

Index of Reducibility of Parameter

Ideals of a Local Ring, II

日本大学文理学部 後藤四郎
静岡薬科大学 鈴木直義

30.序:

第3回可換環論セミナー(1981年11月4日~7日)に於て、表記題名の準備中の論文を紹介する講演をしました。その後に、いくつかの本質的な発展がありました。それらを中心に、今回の研究集会で、3回に渡り講演させていただき、参加諸氏から、率直な御発言をいただきました。本論に入る前に、長時間の講演に熱心に付き合い、講演者にとって、貴重な御意見、御助言をいたしましたこと、深く感謝いたします。本稿では、講演の全内容を詳述することはできませんので [O] を読んでいただくこととして、又、上述の可換環セミナー報告集に書いたことは省略させていただきます。その競争として、その付記に述べた事項について説明させていただきます。

尚、今回の研究集会では、この講演に関連して、「可約指數について」と題して、青山陽一氏が、歴史的な背景として、沢山の文献をしうべあげた結果を報告されました。Gorenstein環ならしは、Cohen-Macaulay環が可換環論の中で、徐々に一定の位置を占め始めた時期に、idealの既約性をめぐる議論がどのようにからんでいったかを知る上で、非常に参考になりました。

以下、特にことわらかへかぎり、 (A, M) は Noetherian 局所環とします。

§1. quasi-Buchsbaum 加群 の Index of reducibility について.

(1.1) 定義. \mathfrak{a} を A の M -primary ideal, M を有限生成 A -加群とする。 \mathfrak{a} の M での Index of reducibility を次のようには定義する。

$$N_A(\mathfrak{a}; M) := \dim_{A/\mathfrak{a}M} ((\mathfrak{a}M :_M M) / \mathfrak{a}M),$$

即ち、 A -加群 $M/\mathfrak{a}M$ の sole の次元である。sole の次元は 1 はしば登場するので、 \mathfrak{a}^l であらわすことがある。

我々の主な目的は、 \mathfrak{a} とて、 M の parameter ideal が

(つまり、最少生成系の個数 $\mu_A(q)$ が M の次元に一致する ideal q で $l_A(M/qM) < \infty$ となるもの) について、 $N_A(q; M)$ の上限が有限な値をもつか否かである。そこで、さらに次の定義をする: $\Gamma_A(M) := \sup \{ \mathcal{F}(M/qM); q \text{ は } M \text{ の parameter ideal} \}$.

又、より一般に、 $n \geq \dim M$ に対して、

$$\Gamma_n(M) := \sup \{ \mathcal{F}(M/N); N \text{ は } M \text{ の部分加群で, } \mu_A(N) \leq n \text{ かつ } l_A(M/N) < \infty \}.$$

既に [1] で述べた結果の主なものをまとめると次のようになる。

(1.2) 定理. (i) ((1.3)[1]). $\dim M = 1$ のとき、 $\sup_n (\Gamma_n(M)) < \infty$.

従って、特に、 $\dim A = 1$ ならば $\Gamma(A) < \infty$.

(ii) ((1.2)[1]). $\dim M = 2$ とすると、任意の n に対し、

$\Gamma_n(M) < \infty$. 特に、 $\dim A = 2$ ならば $\Gamma(A) < \infty$.

(iii) ((1.8)[1]). $\dim A = 3$ で \hat{A} が (S_2) を満すときは、 $\Gamma(A) < \infty$.

(1.3) 定理 ((1.5)[1]). 有限生成 A -加群 M が、有限生成な local cohomologies をもつとする. (i.e., $H_{\hat{A}/m}^i(M)$ は有限生成, $\forall i < \dim(M)$).

すると、 $\Gamma(M) \leq \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d}{i} h_i^i(M) + \mu_{\hat{A}}(K_{\hat{A}/m})$.

