

## 完全交叉環における Zariski-Lipman の予想について

名大(理) 吉野 雄二

Lipman は、その論文 [L] の中で次の様な問題を考え始めた。

(\*)  $A$  が標数 0 の体上上の locality のとき,  $\text{Der}_k(A)$  が、 $A$  上 free ならば、 $A$  は regular か？

いわゆる、Zariski-Lipman 予想である。

これに関する、次の場合にはすでに肯定的に知られている。

(1) 1 次元の場合 (Lipman [L])

(2) hypersurface の場合 (Scheja-Storch [SS-1])

(3) graded case (Hochster [H-2])

ここでは、次に調べるべきは、完全交叉な（以下 C-I とする）局部環であるという信念に基づき考察を進めた。

Hochster が [H-1] の中で、graded C-I の場合の Z-L 予想を証明でき根拠は、次の 2 つの事実にあるようと思われる。

- (1) 0次元 C-I の socle は, Jacobian を使って書くこと  
ができるること。
- (2) Euler derivation が存在すること。

本稿では, §1 でこの主張(1) が局所環の場合にも成立  
することを示す。更に, §2 では, Euler derivation の存在  
を仮定せずに話がどこまで進むかについて考える。

但し, Z-予想を考える上で, 局所環は完備化しても,  
かまわないといふことを注意しておく。したがって, 以下  
では, もっぱら, 完備な局所環に話を限って論ずることにする。

### §1.

この節の目標は, 次の定理を示すことにある。

定理 1.  $k$  を標数 0 の体,  $B = k[[x_1, \dots, x_n]]/(f_1, \dots, f_n)$   
が, 0 次元の C-I のとき,  $B$  の socle は,  $J = \det(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})$   
で生成される。

これを, 証明するためには, 多少の準備が必要。

命題 1.  $k$  を標数 0 の体,  $B$  を上 finite な local  
ring とする。このとき, トレース  $S_p := S_p^B|_k$  が,  
 $\text{Hom}_k(B, k)$  の socle を生成する。

(証)  $\text{Hom}_k(B, k)$  の socle は、 $k$  上 1 次元であることに注意する。 $\lambda = 2$ ,  $S_p \neq 0$  かつ  $m_B \cdot S_p = 0$  をいはす。  
 $S_p \neq 0$  は、標数が 0 より明らか。 $m_B \cdot S_p = 0$  をうためには、 $\forall x \in m_B$  と  $\forall y \in B$  について、 $x \cdot S_p(y) = S_p(xy) = 0$  をいはす。即ち、 $S_p(m_B) = 0$  をいはす。よのびか、これは  $m_B$  の元が巾零であることから導びかれる。■

以下  $A$  を Noether 環,  $B$  を  $A$  上の finite projective algebra とする。この時、同型  $\psi : \text{Hom}_A(B, B) \rightarrow B^* \otimes_A B$  があることは、よく知られている。但し、 $B^* = \text{Hom}_A(B, A)$ 。また、 $x \in B$  に対して、 $S_p(x) \in A$  は次の様に定義される。

$\mu_x \in \text{Hom}_A(B, B)$  と  $x$  との homothety,  $\lambda \in \mathbb{Z}$ ,  
 $\psi(\mu_x) = \sum_i b_i^* \otimes b_i$  ( $b_i^* \in B^*$ ,  $b_i \in B$ )  
 とするとき、 $S_p(x) := \sum_i b_i^*(b_i)$ .  
 $S_p \in \text{Hom}_A(B, A)$  である。

注意 次は同値である。

- (1)  $\text{Hom}_A(B, A) = B \cdot S_p$ .
- (2)  $B$  は  $A$  上 unramified (ie  $\Omega_{B/A} = 0$ )

(証)  $A$  の各実の fiber を考えよから、始めから  $A$  は、体としてよい。しかし、この時には、よく知られている。■

定義 (Scheja-Storchの三角, cf. [SS-2])

$$\begin{array}{ccc} B \otimes_A B & \xrightarrow{\mu} & B \\ \downarrow \kappa & \nearrow \nu & \\ \text{Hom}_A(\text{Hom}_A(B, A), B) & & \end{array}$$

