

Noether環はいつ忠実加群に埋蔵されるか

東京理科大学大学院 山岸規久道

§1.序。

可換環 A と A 上の有限生成忠実加群 M を考える。自然数 r に対して、 M の上重直和を M^r と表わす。 M の生成系 $\{x_i\}_{i=1}^n$ をとり、写像 $f: A \rightarrow M^n$ を $f(a) = (ax_1, \dots, ax_n)$ と定めると、 M の忠実性から f は単射な A -線型写像である。従って、 n 以上のすべての自然数 r に対して、環 A は上重直和 M^r の部分加群として含まれることがわかる。 A が整域であるならば、特に $r=1$ とすると、 A は M 自身に含まれる。

しかし、一般には環 A がいつも M 自身に含まれるとは限らない。これについ2つの反例は (3.1), (3.2) で述べる。与えられた環 A がいつも有限生成忠実 A -加群に含まれるのはどうのようなときがあるか。この問題を Noether 環について議論するのが本稿の目的である。

定理を簡潔に述べるために新しく 2 つ記号を用意する。

M は A -加群とし, \mathfrak{J} は A の素イデアルとする。このとき,

$$tM = \left\{ x \in M \mid [0 :_{\mathfrak{A}} x] \neq (0) \right\},$$

$$M[\mathfrak{J}] = \left[0 :_{M_{\mathfrak{J}}} [0 :_{\mathfrak{A}_{\mathfrak{J}}} A_{\mathfrak{J}}] \right] \cap M$$

と定める。

定理. A は Noether 環とする。次の条件は同値である。

$$(1) \dim_{A_{\mathfrak{J}}/\mathfrak{J}A_{\mathfrak{J}}} [0 :_{\mathfrak{A}_{\mathfrak{J}}} A_{\mathfrak{J}}] = 1 \quad (\forall \mathfrak{J} \in \text{Ass } A).$$

(2) すべての有限生成忠実 A -加群が A を部分加群と含む。

(3) すべての A -加群 M に付けて,

$$tM = \bigcup_{\mathfrak{J} \in \text{Ass } A} M[\mathfrak{J}] .$$

A の素因子が極小なものばかりであるとき, 条件(1)と(2)は同値であることが [3, Theorem] で述べられていく。この場合条件(1)は A の全商環が Gorenstein であるということに他ならない。

以後 A は可換な Noether 環とする。

§2. 定理の証明。

補題. (2.1). すべての有限生成忠実 A -加群が A を部分加群として含むものとせよ。 S は A の積閉集合とする。このとき、すべての有限生成忠実 S^*A -加群が環 S^*A を部分加群として含む。

命題. (2.2). (A, m) は局部環とし、
 $\dim_{A/m} [0 : m] \geq 2$ とする。このとき、環 A を部分加群として絶対に含まないような有限生成忠実 A -加群が存在する。

次の補題は [1, Hilfssatz 1] を改良したものである。
 そして、その証明は同様に行なわれる。

補題. (2.3). M は A -加群とし、 $\{N_1, \dots, N_s\}$ は真に小さい M の部分加群の族とする。さて、次の条件を満たす素イデアルの族 $\{\beta_1, \dots, \beta_s\}$ が存在する。

- (i) β_1, \dots, β_s は互いに異なる。
- (ii) $\beta_i M \subseteq N_{i'}$ ($1 \leq i' \leq s$)。
- (iii) $N_i A_{\beta_i} \cap M = N_{i'}$ ($1 \leq i' \leq s$)。

このとき, $M \neq N_1 \cup \dots \cup N_s$.

系. (2.4). M は有限生成忠実 A -加群とする。

このとき, $M \neq \bigcup_{\beta \in \text{Ass } A} M[\beta]$.

定理の証明.