ここで、 $h_i^i(M) := l_A(H_{\hat{A}/m}^i(M))$, $K_{\hat{A}/m} := \text{Hom}_A(H_{\hat{A}/m}^d(M), E_A(\hat{A}/m))$ かつ $d = \dim M$ とする。

以上の結果をふまえて、以下新たに証明された事実を述べることにする。まず、(1.3) は次のようなり精緻な評価に発展した。

(1.4) 定理. 有限生成 A -加群 M が有限生成な local cohomologies をもつとき、($d = \dim M$ とて)

$$\Upsilon_A(M) \geq \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} \mathcal{F}(H_{\text{loc}}^i(M)).$$

従って、 $\mathcal{F}(H_{\text{loc}}^d(M)) = \mu_A(K_M)$ に注意すると、もし任意の $i < \dim M$ に対して、

$$\mathcal{W}H_{\text{loc}}^i(M) = 0$$

が成立するときは、

$$\Upsilon_A(M) = \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d}{i} h^i(M) + \mu_A(K_M).$$

この証明は、 $\dim M$ に関する帰納法による。その際次の 2 つの重要な事実を援用する。

(1.5) Proposition. (c.f. (1.6)[1]) M が有限生成 A -加群で、 $d = \dim M > 0$, a を M -regular element とする。すると十分大なる全ての n に対して、

X

$$\text{Hom}_A(A/\mathfrak{m}, H_{\mathfrak{m}}^{\lambda}(M/\mathfrak{a}^n M)) \longrightarrow \text{Hom}_A(A/\mathfrak{m}, H_{\mathfrak{m}}^{\lambda+1}(M))$$

は、 $\forall i \geq 1$ にて $n \in \mathbb{Z}$, surjectiveである。

特に、 M が有限生成 local cohomologies をもつ場合は、

$$\gamma(H_{\mathfrak{m}}^{\lambda}(M/\mathfrak{a}^n M)) = \gamma(H_{\mathfrak{m}}^{\lambda}(M)) + \gamma(H_{\mathfrak{m}}^{\lambda+1}(M)),$$

$\lambda = 1, 2, \dots, d-1$, $\forall n \geq 0$. (a は必ずしも M -regular でない)

(注意) (1.5) の第2の主張は、必ずしも、有限生成 local cohomologies をもつ加群ではなくとも成立するように思える。

(1.6) Proposition. M を有限生成な local cohomologies をもつ有限生成 A -加群とする。 $d = \dim M \geq 1$, a を M の parameter (i.e., $\dim M/\mathfrak{a}M < \dim M$ となる A の元) とすると、十分大きな $n \geq 0$ に対して、

$$\gamma(M/\mathfrak{a}^n M) = \gamma(M) + \gamma(H_{\mathfrak{m}}^1(M))$$

が成立する。

(1.5) の略証. $a_1 = a, a_2, \dots, a_d$ を M の a.o.p. とし、 $\underline{a}^{\nu} = \{a_1^{\nu}, \dots, a_d^{\nu}\}$ とするとき、

$$\varinjlim H^i(\underline{a}^{\nu}; M) = H_{\mathfrak{m}}^i(M),$$

ただし、 $H^i(\underline{a}^{\nu}; M) = H_{d-i}(\underline{a}^{\nu}; M)$ は、 \underline{a}^{ν} で生成された M 上の Koszul homology である。

$n \gg 0$ とすると、各 $H_m^i(M)$ の socle は $H^i(\underline{a^n}; M)$ の socle の limit map による image となるようになる。かかる時に對して、 $x_i = a_i^n$ ($i = 1, \dots, d$) とする。次の可換圖式を得る。

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & H^i(\underline{x}; M) & \rightarrow & H^i(\underline{x} : M/x_1 M) & \xrightarrow{\delta} & H^{i+1}(\underline{x}; M) & \rightarrow 0 \text{ : exact} \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \rightarrow & H_m^i(M) & \rightarrow & H_m^i(M/x_1 M) & \longrightarrow & H_m^{i+1}(M) & \xrightarrow{x_1} \text{ : exact} \end{array}$$

我々の立張の証明には、 $H^{i+1}(\underline{x}; M)$ の socle が δ による $H^i(\underline{x}; M/x_1 M)$ の socle から写ってくることを示せば十分である。 $x_1 = a_1^n$ が M -regular であることをから、次の lemma によると δ は split することになり、証明は完了する。

