in \mathbb{Z}, \\ \sup_{\pi \in \Pi} U^{\pi} \varphi_{\tau^*}^{\pi^*}(z) \leq 0, & \forall z \notin T^* \end{cases}$

をみたならば、 (π^*, τ^*) は optimal をある。

(したがって、定理 4.1 より、 (π^*, τ^*) が optimal をある。)

(証明)

$z \in T^*$ に付くは、明らかに

$$U^*(z) \geq \varphi_{\tau^*}^{\pi^*}(z) \geq q(z) = U^*(z)$$

をみたから、 $U^*(z) = \varphi_{\tau^*}^{\pi^*}(z)$ 。

$v_N(\pi)$, $\mathbb{D}_N^{\varepsilon}$ は §3 で定義されたものとし。

$$T_N^{\varepsilon}(\pi) \equiv \{z \in \mathbb{Z} \mid v_N(\pi)(z) \leq q(z) + \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0$$

とおく。明らかに、 $U^*(z) \geq v_N(\pi)(z) \geq q(z)$ ($\forall \pi \in \Pi, \forall N < \infty, \forall z \in \mathbb{Z}$)

をみたから、任意の $\varepsilon > 0$ に付く $T^* \subset T_N^{\varepsilon}(\pi)$, $\mathbb{D}_N^{\varepsilon} \subseteq T^*$

もつ $\mathbb{D}_N^{\varepsilon} \subseteq N$ 。したがって、 $(s, x) \notin T^*$ に付く

$$\mathbb{Z}_t^{\pi} \notin T^* \quad \text{for } t \in [s, \mathbb{D}_N^{\varepsilon}] \quad (\text{a.s.}).$$

$(s, x) \notin T^*$ とする。上の議論と条件(iii)から、任意の $\pi \in \Pi$ と $N < \infty$, $\varepsilon > 0$ は次のよう。

$$E_{(s, x)}^\pi \left[\int_s^{s_N} u^\pi \varphi_{\tau^*}^{\pi^*}(\Sigma_t^\pi) dt \right] \leq 0.$$

補題4.3 が成り立つ。

$$\varphi_{\tau^*}^{\pi^*}(s, x) \geq D_{s_N}^\pi \varphi_{\tau^*}^{\pi^*}(s, x).$$

$\varphi_{\tau^*}^{\pi^*} \geq q$ であることを定理3.1から。

$$\varphi_{\tau^*}^{\pi^*}(s, x) \geq D_{s_N}^\pi q(s, x) = \varphi_{s_N}^\pi(s, x) \geq v_N(\pi)(s, x) - \varepsilon,$$

$\pi \in \Pi$ は次のよう。 $\sup \varepsilon < 1$, $\varepsilon \downarrow 0$, $N \rightarrow \infty$ とするとき、定理3.2から。
 $\varphi_{\tau^*}^{\pi^*}(s, x) \geq u^*(s, x)$ 。

以上より、 (π^*, τ^*) は optimal である。

定理4.3. $u^* \in Q$ とする。そのとき、 $\pi^* \in \Pi$ が存在する。

(i) $\pi^* \in C_s(\pi^*)$ ($\forall s \geq 0$),

(ii) $\varphi_{\pi^*}^{\pi^*} \geq q$ on Σ ,

(iii) $u^* u^*(z) = 0$, $\forall z \notin T^*$,

であるならば、 (π^*, τ^*) は optimal である。

(証明)

$z \in T^*$ は次のよう。明らかに $u^*(z) = \varphi_{\pi^*}^{\pi^*}(z)$ 。

$(s, x) \notin T^*$ とする。各 $N < \infty$ は次のよう。
 $\varsigma^N \equiv \min(\pi^*, N)$ とする。
 条件(iii)から、各 $N < \infty$ は次のよう。

$$E_{(s, x)}^{\pi^*} \left[\int_s^{s_N} u^* u^*(\Sigma_t^{\pi^*}) dt \right] = 0.$$

補題 4.3 やら

$$u^*(s, x) = D_{\pi^*}^{\pi^*} u^*(s, x).$$

$\pi^* \in C_s(\pi^*)$ であるから、 $N \rightarrow \infty$ とすると

$$u^*(s, x) = D_{\pi^*}^{\pi^*} u^*(s, x) = D_{\pi^*}^{\pi^*} q(s, x) = \varphi_{\pi^*}^{\pi^*}(s, x).$$

以上より、 (π^*, π^*) は optimal である。

§5. 平均型の最適化問題

二の節で考えた平均型は、Taylor[14] で導入されたものを、政策と停止規則を対とした M/G/1 待ち行列における最適化問題で議論したものである。目的は、平均型最適であるための十分条件を与えることである。

$$\pi \in \Pi, (s, x) \in \Sigma \text{ に對し } \exists \quad \tilde{C}_{(s, x)}(\pi) \in s < E_{(s, x)}^\pi[\tau] < \infty$$