(1) \Rightarrow (3) M は A -加群とする。 $x \in tM$ とある。 $[0 :_A x] A_\beta \neq (0)$ となる $\beta \in \text{Ass } A$ が存在する。このよろな β の中で height が一番小さいものを γ とする。すとす。 γ に真に含まれるすべての $\beta \in \text{Ass } A$ に対する $[0 :_A x] A_\beta = (0)$ となるから、 $l_{A_\gamma}([0 :_A x] A_\gamma) < \infty$ とする。

$$[0 :_A x] A_\gamma \cap [0 :_{A_\gamma} \beta A_\gamma] \neq (0).$$

$$(1) \text{ かつ } \dim_{A_\gamma / \beta A_\gamma} [0 :_{A_\gamma} \beta A_\gamma] = 1 \text{ たゞて},$$

$$[0 :_A x] A_\gamma \supset [0 :_{A_\gamma} \beta A_\gamma].$$

故に $x \in M[\beta]$. 即ち

$$tM \subset \bigcup_{\beta \in \text{Ass } A} M[\beta].$$

逆の包含関係は明らかであるから (3) を得る。

(3) \Rightarrow (2) M は有限生成忠実 A -加群とする。

(3) と系(2.4) から, $M \neq tM$. すなはち, $A \cong Ax \subset M$.

(2) \Rightarrow (1) $\beta \in \text{Ass } A$ とする。補題(2.1) から局所環 A_β も定理の条件(2) をみたす。命題(2.2) によると, $\dim_{A_\beta/\beta A_\beta} [0 :_{A_\beta} \beta A_\beta] = 1$ でなければならぬ。

§3. 例.

(3.1) ([2], Theorem 2). $s \geq 4$ とする。
このとき $\dim_{A/\mathfrak{m}} [0 :_A \mathfrak{m}e] = s$ でありから $\ell_A(M) < \ell_A(A)$ であるような Artin 局所環 $(A, \mathfrak{m}e)$ と有限生成忠実 A -加群 M が存在する。もちろん, この M は環 A を含まない。

(3.2). $(A, \mathfrak{m}e)$ は Artin 局所環とし, $E_A(A/\mathfrak{m}e)$ は $A/\mathfrak{m}e$ の injective envelope とする。 $E_A(A/\mathfrak{m}e)$ は有限生成忠実 A -加群である。 $E_A(A/\mathfrak{m}e)$ が A を含むための必要十分条件は $\dim_{A/\mathfrak{m}e} [0 :_A \mathfrak{m}e] = 1$, 即す A は Gorenstein ということである。

(3.3) ([後藤四郎]). $k[[x_1, \dots, x_n]]$ は体 k

上の形式的半級数環とする。

$$A = k[[x_1, \dots, x_m]] \times k$$

はイデアル化とする。このとき A はすべての有限生成忠実 A -加群に部分加群として含まれる。

(3.4). $d > m \geq 0$. $k[[x_0, x_1, \dots, x_d]]$ は体 k 上の形式的半級数環とする。各 $0 \leq s \leq d-m$ に対して、

$$I_s = (x_0^2, \dots, x_{s-1}^2) + (x_s)$$

$$P_s = (x_0, \dots, x_s)$$

とおく。 $I = \bigcap_{s=0}^{d-m} I_s$, $A = k[[x_0, x_1, \dots, x_d]]/I$ と定めれば次の事柄が成立する。

$$(i) \dim A = d, \operatorname{depth} A = m.$$

$$(ii) \operatorname{Ass} A = \{ P_s/I \mid 0 \leq s \leq d-m \}.$$

$$(iii) \dim_{A_3/IA_3} [0 :_3 A_3] = 1 \quad (\forall z \in \operatorname{Ass} A).$$

(iii) より, A はすべての有限生成忠実 A -加群に含まれる。

後記. 以上の結果をもとに論文 [4] を作成中です。またこの研究を行うにあたっては、後藤田郎氏と彼のせん

の方々から有益な助言を数多くたまわりました。ここに深く感謝の意を表明したいと思います。

References

- [1] O. Forster, Über die Anzahl der Erzeugenden eines Ideals in einem Noetherschen Ring, Math. Z., 84 (1964), 80--87.
- [2] T. H. Gulliksen, On the length of faithful modules over Artinian local rings, Math. Scand., 31 (1972), 78--82.
- [3] K. Yamagishi, A note on a faithful module, TRU Mathematics, 17-1 (1981), 153--157.
- [4] -----, Embedding of Noetherian rings into faithful modules, in preparation.