(1.7) Lemma. M が有限生成 A -加群、 $\underline{x} = \{x_1, \dots, x_r\}$ を A の要素の系列表す。特に、 x_1 は M -regular とする。すると、次の完全系列表は split する。

$$0 \longrightarrow H_p(\underline{x}; M) \longrightarrow H_p(\underline{x}; M/x_1 M) \xrightarrow{\delta} H_{p-1}(\underline{x}; M) \longrightarrow 0.$$

証明. まず、 $K_*(x_2, \dots, x_d; M)$ の differential map を e であらわすと、 $K_p(x_1, \dots, x_r; M) = K_{p-1}(x_2, \dots, x_r; M) \oplus K_p(x_1, \dots, x_r; M)^T$ 、
 $K_*(x_1, \dots, x_r; M)$ の differential map d は、

$$(u, v) \in K_p(\underline{x}; M) = K_{p-1}(x_2, \dots, x_r; M) \oplus K_p(x_2, \dots, x_r; M) \text{ は} \Leftrightarrow,$$

$$d_p(u, v) = (-e_{p-1}(u), x_1 u + e_p(v))$$

で与えられることに注意する。\$M\$ のかわりに \$M/x_1 M\$ に対する

を考える場合、differential map は \$\bar{e}\$。すなわち \$(u, v) \in K_p(\underline{x}; M)\$ の \$K_p(\underline{x}; M/x_1 M)\$ での image は \$(\bar{u}, \bar{v})\$ 等であらわすこととする。

まず、connecting homomorphism を具体的に表わす。

$(\bar{u}, \bar{v}) \in Z_p(\underline{x}; M/x_1 M)$ に対し、 $[\bar{u}, \bar{v}]$ との homology class をあらわすこととする、

$$\delta([\bar{u}, \bar{v}]) = [s, t]:$$

左左 \$(s, t) \in Z_{p-1}(\underline{x}; M)\$ は、\$(\bar{u}, \bar{v})\$ の cycle conditions

$$-e_{p-1}(u) = x_1 s,$$

$$x_1 u + e_p(v) = x_1 t$$

により決まる。一方、\$x_1\$ が \$M/x_1 M\$ を消すところ

$$H_p(x_1, \dots, x_r; M/x_1 M) = H_{p-1}(x_2, \dots, x_r; M/x_1 M) \oplus H_p(x_2, \dots, x_r; M/x_1 M)$$

であり、実は、さらには、次の同型が存在する：

$$\lambda: H_{p-1}(x_2, \dots, x_r; M/x_1 M) \longrightarrow H_{p-1}(x_1, x_2, \dots, x_r; M).$$

実際、まず、\$\bar{\beta} \in Z_{p-1}(x_2, \dots, x_r; M/x_1 M)\$ に対し、\$-\bar{e}_{p-1}(\bar{\beta}) = 0\$

だから、

$$e_{p-1}(\beta) = x_1 \alpha \in x_1 K_{p-2}(x_2, \dots, x_r; M).$$

$$\text{すると}, \quad x_1(-\alpha) + e_{p-1}(\beta) = 0. \quad \therefore$$

$$x_1 e_{p-2}(\alpha) = e_{p-2}(x_1 \alpha) = e_{p-2} \circ e_{p-1}(\beta) = 0.$$

x_1 が M -regular たゞ $e_{p-2}(\alpha) \in K_{p-3}(x_2, \dots, x_r; M) \cong M^{(r) \choose p-2}$ だから

$e_{p-2}(\alpha) = 0$ を得る。($\alpha = 1, p=2$ の場合は、無条件で $e_{p-2}(\alpha) = 0$)

従って, $(-\alpha, \beta) \in Z_{p-1}(x_1, \dots, x_r; M)$ 。従って,

$$\lambda([\bar{\beta}]) = [-\alpha, \beta] \in H_{p-1}(x_1, \dots, x_r; M)$$

とすると, well-definedである: $\bar{\beta} = \bar{e}_p(\bar{\gamma})$ ($\exists \gamma \in K_p(x_2, \dots, x_r; M)$)

とすると, $\beta - e_p(\gamma) = x_1 \mu \in x_1 K_{p-1}(x_2, \dots, x_r; M)$, すな

$$x_1 \alpha = e_{p-1}(\beta) = x_1 e_{p-1}(\mu).$$

x_1 が M -regular たゞから $\alpha = e_{p-1}(\mu)$ 。従って, $(-\alpha, \beta) = d_p(\mu, \gamma)$.