を次のようく定義する。

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \left( \sum b \otimes b' \right) := \sum bb' \\ \kappa \left( \sum b \otimes b' \right)(\phi) := \sum \phi(b) b' \quad (\phi \in \text{Hom}_A(B, A)) \\ \nu (\psi) := \psi(s_p) \end{array} \right.$$

補題 1. (1)  $\kappa$  は同型である。

(2)  $B^e = B \otimes_A B$ ,  $I = \text{Ker } \mu$ ,  $\partial = \text{Ann}_{B^e} I \subset B^e$  とおくとき, 同型射  $\kappa : I \rightarrow \mathcal{Z}$ ,  $\mathcal{Z}$  は,  $\text{Hom}_A(\text{Hom}_A(B, A), B)$  の submodule  $\text{Hom}_B(\text{Hom}_A(B, A), B)$  と同型である。

(証) (1) は well known.

$$(2) x = \sum b_i \otimes b'_i \in B^e \quad \kappa : I \rightarrow \mathcal{Z},$$

$$\kappa(x) \in \text{Hom}_B(\text{Hom}_A(B, A), B)$$

$$\Leftrightarrow \forall b \in B \quad \forall \phi \in \text{Hom}_A(B, A) \quad \kappa \circ \phi = \phi \circ \kappa,$$

$$\sum \phi(bb_i)b'_i = \sum \phi(b)b'b'_i$$

$$\Leftrightarrow \kappa((b \otimes 1)x) = \kappa((1 \otimes b)x) \quad (\forall b \in B)$$

$$\Leftrightarrow x(b \otimes 1 - 1 \otimes b) = 0 \quad (\forall b \in B) \Leftrightarrow x \in \partial. \blacksquare$$

補題 2. Scheja-Storch の三角は,  $\mathcal{Z}$  に制限すると

可換である。即ち、

$$\begin{array}{ccc} \text{or} & \xrightarrow{\mu} & \\ \kappa \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \\ & \curvearrowright & \end{array}$$

$$\text{Hom}_B(\text{Hom}_A(B, A), B)$$

(証明は、計算だけなので省略する。)

さて、 $B = A[[x_1 \dots x_n]]/(f_1 \dots f_n)$  が relatively C-I (ie,  $B$  は  $A$  上 finite projective で,  $\{f_1 \dots f_n\}$  が regular sequence.) とする。この時、

$$f_i \otimes 1 - 1 \otimes f_i = \sum a_{ij} (x_j \otimes 1 - 1 \otimes x_j) \\ (a_{ij} \in A[[x]] \widehat{\otimes}_A A[[x]])$$

$$\Delta := \det(a_{ij}) \in B^e$$

$$\text{とおくと, } \Delta \in \text{or} \text{ かつ, } \mu(\Delta) = J \left( := \det \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \right)$$

となる。したがって、補題 2. より次を得る。

系 上の状況のもとで、 $J = \kappa(\Delta)(S_p)$

更に、次のことが成立する。

命題 2.  $B$  が  $A$  上 relatively C-I とする。このとき、

$\text{Hom}_A(B, A)$  は rank 1 の  $B$ -free module である。且の

生成元を  $\varepsilon$  とする。すると、

$$S_p = u \cdot J \cdot \varepsilon$$

(但し、 $J$  は上記の如く  $J = \det \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)$  ) が成り立つ。  
 $u$  は  $B$  の unit である。

(証) 上の記号をそのまま使う。先ず,  $\Omega = \Delta \cdot B^e$  とすることを示そう。これは, ring  $C := B \widehat{\otimes}_A A[[x]]$  の中で, ideal  $(1 \otimes f_1, \dots, 1 \otimes f_n, \Delta)C$  と  $(1 \otimes x_1, \dots, 1 \otimes x_n)C$  は,  $(1 \otimes f_1, \dots, 1 \otimes f_n)C$  上 algebraic に link していることから従う。さて,  $\Omega = \Delta \cdot B^e$  と補題 1.(2) より,  $u' := \kappa(\Delta)(\gamma)$  は  $B$  の unit である。一方, 上の系において,  $S_p = c\gamma$  ( $c \in B$ ) とする。  
 $J = \kappa(\Delta)(S_p) = \kappa(\Delta)(c\gamma) = cu'$   
 これより 命題を得る。■

