

Rees algebra の Gorenstein 性について。

名大 理学部 池田 信

$(A, \mathfrak{m}, \mathbb{R})$  を Noetherian local rings とする。

$$R(A) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{m}^n, \quad G(A) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{m}^n / \mathfrak{m}^{n+1}$$

とおき  $R(A)$  を  $A$  の Rees algebra  $G(A)$  を  $A$  の associated graded ring という。  $\mathfrak{m} = (a_1, \dots, a_r)$  とすると,  $R(A)$  は一変数多項式環  $A[X]$  の subring  $A[a_1X, \dots, a_rX]$  と同一視することができる。  $\deg X = 1$  とおくことにより  $R(A)$  に graded ring の構造が入る。  $M = (a_1, \dots, a_r, a_1X, \dots, a_rX)R(A)$  とおく。

本稿の目的は  $R(A)$  が Gorenstein になるための条件を与えたことである。  $A$  が Cohen-Macaulay のときには, 後藤氏と下田氏によって得られた次の結果がある。

定理  $A$  を Cohen-Macaulay,  $d = \dim A \geq 2$  とすると,  $R(A)$  が Gorenstein ring になるための必要十分条件は  $G(A)$  が Gorenstein ring であり  $a(G(A)) = -2$  となることである, ただし

$$a(G(A)) = \max \{ n \mid H_M^d(G(A))_n \neq 0 \}.$$

“ $R(A)$  が Gorenstein ならば  $A$  も そう であるか?” という問題を考えるのは自然であろう。しかしこれは一般には正しくない。実際, 3次元 Buchsbaum, non-Cohen-Macaulay local ring で Rees algebra が Gorenstein になるものがある。したがって上述の定理を一般化する必要がある。本稿の主定理は次のように述べることができる。

定理 1.  $d = \dim A \geq 2$ ,  $K_A, K_{G(A)}$  をそれぞれ  $A, G(A)$  の canonical module とする。このとき次は同値,

- 1)  $R(A)$  は Gorenstein
- 2) a)  $R(A)$  は Cohen-Macaulay,  
     b)  $K_A \cong A$   
     c)  $K_{G(A)} \cong G(A)(-2)$ .

§ 1 準備。

以後, 簡単のため,  $k$  は無限体とする。まづ  $R(A)$  が Cohen-Macaulay になるための条件を思い出そう。

Proposition 1  $d = \dim A \geq 1$  とすると次は同値。

- 1)  $R(A)$  は Cohen-Macaulay.
- 2) a)  $a(G(A)) < 0$   
     b)  $i < d$  に対して

$$H_M^i(G(A))_n = \begin{cases} H_M^i(A) & (n=-1) \\ 0 & (n \neq -1) \end{cases}$$

このとき,  $A, G(A)$  は Buchsbaum で  $I(A) = I(G)$ 。

次に, 定理 1 を証明するために必要な事実を述べる。

Lemma 2  $l(H_M^i(A)) < \infty, i < \dim A$  とする, ここで  $l(E)$  は  $A$ -module  $E$  の長さを表す。このとき,

$$H_M^{d+1}(R(A))_n = 0, n \geq 0.$$

証明は次元に関する induction で容易にできる。

Lemma 3  $\dim A = d \geq 2$  とする。  $a \in \mathfrak{m}$  を  $\mathfrak{m}$  の minimal reduction の minimal generator の一部になるものとする。

$\bar{R} = R(A)/(a, ax)$  とおくと,  $R(A)$  が Gorenstein のとき  $H_M^{d-1}(\bar{R}) = 0$  となる。

(証明) 簡単のため,  $R = R(A)$  とおく。  $R$  は Gorenstein だから local duality により,  $\text{Ext}_{R/aR}^1(\bar{R}, R/aR) = 0$  を示せばよい。  $\mathfrak{m} = (a, a_2, \dots, a_r)$  とすると, 次の exact sequence がある。

$$(R/aR)^{r-1} \xrightarrow{\begin{bmatrix} a_2 \\ \vdots \\ a_r \end{bmatrix}} R/aR \xrightarrow{ax} R/aR \rightarrow \bar{R} \rightarrow 0$$