λ は injective である: $(-\alpha, \beta) = d_p(\mu, \gamma)$ とすると,

$$-\alpha = -e_{p-1}(\mu), \quad x_1 \mu + e_p(\gamma) = \beta. \quad \text{従って, 特に, } \bar{\beta} = \bar{e}_p(\bar{\gamma}).$$

λ は surjective である: $(\alpha, \beta) \in Z_{p-1}(x_1, \dots, x_r; M)$ に対して,

$$x_1 \alpha + e_{p-1}(\beta). \quad \text{従って, } \bar{\beta} \in Z_{p-1}(x_2, \dots, x_r; M/x_1 M).$$

λ の定義から, $\lambda([\bar{\beta}]) = [\alpha, \beta]$.

最後に, λ は, 下の図式を可換にある:

$$\begin{array}{ccc}
 H_p(\underline{x}; M/x_1 M) & \xrightarrow{\delta} & H_{p-1}(\underline{x}; M) \\
 \parallel & & \\
 H_{p-1}(x_2, \dots, x_d; M/x_1 M) & \oplus & \\
 & \downarrow & \nearrow \lambda \\
 H_p(x_2, \dots, x_d; M/x_1 M) & & \\
 & \uparrow & \\
 H_{p-1}(x_2, \dots, x_d; M/x_1 M) & &
 \end{array}$$

実際, $[\bar{\beta}] \in H_{p+1}(x_1, \dots, x_r; M/aM)$ に対して, $([\bar{\beta}][\bar{\alpha}]) = [\bar{\beta}, \bar{\alpha}]$.

$$-e_{p+1}\psi = x_1 \lambda$$

$$x_1 \beta + e_p \phi = x_1 \lambda$$

とおくと, $e_{p+1}\psi = x_1 \lambda$ より, $-x_1 \lambda = x_1 \lambda$ で $\lambda = 0$. す,

$x_1 \beta = x_1 \lambda$ より $\beta = \lambda$ を得る. かくて,

$$S([\bar{\beta}, \bar{\alpha}]) = [a, \lambda] = [-\alpha, \beta] = \lambda [\bar{\beta}]. \quad (\text{Q.E.D.})$$

次に, (1.6) の証明に移るが, 本質的な部分は, [3] の proposition (3.1) の証明の修正である.

(1.6) の証明. まず, a の適当な巾を考えることにより,

$$(O_M : a) = H_{M,a}^0(M)$$

とおこう. $\forall n \geq 2$ に対して, 次の可換図式を得る.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_{M,a}^0(M) & \xrightarrow{\pi} & M/(a^n M + H_{M,a}^0(M)) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow j & & \uparrow i & & \\ & & M/(a M + H_{M,a}^0(M)) & & & & \end{array}$$

ここで, i と j は それぞれ 次のように定義する.

$$i(\alpha \bmod aM + H_{M,a}^0(M)) = a^{n-1} \alpha \bmod a^n M + H_{M,a}^0(M),$$

$$j(\alpha \bmod aM + H_{M,a}^0(M)) = a^{n-1} \alpha \bmod a^n M.$$

$\forall m \geq 1$ に対して, $(O_M : a^m) = H_{M,a}^0(M)$ だから i が injective

なることは容易に検証される。 $\text{Hom}_A(A/\text{m}, *)$ を作用させると。

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_A(A/\text{m}, H_m^0(M)) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(A/\text{m}, M/\text{m}M) \longrightarrow \text{Hom}_A(A/\text{m}, M/(a^m M + H_m^0(M))) \\ & & & \swarrow & \uparrow \\ & & \text{Hom}_A(A/\text{m}, j) & & \text{Hom}_A(A/\text{m}, i) \\ & & & & \text{Hom}_A(A/\text{m}, M/(aM + H_m^0(M))) \end{array}$$