命題 1. と 2. から定理 1. は容易に従う。実際, 命題 2 より, 同型  $B \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_k(B, k)$  によって,  $J$  は, (unit を除けば)  $S_p$  に対応する。ところで, 命題 1. より,  $S_p$  は  $\text{Hom}_k(B, k)$  の socle の生成元故,  $J$  は  $B$  の socle の生成元となる。

## § 2.

この節では, もし次の予想が正しければ, 一般の C-I local ring における Z-L 予想も正しいことを示そう。  
予想 (\*\*)  $k$  を標数 0 の体,  $A = k[[x_1 \dots x_n]]/(f_1, \dots, f_{n-2})$  を 2 次元の C-I local ring で,  $A$  は  $k$  の subring  $C$

$\zeta \in C$  上 analytic independent を元でにようて,  $A \cong C[[\zeta]]$  となることは, 決してないとする。このとき,  $\text{Der}_k(A)$  の極小生成元の 1つ<sup>2</sup> "ある derivation  $D$ "<sup>2</sup>,  $A$  の parameter ideal を stable とするものが存在する?

$f_i$  達が "homogeneous" ならば,  $D$  は Euler derivation をとればよいことは, すぐ分かる。

さて, 上の予想 (\*\*) が Z-L 予想を導くことを示すために, いくつか必要を準備しておこう。

$k \rightarrow A$  を一般に ring homomorphism とする。 $A$ -module  $M$  に対して,

$$\mathcal{D}_k^A(M) := \left\{ f \in \text{Hom}_k(A, M) \mid f(abc) + abf(c) = bf(ac) + af(bc), \forall a, b, c \in A \right\}$$

とおく。

$\text{Hom}_k(A, M)$  には, 兩側から  $A$  が作用する, 即ち,  
 $A^e := A \otimes_k A$  - 加群<sup>2</sup>であることに注意しよう。このとき,  
補題 1. (1)  $\mathcal{D}_k^A(M)$  は  $\text{Hom}_k(A, M)$  の  $A^e$ -sub-module<sup>2</sup> である。

$$(2) \begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & \text{Hom}_k(A, M) \\ \downarrow m & \downarrow & \\ a & \mapsto & (a \mapsto am) \end{array}$$

の  $A^e$ -submodule  $\mathcal{I}$  ある。

(3)  $\text{Der}_k(A, M)$  は  $\text{Hom}_k(A, M)$  の左- $A$  submod.  
 $\mathcal{I}$  ある。

証、  $\mu: A^e \rightarrow A$  で  $\mu(\sum a_i \otimes b_i) = \sum a_i b_i$   
 $I := \text{Ker } \mu$  とおく。次の事柄は各自で明白である。

補題 2. 左  $A$ -modules と  $\mathcal{I}$ .

$$\mathcal{D}_k^A(M) \cong M \oplus \text{Der}_k(A, M).$$

補題 3.  $A^e$ -modules と  $\mathcal{I}$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_k^A(M) &\cong \text{Hom}_{A^e}(A^e/I^2, \text{Hom}_k(A, M)) \\ &\cong \text{Hom}_A(A^e/I^2, M) \end{aligned}$$

定義  $A_k^\Omega := A^e/I^2 = A \ltimes \Omega_{A/k}$

$\mathcal{D}_k^A(M)$  は,  $A_k^\Omega$ -module  $\mathcal{I}$ , 作用は次のようく  
 定義される:  $\mathcal{I}$  を注意しておこう。

$$\begin{cases} a \oplus db \in A_k^\Omega = A \ltimes \Omega_{A/k} \\ m \oplus D \in \mathcal{D}_k^A(M) = M \oplus \text{Der}_k(A, M) \end{cases}$$

$$\text{に対し}, (a \oplus db)(m \oplus D) = \{am + D(b)\} \oplus aD$$

注意.  $A$  が  $k$  上 analytic のときには

$$A^e = A \hat{\otimes}_k A$$

$\Omega_{A/k} = \text{the universal finite module of differentials}$   
 $\text{of } A \text{ over } k$ .