よって,

$$\text{Ext}_{R/aR}^1(\bar{R}, R/aR) = \frac{(aR : \mathfrak{m}R)}{(a, ax)R} = \frac{(a, ax)R}{(a, ax)R} = 0.$$

Lemma 4  $R(A)$  が Cohen-Macaulay,  $\text{Hom}_{R(A)}(\mathbb{k}, H_M^d(G(A)))_n = 0$   $n \neq -2$  とする,  $\text{Hom}_{R(A)}(\mathbb{k}, H_M^{d+1}(R(A)))_n = 0$   $n \neq -1$

(証明)  $R = R(A)$ ,  $G = G(A)$  とおく。

$$0 \rightarrow R_+ \rightarrow R \rightarrow A \rightarrow 0 \text{ (exact)}$$

$$0 \rightarrow R_+(1) \rightarrow R \rightarrow G \rightarrow 0 \text{ (exact)}$$

よって

$$0 \rightarrow H_M^d(A) \rightarrow H_M^{d+1}(R_+) \rightarrow H_M^{d+1}(R) \rightarrow 0 \text{ (exact)}$$

$$0 \rightarrow H_M^d(G) \rightarrow H_M^{d+1}(R_+(1)) \rightarrow H_M^{d+1}(R) \rightarrow 0 \text{ (exact)}$$

Sacle をとると,

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(\mathbb{k}, H_M^d(A)) \rightarrow \text{Hom}_R(\mathbb{k}, H_M^{d+1}(R_+)) \rightarrow \text{Hom}_R(\mathbb{k}, H_M^{d+1}(R))$$

$$\hookrightarrow \text{Ext}_R^1(\mathbb{k}, H_M^d(A)) \text{ (exact)}$$

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(\mathbb{k}, H_M^d(G)) \rightarrow \text{Hom}_R(\mathbb{k}, H_M^{d+1}(R_+(1))) \rightarrow \text{Hom}_R(\mathbb{k}, H_M^{d+1}(R)) \text{ (exact)}$$

これより,  $\text{Ext}_R^1(\mathbb{k}, H_M^d(A))_n = 0$ ,  $n \leq -2$  に注意すると,

$$\text{Hom}_R(\mathbb{k}, H_M^{d+1}(R_+))_n \cong \text{Hom}_R(\mathbb{k}, H_M^{d+1}(R))_n, \quad n \leq -2,$$

$$\text{Hom}_R(\mathbb{k}, H_M^{d+1}(R_+))_n \hookrightarrow \text{Hom}_R(\mathbb{k}, H_M^{d+1}(R))_{n-1}, \quad n \leq -2.$$

したがって,  $\text{Hom}_R(\mathbb{k}, H_M^{d+1}(R))_n = 0$ ,  $n \leq -2$ 。結論は Lemma

2より出る。

## §2 定理1の証明。

1)  $\Rightarrow$  2)。次の exact sequence があつる。

$$(*) \begin{cases} 0 \rightarrow H_M^{d-1}(\bar{R}) \rightarrow H_M^d(A) \rightarrow H_M^{d+1}(R/aR) \rightarrow H_M^d(\bar{R}) \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow H_M^{d-1}(\bar{R}) \rightarrow H_M^d(G)(-1) \rightarrow H_M^d(R/aR) \rightarrow H_M^d(\bar{R}) \rightarrow 0, \end{cases}$$

