

Noether一様連接環について

田大 文理 後藤 四郎

1. 序文.

A は可換環として、 \mathbb{N} によって自然数の全体のなす集合をあらわす。 A -加群 M に対して、 $U_A(M)$ により M を生成するのに必要な元の最小の個数をあらわす。各 $n \in \mathbb{N}$ について

$$\varphi_A(n) = \sup_{\circ \neq f \in \text{Hom}_A(A^n, A)} U_A(\text{Ker } f)$$

とき、二の $\varphi_A(n)$ がすべての $n \in \mathbb{N}$ について有限であるとき、 A は一様連接であるといふことにする。一様連接であれば、連接である。付値環や絶対平坦環は、必ずしもNoetherではない、一様連接環の典型的なものではある。もっとも、二の講演では Noether一様連接環を主に、とりあつかう。

一様連接の概念は、Souléin[8]により導入され、

環 A が一様連接であるためには、直積 $A^{(n)}$ が連接であることが必要にして十分であることが示された。Quentel [6] は、Soubline の研究を引き継いで、もし A が Noether 一様連接であれば、

$$\sup_{g \in \text{Spec } A} U_A(g) \leqq \varphi_A(1) + \varphi_A(4)$$

なることを指摘した。 $(\sup U_A(g))$ が有限という性質は、非常に強い条件であって、次元が 3 以上の Noether 環で二の性質をもつものは、知られていない。) Quentel の証明は、Noether 環の素イデアルは、三つの元で生成されたりイデアルの素因子になるという Gulliksen [3] の結果の応用であって、私は他に二の Gulliksen の定理の応用例を知らない。Quentel は更に、一二次元の Noether 局所環は一様連接であると指摘している。後に、Sally [7] によって、これは 2 次元以下で常に正しいことが示された。

上に述べた様に、 A が一様連接であれば、 A の素イデアルの生成元の個数には、上限がある。従って、Macaulay の有名な例が示す様に、体 R の上の多項式環 $R[x_1, \dots, x_d]$ や巾級数環 $R[[x_1, \dots, x_d]]$ は $d \geq 3$ なら一様連接ではないのだから、Noether 一様連接環の次元は高々 2 であると予想するのは大変に自

然であるて、二の講演の目的も、二の二とを証明する二とに
ある。結果は、

定理(1.1). Noether 環 A について、次の一条件
は同値である。

(1) A は一様連接である。

(2) $\dim A \leq 2$ であるかつ、すべての $n \in \mathbb{N}$ について

$$\sup_{m \in \text{Max } A} g_{A_m}(n)$$

は有限である。

上の定理の条件(2)の後半は、一般には、不可欠である（例を第3節で見る。）が、 A に適当な有限性の仮定を附加におけるば、代りに二の部分をとり除く二とができる。

系(1.2). A は semi-local であるか、1本の上の有限生成代数であると仮定せよ。すると、

A が一様連接である $\Leftrightarrow \dim A \leq 2$
となる。

(1.1) と (1.2) の証明は、次の節でする二とにしよう。

2次元以下の局所環が一様連接であるという事実は、Sally [1] の中にも応用例があるが、鈴木の講演内にも決定的に使われている。もともとは、そこから本研究が出発したのであるから、興味をお持ちの読者は、是非参照されたい。

以下 A は可換環を、 \mathbb{N} は自然数の全体のなす集合をあらわす。

2. 定理 (1.1) の証明.

まず Quentel [6] による、次の二つの結果を記録しておく。(2.2) のくわい証明が、Sally [1] の中に再録されている。)

(2.1). S は A 内の乗法系とすれば、すべての n
 $= 1, 2, \dots$,

$$\varphi_{S^{-1}A}(n) \leq \varphi_A(n)$$

である。とくに、 A が一様連接であれば、 $S^{-1}A$ もそうなる。

(2.2). $A \xrightarrow{\varphi} B$ は可換環。射で、 B は、有限表示 (finitely presented) な A -加群になつていいものと仮定せよ。このとき、 A が一様連接であれば