$\forall m \geq 1$ に対して、

$$\text{Hom}_A(A/\text{m}, M/(a^m M + H_m^0(M))) \cong \text{Hom}_A(A/\text{m}, H_m^1(M))$$

が成立することを示せば、所期の事実の全てが証明される。

完全系列表記

$$0 \longrightarrow M/H_m^0(M) \xrightarrow{a^m} M/H_m^0(M) \longrightarrow M/(a^m M + H_m^0(M)) \longrightarrow 0$$

より、次の完全系列表記を得る：

$$0 \longrightarrow H_m^0(M/(a^m M + H_m^0(M))) \longrightarrow H_m^1(M/H_m^0(M)) \xrightarrow{a^m} H_m^1(M/H_m^0(M)) .$$

これに $\text{Hom}_A(A/\text{m}, *)$ を作用させると、同型

$$\text{Hom}_A(A/\text{m}, H_m^0(M/(a^m M + H_m^0(M)))) \cong \text{Hom}_A(A/\text{m}, H_m^1(M/H_m^0(M)))$$

を得る。 $H_m^1(M/H_m^0(M)) \cong H_m^1(M)$ に注意すると必要な同型を得たことになる。(Q.E.D.)

(1.8) 注意：よく知られる定理(2), Buchsbaum module M ($=$ つまり)、

$$(\#) \quad \text{mch}_M^1(M) = 0 \quad \text{for } 1 \neq \dim M$$

が成立する。もちろん、 $(\#)$ を満たすが、Buchsbaum 環 \neq Gorenstein 環(加群)は十分でない。存在する。(詳しくは、[T]例 1.4, p.61)。

かかる加群は、次に述べるよろなは、きりばん特徴付けがある。

(1.9) 定理 + 定義. ([8] 又は [5]) M を有限生成 A -加群とすると、次の条件は 同値である。

(i) $\forall i \neq \dim M$ に対して, $M \in H^i_{\text{m}}(M) = 0$

(ii) $M\epsilon^2$ に含まれる、 M の s.o.p. は全て、Weak M -sequence をなす。

(iii) $M\epsilon^2$ に含まれる長さが $\dim M$ の Weak M -sequence が存在する。

上記の同値条件を満す加群を quasi-Buchsbaum 加群と呼ぶこととする。環 A が A -加群として、quasi-Buchsbaum 加群のときに A を quasi-Buchsbaum 環と呼ぶ。

§2. 3次元の局所環 A の $\Gamma(A)$ について。

既に [1] で、 $\forall d \geq 4$ に対して $\dim A = d$ で、 $\Gamma(A) = 0$ となる環 A の例の構成法を述べた。従って、本節では、まだ未解決のままである、一般の3次元の局所環 A に対する $\Gamma(A) < \infty$ の証明を与える。即ち、

(2.1) 定理. (A, \mathfrak{m}) が 3次元の Noetherian 局所環ならば $\Gamma(A) < \infty$ 。

まず次の Lemma から始める。

(2.2) Lemma. C を有限生成 A -加群で $\dim C = 2$ とすると,
 $\sup \{ \gamma(D); D \text{ は } H_1(a, b; C) \text{ の homomorphic image で, } a, b \text{ は } C \text{ の s.o.p.} \} < \infty$.