して、上の事は全て成立する。

すな、  $A \cong A_k^{\Omega}/\Omega_{A/k}$  によると  $\underbrace{A_k^{\Omega}}_{A \text{ は}}$  の factor ring と H3: と似てゐる。

補題4.  $A$  の ideal  $\Omega$  で  $\Omega = \{D(x) \mid D \in \text{Der}_k(A), x \in A\}$  とおくと、 $A$ -module として次の同型がある。

$$\mathcal{D}_k^A(A) \otimes_{A^{\Omega}} A \cong A/\Omega \oplus \text{Der}_k(A)$$

以下では、 $k$  を標数 0 の体、 $R = k[[x_1, \dots, x_n]]$

$A = R/(f_1, \dots, f_r)$ ;  $(n-r)$  次元の CI とする。

$dx_1, \dots, dx_n \in A_k^{\Omega} = A \times \Omega_{A/k}$  の元を考へる。

更に、 $j_i = (\frac{\partial f_i}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n}) \in A^n \subset (A^{\Omega})^n$

とする。また、任意に与えられた derivation  $D$

$\in \text{Der}_k(A)$  に対して、

$$S(D) := A \oplus A \cdot D \subseteq \mathcal{D}_k^A(A)$$

とおく。  $S(D)$  は、 $\mathcal{D}_k^A(A)$  の  $A_k^{\Omega}$ -submodule である。

$A_k^{\Omega}$ -module  $S(D) \circ \{dx_1, \dots, dx_n\}$  に関する

Koszul complex  $K.(dx_1, \dots, dx_n; S(D))$  を考へる

$j_i \otimes 1 (\in (A_k^{\Omega})^n \otimes_{A^{\Omega}} S(D))$  達は、1 次の cycle で  
与えられるから、

$$(j_1 \wedge \dots \wedge j_r) \otimes 1 \in H_r(dx_1, \dots, dx_n : S(D))$$

を考えることができる。

補題5  $D \in \text{Der}_k(A)$  に対して,  $A$  の parameter 系

$$\underline{y} = (y_1, \dots, y_{n-r}) \text{ が存在して, } D(\underline{y}) \subseteq \underline{y} A$$

となるならば,

$$(j_1 \wedge \dots \wedge j_r) \otimes 1 \neq 0 \text{ in } H_r(dx_1 \cdots dx_n; S(D)).$$

(証)  $S = k[[y_1, \dots, y_{n-r}]]$ ,  $r = (y_1, \dots, y_{n-r})S$  とおこう。  $S \rightarrow A$  は finite である。  $\tilde{A} = A/rA$  とする。  $\tilde{A}_k^{\Omega} = \tilde{A} \times \Omega \tilde{A} = \tilde{A} \times (\Omega_A/(dy_1 \cdots dy_{n-r})A)$  である。  $D$  は仮定より,  $\tilde{A}$  上の derivation を導くから。

$$\tilde{S}(D) := \tilde{A} \oplus \tilde{A} \cdot D \subseteq D_{\tilde{A}}^{\tilde{A}}(\tilde{A}) \text{ を考えることができる。}$$

$$\tilde{S}(D) = S(D) \otimes_{A^{\Omega}} \tilde{A}^{\Omega} \text{ に注意しよう。}$$

$$j_{r+j} := \left( \frac{\partial y_j}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial y_j}{\partial x_n} \right) \quad (j=1, 2, \dots, n-r)$$

は,  $k.(dx_1 \cdots dx_n : \tilde{S}(D))$  の 1/R の cycle を与える。

$$\{(j_1 \wedge \dots \wedge j_r) \otimes 1\} \wedge \{(j_{r+1} \wedge \dots \wedge j_n) \otimes 1\}$$

$$= \frac{x_1 \cdots x_r y_{r+1} \cdots y_n}{x_1 \cdots \cdots x_n} \otimes 1.$$

は、前節の定理 1 より  $\wedge^n (\tilde{A}^{\Omega})^n \otimes_{\tilde{A}^{\Omega}} \tilde{S}(D)$  の元と 12.