ば、 B も一様連接である。更にもしも $\text{Ker } f$ が「零」でかつ A -加群として有限表示であれば、逆も正しい。

さてしばらくの間、 A は極大イデアルが \mathfrak{m} の局部環で $\dim A = 3$ のものとする。 $\underline{a} = a_1, a_2, a_3, a_4$ は例の元の列で $\dim \frac{A}{(\underline{a})} = 0$ のをさせよ。今 $\mathcal{K}(\underline{a}; A)$ によると、 \underline{a} によって得られる Koszul 複体を、 $H(\underline{a}; A)$ によりその homology をあらわす。今 $f: A^4 \rightarrow A$ を、 A -加群の射で $f(e_i) = a_i$ なるもの ($\{e_i\}_{i=1}^4$ は A^4 の自然な基底をあらわす) とする。もしも、

$$U_A(H_1(\underline{a}; A)) \leq U_A(\text{Ker } f) \leq U_A(H_1(\underline{a}; A)) + 6$$

である。

$$s(A) = \sup_{\underline{a}} U_A(H_1(\underline{a}; A))$$

とおく。 $s(A) = \infty$ なら、 A は一様連接ではないことを注目せよ。

補題 (2.3). ① \hat{A} を A の完備化とすると、
 $s(\hat{A}) = s(A)$ である。

② A 内に正則局部環 R が部分環とに含まれて、

A は R -加群と/or 有限型でかつ $R \triangleleft A$ ならば、
 $s(A) = \infty$ である。

証明. ① $\underline{b} = b_1, \dots, b_4$ は $\ell u \hat{A}$ の元で、 $\underline{b} \hat{A}$ は $W\hat{A}$ -primary なもんとすれば、 $\underline{a} = a_1, \dots, a_4$ は ℓu の元で $\underline{a} \hat{A} = \underline{b} \hat{A}$ となるものが“必ず”ある。すこしの間に、 $K(\underline{a}; \hat{A}) \cong K(\underline{b}; \hat{A})$ だから、

$$H_1(\underline{b}; \hat{A}) \cong \hat{A} \otimes_{\hat{A}} H_1(\underline{a}; A)$$

である。よって $U_{\hat{A}}(H_1(\underline{b}; \hat{A})) = U_A(H_1(\underline{a}; A))$ 従って、 $s(\hat{A}) \leq s(A)$ 。逆向きの不等号も同様にして示される。

② \underline{a} を R の元の列であるとせよ。すると、
 $K(\underline{a}; R) \triangleleft K(\underline{a}; A)$ だから

$$\begin{aligned} U_R(H_1(\underline{a}; R)) &\leq U_R(H_1(\underline{a}; A)) \\ &\leq U_R(A) \cdot U_{\hat{A}}(H_1(\underline{a}; \hat{A})). \end{aligned}$$

故に $s(R) \leq U_R(A) \cdot s(\hat{A})$ 。従って $s(R) = \infty$ を示せば十分である。

今 \mathcal{I} は R の极大イデアルをあらわし、 $U = (x, y, z)$ とかいておく。 $n \geq 5$ は奇数とし、 H_n によって $\mathcal{I}^n R$ の交代行列で次のように定まるものを表せ：

$$[H_n]_{ij} = \begin{cases} X & (i \text{ odd } \Rightarrow j=i+1) \\ Y & (i \text{ even, } \Rightarrow j=i+1) \\ Z & (i+j = n+1) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

($1 \leq i < j \leq n+1$). $I_n = \langle \rangle$ は H_n の $n-1 = R$ の Pfaffian 全体の生成する R のイデアルをあらわす。すると I_n は \mathcal{U} -準素 ($I_n \ni X^{\frac{n-1}{2}}, Y^{\frac{n-1}{2}}, Z^{\frac{n-1}{2}}$) で、
よるから $[I]_1 = \langle \rangle$, R/I_n は Gorenstein で $\text{U}_R(I_n) = n$ である。 $J_n = (f_n, g_n, h_n)$: $I_n \subset \langle \rangle$ 。（但し f_n, g_n, h_n は I_n の極小生成系の一部で R -列でないものとする。もとより $f_n = X^{\frac{n-1}{2}}, g_n = Y^{\frac{n-1}{2}}, h_n = Z^{\frac{n-1}{2}}$ となるよ。）すると、 $[5]_1 = \langle \rangle$, $\text{U}(R/J_n) = n-3$ でその上 $\text{U}_R(J_n/(f_n, g_n, h_n)R) = 1$ がわかる。
従って、 R/J_n は $\cong R$ かつ a minimal free resolution

$$0 \rightarrow R^{n-3} \rightarrow R^n \rightarrow R^4 \xrightarrow{f} R \rightarrow R/J_n \rightarrow 0$$