証明. A は complete としてよい。 $U = U_D(0)$ を (0) の C の中での準素分解の、次元が 2 の成約とする、(即ち, $\dim C/U = 2$ かつ C/U は unmixed.)。このとき, C/U は、有限生成を local cohomologies を持つ。又, $\dim U \leq 1$ 。 $a, b \in C$ の s.o.p. とする。

完全系列

$$0 \rightarrow U \rightarrow C \rightarrow C/U \rightarrow 0$$

より, a, b に関する Koszul homology の exact sequence を得る:

$$H_1(a, b; U) \longrightarrow H_1(a, b; C) \xrightarrow{\pi} H_1(a, b; C/U) \longrightarrow \dots$$

D を $H_1(a, b; C)$ の任意の homomorphic image とする。適当な D'', D' (\cong なり), 次の可換図式を得る:

$$\begin{array}{ccccccc} H_1(a, b; U) & \longrightarrow & H_1(a, b; C) & \longrightarrow & \text{Im}(\pi) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & D'' & \longrightarrow & D & \longrightarrow & D' \longrightarrow 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

$\gamma(D)$ を上から書き換えるには、 $\gamma(D)$ と $\gamma(D')$ とをおきくれば十分である。まず、 $\text{Im}(\pi) \subset H_1(a, b; C_U)$ だから、
 $\gamma(D') \leq l_A(\text{Im}(\pi)) \leq l_A(H_1(a, b; C_U)) \leq 2h^0(C_U) + h^1(C_U)$.
一方、 $Z_1(a, b; U) \subset U^{(2)}$ だから D' は、 $U^{(2)}$ の homomorphic image $U_E^{(2)}$ の submodule となる。 $\dim U \leq 1$ だから、(1.2)(i) を適用して、 $\gamma(D') \leq \gamma(U_E^{(2)})$ となる。(Q.E.D.)

上の証明の最後の部分は、結局、一般に、次のことを持
主張することとなる。

(2.3) Lemma. N が有限生成 A -加群で、 $\dim N = 1$ とする。

a_1, \dots, a_r を任意の A の要素とする。 D が $H_k(a_1, \dots, a_r; N)$ の任意の homomorphic image とすると、 $\gamma(D)$ には、 a_1, \dots, a_r には依らない (r と k のみに依る) 上限が存在する。

では、本節の目標である (2.1) の証明を始めよう。

A は complete としておく。 $(\circ) = U \cap V$ を (\circ) の準素分解で、
 $\bar{A} = A/U$ は unmixed で 3 次元、 $A' = A/V$ は次元が ≤ 2 。
次の完全系列がある：

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow \bar{A} \oplus A' \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

ここで, $C = A/(U+V)$ で, dimension ≥ 2 . さて, $q = (a, b, c)$ を A の parameter ideal とする. Koszul homology の完全系列がある.

$$H_1(q_f; \bar{A} \oplus A') \rightarrow H_1(q_f; C) \xrightarrow{\delta} A/q_f \rightarrow \bar{A}/q_f \oplus A'/q_f .$$

(1.2) (ii), (iii) により,

$$\gamma(\bar{A}/q_f) \leq r(\bar{A}) < \infty \quad \text{かつ}$$

$$\gamma(A'/q_f) \leq r_3(A') < \infty .$$

従って, $\gamma(\operatorname{Im} \delta)$ が q_f に依らない上限をもつことを示す.

$\dim C \leq 1$ の場合は, (2.3) より, $\gamma(\operatorname{Im} \delta)$ は上限があることがわかる. そこで, $\dim C = 2$ の場合を考える. $D := \operatorname{Im} \delta$ とする. 次の可換図式を考える.

$$\begin{array}{ccccccc} H_1(q_f; \bar{A} \oplus A') & \longrightarrow & (0:c)_{\bar{A} \oplus A' / (a,b)(\bar{A} \oplus A')} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \xrightarrow{\frac{H_1(a,b;C)}{\cong H_1(a,b;C)}} & H_1(q_f; C) & \longrightarrow & (0:c)_{C / (a,b)C} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow D'' & \longrightarrow D & \longrightarrow D' & \longrightarrow & 0 & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

a, b は C の s.o.p. とみてよいかう, (2.2) より,
 $\gamma(D')$ は上限をもつ. 一方, もし, $H_1(\mathcal{O}_f; \bar{A} \oplus A')$ の
 最小生成系の個数は, f に依らな上限があるとすると, D'
 は, C/E の submodule と見做せて, E の最小生成系
 の個数は, f に依らな上限 n があることになり,
 $\gamma(D') \leq \gamma(C/E) \leq \text{rn}(C) < \infty$.