とみたす $\tau \in C_s(\pi)$ の全体とし、

$$\tilde{\Lambda}(s, x) \equiv \{(\pi, \tau) \in \Lambda(s) \mid \tau \in \tilde{C}_{(s, x)}(\pi)\},$$

とおく。

二のとおり、平均型評価関数を次で定める； $(s, x) \in \Sigma, (\pi, \tau) \in \tilde{\Lambda}(s, x)$ に對し

$$\Phi_\tau^\pi(s, x) \equiv \varphi_\tau^\pi(s, x) / (E_{(s, x)}^\pi[\tau] - s).$$

また、平均型最適利得関数を

$$v^*(s, x) \equiv \sup_{(\pi, \tau) \in \tilde{\Lambda}(s, x)} \Phi_\tau^\pi(s, x), \quad (s, x) \in \Sigma,$$

とし、 $(\pi^*, \tau^*) \in \tilde{\Lambda}(z_0)$ かつ、 $z_0 \in Z$ 平均型最適であるとは、
 $u^*(z_0) = \Phi_{\tau^*}^{\pi^*}(z_0)$ と書きたい。

constant d , $z = (s, x) \in Z$, $(\pi, \tau) \in \Lambda(s) = \mathbb{R}^d \cup Z$.

$$\begin{aligned}\varphi_{\tau}^{\pi}[d](z) &\equiv E_{(s, z)}^{\pi} \left[\int_s^{\tau} (r^{\pi}(Z_t^{\pi}) - d) dt \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^{\infty} g(X_{\tau_j}^{\pi}) \mathbf{1}_{(\tau_j \leq \tau)} + g(Z_{\tau}^{\pi}) \right],\end{aligned}$$

$$u^*[d](z) \equiv \sup_{(\pi, \tau) \in \Lambda(s)} \varphi_{\tau}^{\pi}[d](z),$$

$$\tilde{U}[d](z) \equiv \sup_{(\pi, \tau) \in \tilde{\Lambda}(z)} \varphi_{\tau}^{\pi}[d](z),$$

$$\Gamma_d \equiv \{z \in Z \mid u^*[d](z) = g(z)\}$$

$$\sigma_d \equiv \inf \{t \geq s \mid Z_t^{\pi} \in \Gamma_d\}, \quad s \geq 0, \pi \in \Pi.$$

仮定3. constant $d = \mathbb{R}^d \cup Z$. $r \in r - d$ と置きかえ
 $z = t = \bar{z}$ とし、仮定1, 2 をみたす。 $(=$ のとき、 d は仮定
 3 をみたすといふ = $t = \bar{z}$)

補題5.1. 仮定3をみたす任意の constant $d = \mathbb{R}^d \cup Z$.

$\pi^* \in \Pi$ が存在 $\cup Z$.

$$(i) \quad \sigma_d \in C_s(\pi^*) \quad (\forall s \geq 0),$$

$$(ii) \quad \varphi_{\sigma_d}^{\pi^*}[d] \in \mathcal{A},$$

$$(iii) \quad \varphi_{\sigma_d}^{\pi^*}[d] \geq g \quad \text{on } Z,$$

(iv) $\sup_{\pi \in \Pi} U^\pi \varphi_{\tau_d}^{\pi*}[d](z) \leq 0$, $\forall z \notin T_d$,
 であるならば, $U^*[d] = \varphi_{\tau_d}^{\pi*}[d]$ on Z .

証明は、定理4.2からすぐ示せること。

定理5.1. (Taylorの拡張)

$z_0 \in Z$ を固定し、constant d が T_d を含む π^* とす
 る。 $=0$ とき、 $(\pi^*, \tau^*) \in \widehat{\Lambda}(z_0)$ が存在して、

$$\widetilde{U}[d](z_0) = \varphi_{\tau^*}^{\pi^*}[d](z_0) = 0$$

であるならば、 (π^*, τ^*) は $\underbrace{(z_0, 2^n)}$ 平均型最適である、i.e.
 $U^*(z_0) = \Phi_{\tau^*}^{\pi^*}(z_0) = d$ 。

また、逆も真である。

(証明)

Φ_τ^π と $\varphi_\tau^\pi[d]$ の定義から、明らかに $z = (s, x) \in Z$ は τ と π の

$$(*) \quad \varphi_\tau^\pi[d](z) = (\Phi_\tau^\pi(z) - d)(E_z^\pi[\tau] - s), \quad (\pi, \tau) \in \widehat{\Lambda}(z).$$

したがって、 $\varphi_{\tau^*}^{\pi^*}[d](z_0) = 0$ 以下で τ^* が $\Phi_{\tau^*}^{\pi^*}(z_0) = d$ である。

任意の $(\pi, \tau) \in \widehat{\Lambda}(z_0)$ は τ と π の $\varphi_\tau^\pi[d](z_0) = 0 \geq \varphi_\tau^\pi[d](z_0)$