をもつ=とかわる。よって

$$\text{U}_R(\text{Ker } f) = n$$

で、従って

$$\text{U}_R(H_1(f_n, g_n, h_n, Q_n; R)) \geq n-6$$

（但し $J_n = (f_n, g_n, h_n, Q_n)$ とかく。）よって $s(R) = \infty //$

命題(2.4). A は, $\text{depth } A \geq 2$ でかつ $H_m^2(A)$ が有
限生成であると仮定せよ。 a, b, c は A の 1^{D}X-T -
系で $(a, b) \cdot H_m^2(A) = (0)$ であるとする。 $=ae$ すなは
の $n \geq 2$ について,

$$(a^n, b^n, c^n) : (abc)^{n-1} = [(a, c) : b] + [(b, c) : a] + [(a, b) : c]^{n-1}$$

証明. まず

$$\textcircled{1} \quad (a^\ell, b^m) : c^n = (a^\ell) + b^{m-1}[(a^\ell, b) : c^n] \quad (\ell, m, n > 0)$$

を示す。 f は左 \mathbb{P} の元といえ, $c^n f = a^\ell g + b^m h$ をかくと,
 $h \in (a^\ell, c^n) : b^m$ である。 b の逆元は ± 1 , $(a, c^n) : b^m$
 $= (a, c^n) : b$ だから, $b^m h = a^\ell x + c^n y$ とかける。さて
 $c^n(f - b^{m-1}y) \in (a^\ell)$. 従って $f - b^{m-1}y \in (a^\ell)$.
すなはち $f \in (a^\ell) + b^{m-1}[(a^\ell, b) : c^n]$

$$\textcircled{2} \quad (a^\ell, b^m) : c^n = (a^\ell, b^m) + a^{\ell-1}b^{m-1}[(a, b) : c^n].$$

これは, a, b の対称性より, $\textcircled{1}$ に従う。

さて $f \in A$ で $(abc)^{n-1}f = a^n x + b^m y +$
 $c^n z$ とかけていよう。すると $(ab)^{n-1}[f - cz] \in (a^n, b^n) : c^{n-1}$
だから, $\textcircled{2}$ より $(ab)^{n-1}[f - cz] \in (a^n, b^n) + (ab)^{n-1}[(a, b) : c^{n-1}]$.
よって $g \in (a, b) : c^{n-1}$ とかけて $(ab)^{n-1}(f - g) \in (a^n, b^n) + (c)$
とができる。 A/cA では, $(\bar{a}^n, \bar{b}^n) : (\bar{a}\bar{b})^{n-1}[(\bar{a}) : \bar{b}] + [(\bar{b}) : \bar{a}]$

であることは、比較的容易に確かめられるので、

$$f \in [(a,c) : b] + [(b,c) : a] + [(a,b) : c^{n-1}].$$

系(2.5)* (2.4) の状況下で、

$$(abc)^{n-1} \notin (a^n, b^n, c^n) \quad (n > 0).$$

定理(1.1)の証明

(2) \Rightarrow (1) $f: A^n \rightarrow A$ を A -加群の射とすれば、仮定により $\bigcup_{A_m} (\ker(A_m \otimes f)) \leq s(n)$ がすべての $m \in \text{Max } A$ について正しい。但し

$$s(n) = \sup_{m \in \text{Max } A} S_{A_m}(n).$$

よて [2] の Satz 2 よれば、 $\bigcup_A (\ker f) \leq s(n) + 2$.

(1) \Rightarrow (2) (2.1) より 後半をうる。一方でもし $\dim A \geq 3$ であれば、(2.1) より $\dim A = 3$ でかつ A は局所にて反例があるはずである。すなはち A の

*) (1.1) の証明に必要なのは (2.5) のみである。この事実は、Direct summand conjecture の研究に従事した二つの人はよく知らぬことはあるまい（吉野）。