0 である。したがって,  $H_n(dx_1 \cdots dx_n : \tilde{S}(D))$  の元と 12 0

である。これから,  $(j_1 \wedge \dots \wedge j_r) \otimes 1 \neq 0$  in  $H_r(dx_1 \cdots dx_n : S(D))$

がわかる。 ■

系.  $D \in \text{Der}_k(A)$  が  $A$  のある parameter ideal  $\mathfrak{e}$  動か  
さないならば,

$$j_1 \wedge \cdots \wedge j_r \neq 0 \quad \text{in } H_r(Dx_1, \dots, Dx_n; A)$$

(証) もし,  $0$  であると,  $\exists \sum_{i_1 \dots i_{r+1}} g_{i_1 \dots i_{r+1}} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{r+1}}$   
 $\in K_{r+1}(Dx_1, \dots, Dx_n; A)$  such that

$$j_1 \wedge \cdots \wedge j_r = \sum_{i_1 \dots i_r} \sum_j g_{i_1 \dots i_r j} Dx_j (e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} \wedge e_j)$$

これから.

$$(j_1 \wedge \cdots \wedge j_r) \otimes 1 = \sum_{i_1 \dots i_r} \sum_j g_{i_1 \dots i_r j} dx_j (e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} \wedge e_j) \otimes D$$

は,  $K_*(dx_1, \dots, dx_n; S(D))$  の boundary となり. 補題 5.  
に反する。■

補題 6. もし,  $\text{Der}_k(A)$  が  $A$ -free ならば,  $\mathbb{A}$  の  
base である任意の derivation  $D$  について,

$$j_1 \wedge \cdots \wedge j_r = 0 \quad \text{in } H_r(Dx_1, \dots, Dx_n; A)$$

(証)  $\text{Der}_k(A) = \bigoplus_{i=1}^{n-r} AD_i \cong A^{n-r}$  ( $D_i = D$ ) とするとき.

$\mathbb{A}$  の exact sequence である。

$$0 \rightarrow A^{n-r} \xrightarrow{\quad [D_i x_j] \quad} A^n \xrightarrow{\quad [\frac{\partial f_i}{\partial x_j}] \quad} A^r$$

したがって, 結論は free resolution or structure theorem

[BE] から容易に得られる。 ■

$A$  を 2 次元と仮定せず<sup>\*</sup>に予想 (\*\*) が成立する<sup>†</sup>すれば、Z-L 予想 が正しいことは、補題 5 の系と補題 6 より明らかである。話は 2 次元に限ってよいという理由は次の事実による。

定理 (Malliavin [M])

$A$  を上記の通りの C-I とする。このとき、 $A$  が  $(R_q)$ -condition をみたすことと、 $\Omega_{A/k}$  が  $q$ -torsion module であることは同値である。とくに、 $\Omega_{A/k}$  が reflexive  $A$ -module であるためには、 $A$  が  $(R_2)$ -condition をみたすことか必要十分である。

#### REFERENCES

- [BE] D.Buchsbaum and D.Eisenbud ; Some structure theorems for finite free resolutions, Adv. in Math. 12 (1974) 84-139.
- [L] J.Lipman ; Free derivation modules on algebraic varieties, Amer. J. Math. 87 (1965) 874-898.
- [M] M-P.Malliavin : Condition  $(a_q)$  de Samuel et q-torsion, Bull.Soc.Math. France 96 (1968) 193-196.
- [SS-1] G.Scheja and U.Storch ; Differentielle Eigenschaften der Lokalisierungen analytischer Algebren, Math. Ann. 197 (1972) 137-170.

[ SS-2 ] \_\_\_\_\_ ; Lokale Verzweigungstheorie, Schriftenreihe  
des Math. Inst. der Univ. Freiburg.

[ H-1 ] M.Hochster ; The Zariski-Lipman conjecture for  
homogeneous complete intersections, Proc. Amer. Math. Soc.  
49 (1975) 261-262.

[ H-2 ] \_\_\_\_\_ ; The Zariski-Lipman conjecture in the graded  
case, J. Algebra 47 (1977) No.2, 411-424.