従って, $H_1(\mathcal{O}_f; \bar{A})$ と $H_1(\mathcal{O}_f; A')$ の A -加群とての最小
 生成系の個数は, f に依らな上限があることを示す.

さて, まず \bar{A} は, 3-dimensional unmixed だから [2] の結果
 より, 次の完全系列が存在する.

$$0 \longrightarrow \bar{A} \xrightarrow{f} B \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

ここで, B は 3 次元 (S_2) 環, 従って, 有限生成な local
 cohomologies をもつ. 又 $\dim F \leq 1$ で, f は finite map..
 f に関する Koszul homology の完全系列を考える:

$$H_2(\mathcal{O}_f; F) \xrightarrow{\lambda} H_1(\mathcal{O}_f; \bar{A}) \xrightarrow{\pi} H_1(\mathcal{O}_f; B)$$

まず, $\mu_A(\text{Im } \pi) = l_A(\text{Im } \pi / \text{Im } (\text{Im } \pi)) \leq l_A(\text{Im } \pi) \leq l_A(H_1(\mathcal{O}_f; B))$
 で, 左端は, B の local cohomologies の長さによって決まる上限を
 もつ.

次に, $\text{Im } \lambda \cong \pi$ で考える. まず $\dim F = 0$ のときは,

$$\mu_A(H_2(q; F)) \leq l_A(H_2(q; F)) \leq 3l_A(F).$$

$\dim F = 1$ のときは, $\mu_A(\text{Im } \lambda) = \mathcal{F}(\text{Im } \lambda / \text{Ker}(\text{Im } \lambda))$ で, (2.3) を便える. かくて, $\mu_A(H_1(q; A))$ は q による上限をもつ.

最後に, $\dim A' = 2$ の場合, $H_1(q; A')$ の最小生成系の個数の上限を求める. ($\dim A' \leq 1$ の場合は, (2.3) を使って直ちに出る.) 1か3には, このとき, A' は uniformly coherent であるので, $\mu_{A'}(\text{Ker}(A'^p \rightarrow A'))$ (これは, p の4によらず決まる上限があり, ([4] の 8.3 (p.23), 2.2 (p.53) を参照), 特に,

$$Z_1(q; A') = \text{Ker}(A'^3 \rightarrow A')$$

だから, $\mu_A(H_1(q; A')) \leq \mu_A(Z_1(q; A'))$ より, 全ての要求は満足されて, 証明は完了する.

以上, 概略ながら, 上(A)の有限性について, 最新の結果を述べて来ました. もちろん, 上(A)の となる環の完全な特徴付けや, さらには, constant な index of reducibility をもつる環の特徴付け等, 今後解決すべき問題は沢山あります. それらについても, 独創して, 研究を続けるつもりであります。

(1982年3月)

REFERENCES

- [0] S. Goto and N. Suzuki, "Index of reducibility of parameter ideals of a local ring." in preparation.
- [1] 後藤・鈴木 "Index of reducibility of parameter ideals of a local ring." 第3回可換環論セミナー報告集(1981)pp.187-197.
- [2] Y. Aoyama, "Some basic results on canonical modules." preprint.
- [3] S. Goto, "Approximately C.-M. rings." to appear in J. of Algebra.
- [4] J.D. Sally, "Numbers of generators of ideals in local rings." Lect. notes in pure and applied mathematics vol. 35(1978) Dekker.
- [5] N. Suzuki, "On the system of parameters for Buchsbaum modules and the generalized modules." 第2回可換環論シンポジウム報告集(1980) pp.165-178.
- [6] S. Goto, "Every Noetherian uniformly coherent ring has dimension at most 2." preprint.
- [7] 後藤四郎, "Buchsbaum 局所環について" 數理解析研究所講究録 374
「可換環論の研究」 1980年2月.
- [8] J. Stückrad, P. Schenzel und W. Vogel, "Theory der Buchsbaum-Moduln." Preprint der Sektion Mathematik Nr.23/24, Martin-Luther-Univ.