極大イデアルとせよ。もし \hat{A} が体を含むなら、 R を \hat{A} の係数体とい、 x, y, z を A のパラメータ系とい

$$R = k[x, y, z] \subset \hat{A}$$

を考えると、 R は \hat{A} の直和因子である ([4])。

よし $s(A) = \infty$ や (2.3) に従う。故に \hat{A} は体を含まない。

$P = \text{ch } A/m$ とき $0 \neq P \in W$ に注目せよ。
 (2.2)によれば、 A/P も一様連接だから、上の結果より $\dim A/P \leq 2$. P は \hat{A} の素イデアルと、 $\dim A/P = 3$ にとって、 B により \hat{A}/P の正規化をみらめれば、 B は (2.4) の仮定をみたすので、 A のパラメータ系 P, x, y をとってこれが B 内で x, y につれて (2.4) の仮定をみたす様にできる。 W を \hat{A} の係数環とし $R = W[x, y] \subset \hat{A}$ とおくと、 R は B に対しては (2.5) と [4] の主定理より、直和因子である。故に $R \not\subset \hat{A}$. 従って (2.3) より $s(A) = \infty$ すなはち A は一様連接でない (矛盾)。 //

系(2.6). A は regular とせよ。このとき、
 A が一様連接である $\iff \dim A \leq 2$.

証明. $\Rightarrow)$ は (1.1) による。 $\Leftarrow)$ は, Soulé [8] に示されている。 //

系(1.2) の証明

A が "semi-Principal" のときは (1.1) のもの。 A は 体 k 上の 有限生成代数 とする。 $d = \dim A$ をおくと、 正規化定理より、 $x_1, \dots, x_d \in A$ をとて、 A は 多項式環 $R = k[x_1, \dots, x_d]$ 上 加群 で 有限 生成 ができる。 (2.2) によれば、 A が 一様連接 である こと、 R が 一様連接 であることは、 同値 である (2.6) によれば 後者は $d \leq 2$ と 同値 である。 //

3. 例.

R を 代数的 体 せよ。 すると Noether 整域 A を、 R を含むように つくる、 その上 次の性質をもつ様に できる。

① A は 可算無限個の 極大 ideal $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ をもつ。

② $\dim A M_n = 2 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$.

③ すべての $n \in \mathbb{N}$ について A -加群の射 $f_n: A^2 \rightarrow A$ が 存在 して、

$$\bigcup_A (\ker f_n) = \bigcup_{A \in M_n} (\ker (A \otimes f_n)) = n+1$$

となる。

二の例によると我々は (1.1) の条件(2) の後半が、一般には、不可欠であることを知る。

構成のあらすじ

$M \in \mathbb{N}$ とすると 多項式環 $S = k[x_1, x_2, x_3, x_4]$

すなはち 齊次元素形 P_m を使って, $\dim S/P_m = 2^m$,

$$H_M^1(S/P_m) = k^{2^m}(3-5^m)$$

(但し $M = S_+$) とされる。 $R_m = S/P_m$ とおき x_n, y_n を R_m の一次の \mathbb{R} -X-ターネス

$$g_n: R_m^2 \longrightarrow R_m$$

を $g_n\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = a x_n + b y_n$ で定めると,

$$\bigcup_{R_m} (\ker g_n) = n+1$$

となる。 $Q_m = (R_m)_+$ とおき,

$$B = \bigoplus_{n=1}^{\infty} R_m$$

とせよ。 $A = T^{-1}B$ ($T = B \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n B$)

とおけば, $\{f_n = A \otimes_{R_m} g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ と共に
ねぶつた性質をもつて \mathbb{R} -X-ターネスである。 //

References

- [1] D. Buchsbaum and D. Eisenbud, Algebra structures for finite free resolutions and some structure theorems for ideals of codimension 3 , Amer. J. Math. 99 (1977), 447-485.
- [2] O. Forster, Über die Anzahl der Erzeugenden eines Ideals in einem Noetherschen Ring, Math. Z. 84 (1964), 80-87.
- [3] T. H. Gulliksen, Tout idéal premier d'un anneau noethérien est associé à un idéal engendré par trois éléments, C. R. Acad. Sc. Paris, 271 (1970), 1206-1207.
- [4] M. Hocster, Contracted ideals from integral extensions of regular rings, Nagoya Math. J. 51 (1973), 25-43.
- [5] E. Kunz, Almost complete intersections are not Gorenstein rings, J. Algebra, 28 (1974), 111-115.
- [6] Y. Quentel, Sur l'uniforme cohérence des anneaux noethériens, C. R. Acad. Sc. Paris, 275 (1962), 753-755.
- [7] J. Sally, Numbers of generators of ideals in local rings, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 35, Marcel Dekker.
- [8] J.-P. Soublin, Anneaux et modules cohérents, J. Algebra, 15 (1970), 455-472.