ただし,  $a$  は Lemma 3 のようにとる。Lemma 3 より,

$H_M^{d-1}(\bar{R}) = 0$ 。Socle をとることにより, 2) の a), c) が  
出る。

2)  $\Rightarrow$  1). (\*) より  $H_M^{d-1}(\bar{R}) = 0$  がわかる。Lemma 2 より,

$H_M^d(\bar{R})_n = 0, n \geq 0$ , c) と Lemma 4 より

$\text{Hom}_R(k, H_M^d(R/aR))_n = 0, n \neq 0$  がわかる。Socle  
をとることにより,

$$k \cong \text{Hom}_R(k, H_M^d(A)) \cong \text{Hom}_R(k, H_M^d(R/aR)).$$

よって,  $R$  は Gorenstein。

### §3 example.

Example の構成のため, 次の結果を用いる。

Proposition 5  $(A, m, k)$  を 3次元 Noetherian local ring  
 $\mathfrak{q} = (a_1, a_2, a_3)$  を  $m$  の minimal reduction とする。

$$I = (a_1, a_2) : a_3 + (a_2, a_3) : a_1 + (a_1, a_3) : a_2 + m^2 \text{ とおく。}$$

このとき次は同値。

1)  $R(A)$  は Cohen-Macaulay

2) a)  $m^3 = \mathfrak{q}m^2$

2)  $l(I/m^2) = 3(l(A/\mathfrak{q}) - e(A)) + 3$ , ただし,  $e(A)$  は  $A$  の multiplicity.

さて,  $A$  を 3次元 local ring で  $R(A)$  が Cohen-Macaulay とする。  $A$  の embedding dimension が 6 とする。  $A$  が Cohen-Macaulay ではないとすると,

$$6 \leq l(I/m^2) \leq l(m/m^2) = 6$$

よって,  $m = I$ 。 Prop 1 より,  $A$  が Buchsbaum であることに注意すると,  $m^2 = \mathfrak{q}m$ 。 したがって  $A$  は maximal embedding dimension の Buchsbaum ring。  $I(A) = l(A/\mathfrak{q}) - e(A) = 1$  だから,  $emb(A) = e(A) + \dim A + I(A) - 1$  より,  $e(A) = 3$ 。

Example  $k$  を  $ch(k) = 2$  の体,  $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, y_4$  を不定元とする。

$$A = k[x_1, x_2, x_3, y_1, \dots, y_4] / \mathcal{O}_2 = k[x_1, x_2, x_3, y_1, \dots, y_4]$$

$\mathcal{O}_2 = (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3, y_1^2, y_2^2, y_3^2, y_4^2, y_1 y_4, y_2 y_4, y_3 y_4, y_1 y_2 - x_3 y_4, y_2 y_3 - x_1 y_4, y_1 y_3 - x_2 y_4)$  とおくと,  $A$  は non-Cohen-Macaulay Buchsbaum ring で  $R(A)$  は Gorenstein である。

(証明) 次の exact sequence を考えよう。

$$(\star) 0 \rightarrow A/(0; \mathfrak{y}_4) \rightarrow A \rightarrow A/\mathfrak{y}_4 A \rightarrow 0$$

$$A/\mathfrak{y}_4 A \cong \mathbb{k} \llbracket x_1, x_2, x_3, Y_1, Y_2, Y_3 \rrbracket / (x_1 Y_1 + x_2 Y_2 + x_3 Y_3, (Y_1, Y_2, Y_3)^2)$$

Prop 5 より  $A/\mathfrak{y}_4 A$  の Rees algebra  $R(A/\mathfrak{y}_4 A)$  は Cohen-Macaulay である。上の注意より  $e(A/\mathfrak{y}_4 A) = 3$ 。一方,  $ch(\mathbb{k}) = 2$  であることに注意すると,

$$(0; \mathfrak{y}_4) = (\mathfrak{y}_1, \dots, \mathfrak{y}_4)$$

よって,  $A/(0; \mathfrak{y}_4) \cong \mathbb{k} \llbracket x_1, x_2, x_3 \rrbracket$  と  $e(A/(0; \mathfrak{y}_4)) = 1$ 。  $(\star)$  より  $e(A) = 4$ 。