より $\Phi_\tau^\pi(z_0) \leq d$ 。したがって τ^* が $\Phi_{\tau^*}^{\pi^*}(z_0) = d$ 。

逆に、 $d = U^*(z_0) = \Phi_{\tau^*}^{\pi^*}(z_0)$ とおくと、(*) から、任意の
 $(\pi, \tau) \in \widehat{\Lambda}(z_0)$ は τ と π の

$$0 = \varphi_{\tau^*}^{\pi^*}[d](z_0) \geq \varphi_\tau^\pi[d](z_0).$$

$$\tau \in \widehat{\Lambda}(z_0) \quad \widetilde{U}[d](z_0) = \varphi_{\tau^*}^{\pi^*}[d](z_0) = 0.$$

次の定理では、Ross[12]とは異なり形で十分条件を与えます。

定理5.2. $z_0 = (s_0, x_0) \in \Sigma$ を固定する。このとき、

constant d と $\pi^* \in \Pi$ が存在して、

(i) d は π^* の $\pi^* \in \Pi$ である。

(ii) $u^*[d](z_0) = 0$

(iii) $\sigma_d \in \widetilde{C}_{z_0}(\pi^*)$

(iv) $\varphi_{\sigma_d}^{\pi^*}[d] \in \Delta$

(v) $\begin{cases} \varphi_{\sigma_d}^{\pi^*}[d] \geq q & \text{on } [s_0, \infty) \times S, \\ \sup_{\pi \in \Pi} U^\pi \varphi_{\sigma_d}^{\pi^*}[d](z) \leq 0, & \forall z \notin T_d \cup [0, s_0] \times S, \end{cases}$

であるならば、 (π^*, σ_d) は、 z_0 の平均型最適であり、かつ $u^*(z_0) = d$ 。

(証明)

$q(z_0) = 0$ とする。 $u^*[d](z_0) = 0$ のとき $\sigma_d = s_0$ 。

$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\sigma_d \notin \widetilde{C}_{z_0}(\pi^*)$ 。 \Rightarrow 条件 (iii) が反する。よって

$q(z_0) \neq 0$ 。 $\forall p \in \mathbb{R}$ $\exists z \in \Sigma$ $z_0 \notin T_d$ 。

補題5.1 と条件 (i) ~ (v) やら

$$\varphi_{\sigma_d}^{\pi^*}[d](z_0) = u^*[d](z_0) = 0.$$

また、 $u^*[d](z) \geq \widetilde{U}[d](z) \geq \varphi_{\sigma_d}^{\pi^*}[d](z)$ であるから、

$$\widetilde{U}[d](z_0) = \varphi_{\sigma_d}^{\pi^*}[d](z_0) = 0.$$

定理5.1 より、 $u^*(z_0) = \varphi_{\sigma_d}^{\pi^*}(z_0) = d$ 。

References

- [1] Bieber,G., On optimal control of Markov processes with application to a class of service systems, *Math. Operat. Statist., Ser. Optimization*, 10, 143-162 (1979)
- [2] Crabbill,T.B., D.Gross and M.J.Magazine, A classified bibliography of research on optimal design and control of queues, *Operations Res.*, 25, 219-232 (1977)
- [3] Doshi,B.T., Optimal control of the service rate in an M/G/1 queueing system, *Adv. Appl. Prob.*, 10, 682-701 (1978)
- [4] Furukawa,N. and S.Iwamoto, Stopped decision processes on complete separable metric spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 31, 615-658 (1970)
- [5] Hordijk,A., Dynamic Programming and Markov Potential Theory, *Mathematisch Centrum*, Amsterdam, 1974
- [6] Ito,K., Lectures on Stochastic Processes, *Tata Inst. Fundamental Res.*, Bombay, 1961
- [7] Krylov,N.V., Control of a solution of a stochastic integral equation, *Theory Prob. Appl.*, 17, 114-131 (1972)
- [8] Mitchell,B., Optimal service-rate selection in an M/G/1 queue, *SIAM J. Appl. Math.*, 24, 19-35 (1973)
- [9] Nisio,M., On nonlinear semigroups for Markov processes associated with optimal stopping, *Appl. Math. Opt.*, 4, 143-169 (1978)
- [10] Ohtsubo,Y., Optimal control of the service rate and the stopping rule in an M/G/1 queue, *Mem. Fac. Sci., Kochi Univ., Ser.A*, 3, 75-103 (1982)
- [11] Prabhu,N.U., Stochastic control of queueing systems, *Naval Res. Logist. Quart.*, 21, 411-418 (1974)
- [12] Ross,S.M., Infinitesimal look-ahead stopping rules, *Ann. Math. Statist.*, 42, 297-303 (1971)

- [13] Širjaev,A.N., Statistical Sequential Analysis, Transl. Math. Monogra.
Amer. Math. Soc., 1973
- [14] Taylor,H.M., Optimal stopping in a Markov process, Ann. Math. Statist.
39, 1333-1344 (1968)