$\mathfrak{g} = (x_1, x_2, x_3)$  とおくと  $l(A/\mathfrak{g}) = 5$ 。簡単な計算により  $l(\mathbb{I}/\mathfrak{m}^2) = 6$ 。 Proposition 5 より,  $R(A)$  は Cohen-Macaulay。  $\mathcal{L}$  は homogeneous polynomial で生成されているので  $K_{G(A)} \cong G(A)(-2)$  を示せば十分。  $\mathcal{L}$  を  $\mathcal{L}$  の生成元で生成された  $\mathbb{k} \llbracket x_1, x_2, x_3, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 \rrbracket$  の ideal とすると,

$$G(A) \cong \mathbb{k} \llbracket x_1, x_2, x_3, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 \rrbracket / \mathcal{L} = \mathbb{k} \llbracket x_1, \dots, Y_4 \rrbracket.$$

$S = \mathbb{k} \llbracket x_1, x_2, x_3 \rrbracket$  とおくと,  $G(A)$  は有限生成  $S$ -module。

$G(A)$  の canonical module を計算しよう。  $S$  は多項式環と同型で  $G(A)$  は  $S$ -module として  $1, Y_1, \dots, Y_4$  で生成されていることから次の exact sequence を得る。

$$0 \rightarrow S(-2) \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{bmatrix}} S \oplus S(-1)^4 \xrightarrow{\varphi} G(A) \rightarrow 0,$$

そこで,  $S \oplus S(-1)^4$  の base  $e_0, \dots, e_4$  は,  $\varphi(e_0) = 1, \deg e_0 = 0,$

$\varphi(e_i) = y_i$ ,  $\deg e_i = 1$  ( $1 \leq i \leq 4$ ) とするよりにする。

$$K_{G(A)} = \text{Hom}_S(G(A), S(-3))$$

$$= \ker(\text{Hom}_S(S \oplus S(-1)^4, S(-3)) \rightarrow \text{Hom}_S(S(-2), S(-3)))$$

したがって,  $K_{G(A)}$  は  $S$ -module として  $e_0^*$ ,  $x_3 e_2^* - x_2 e_3^*$ ,  $-x_3 e_1^* + x_1 e_3^*$ ,  $x_2 e_1^* - x_1 e_2^*$ ,  $e_4^*$  で生成される, したがって,  $e_i^*$  は  $e_i$  の dual base として  $\deg e_0^* = 3$ ,  $\deg e_i^* = 2$  ( $1 \leq i \leq 4$ )。  $G(A)$  は  $K_{G(A)}$  に,

$$(g \cdot f)(h) = f(gh) \quad f \in \text{Hom}_S(G(A), S(-3)), g, h \in G(A) \text{ と作}$$

用している。  $\text{ch}(K) = 2$  であることに注意すると,

$$y_4 \cdot e_4^* = e_0^*$$

$$y_1 \cdot e_4^* = x_3 e_2^* - x_2 e_3^*$$

$$y_2 \cdot e_4^* = -x_3 e_1^* + x_1 e_3^*$$

$$y_3 \cdot e_4^* = x_2 e_1^* - x_1 e_2^*$$

となることがわかる, これは,  $K_{G(A)} \cong G(A)(-2)$  を示している。

Remark.  $\dim A = 3$  のとき,  $R(A)$  が Gorenstein ならば

$$\dim_{A/m} m/m^2 = 3h + 4, \quad h = \ell(H_m^2(A))$$

となることが知られている。この意味で, 上述の example は最も簡単なものである。

### Reference

- [1] S. Goto and Y. Shimoda, On Rees algebras of Cohen-

Macaulay rings, preprint.

- [2] S. Gato and K. Watanabe, On graded rings. I. J. Math. Soc. Japan 30 (1978), 179-213.
- [3] S. Ikeda, The Cohen-Macaulayness of Rees algebras of local rings, to appear in Nagoya Math. J. 51 (1973), 25-43.