数理解析研究所講究録
492巻 1983年 13-27



# $\mathcal{S}$-decomposable operators について

東北大教養　吉野　崇（Takashi Yoshino）

Banach空間$X$上の有界線形作用素$T$が与えられた時、そのspectrum $\sigma(T)$の任意有限個のopen cover$\{G_1, \dots, G_n\}$に対して、$\sigma(T|Y_k)\subset G_k$ となるような$T$の不変部分空間$Y_k$ $(k=1, 2, \dots, n)$ が存在して$X=\sum_{k=1}^{n} Y_k$と分解できるであろうか？　特に、$Y_k$として $\sigma(T|Y_k)\subset G_k$をみたすmaximalな不変部分空間にとれる時、このような$Y_k$を*spectral maximal space*といい、このとき、$T$は*decomposable*であるという。　この概念は、1963年に、C. Foiasによって、従来のDunfordの意味のspectral operatorsを含む新しいclassとして導入された。以来、スペクトル分解の理論に於ける新分野として開拓された。

以下では、$T$の不変部分空間の全体を、Lat$(T)$で表わし、$T$のspectral maximal spacesの全体をSM$(T)$で表わす。$Y\in$ Lat$(T)$は、the restriction $T|Y$ of $T$ と共に the coinduced operator $T^Y$ on the quotient space $X/Y$ を導く。このとき、$T$ が decomposable という性質は $T^Y$ に遺伝するであろうか？　この問題に対して、1976年に、I. Bacalu は、次の結果を得た。$S=\sigma(T|Y)\cap\sigma(T^Y)$ とする時、$\bigcup_{k=1}^{n} G_k \cup G_S \supset \sigma(T^Y)$ 且つ $\tilde{G}_k \cap S = \phi$ $(k=1,2,\cdots,n)$ なる open sets $G_k$ 及び $G_S$ に対して、$\sigma(T^Y|Z_k)\subset G_k$ 且つ $\sigma(T^Y|Z_S)\subset G_S$ をみたす $Z_k\in SM(T^Y)$ 及び $Z_S\in SM(T^Y)$ が存在して、$X/Y=\sum_{k=1}^{n} Z_k + Z_S$ と分解することができる。このような性質を持つ時、$T^Y$ は、$S$-decomposable であるという。$S=\phi$ の時が、丁度 $T^Y$ は、decomposable である。一般に、任意の operator は、$\sigma(T)$-decomposable なることが容易にわかる。

ここでは、$S$-decomposable の一つの新しい特徴付けとして、若干の同値な条件について報告する。

## §1. 準備.

<u>定義 1.</u>　$\sigma_p^0(T)=\{\lambda\in\mathbb{C};\ (z-T)f(z)\equiv 0$ for some non-zero analytic function $f: D_r(\lambda)\to X\}$, ここで $D_r(\lambda)=\{z\in\mathbb{C};\ |z-\lambda|<r\}$, $r>0$ とする。　$\sigma_p^0(T)=\phi$ なるとき、$T$ は、the single-valued extension property を持つという。

<u>性質 1.</u>　[2]　$Y\in Lat(T)$ ならば、

$\sigma_p^0(T^Y)^{\sim}\subset\sigma_p^0(T)^{\sim}\cup\sigma(T|Y)$, ここで "$\sim$" は、closure を

表わす。

<u>定義 2.</u>　閉集合 $F \subset \mathbb{C}$ に対して、$X_T(F) = \{ x \in X$ ; $(z-T)f(z) \equiv x$ for some analytic function $f : \mathbb{C} \setminus F \to X \}$ とし、任意の集合 $E \subset \mathbb{C}$ に対して、$X_T(E) = \cup \{ X_T(F)$ ; $F \subset E$ and $F$ is closed$\}$ とする。　このとき、$X_T(E)$ を $T$ の the spectral manifold という。

<u>性質 2.</u>　(i) $X_T(E)$ は $T$ で不変な linear manifold である。　(ii) $E_1 \subset E_2 \Rightarrow X_T(E_1) \subset X_T(E_2)$.　(iii) $X_T(E) = X_T(E \cap \sigma(T))$, $X_T(\sigma(T)) = X$ and $X_T(\emptyset) = \{0\}$.　(iv) $Y \in \mathrm{Lat}(T)$ ならば、$Y \subset X_T(\sigma(T|Y))$ and $X_{T|Y}(E) \subset X_T(E)$.

<u>性質 3.</u>　[3] 閉集合 $F \subset \mathbb{C}$ に対して、$x \in X_T(F)$ ならば、$(z-T)f(z) \equiv x$ for some analytic function $f : \mathbb{C} \setminus F \to X$ であるが、このとき、$f(z) \in X_T(F)$ for any $z \in \mathbb{C} \setminus F$ である。

<u>定理 1.</u>　(1) $\sigma(T/X_T(E)^{\sim}) \subset E \Rightarrow X_T(E) \in SM(T)$.
(2) $X_T(E)$, closed $\Rightarrow \sigma(T/X_T(E)) \subset E \cup \sigma_p^{\circ}(T)^{\sim}$.

<u>定理 2.</u>　$F_1 \cap F_2 = \emptyset$ なる閉集合 $F_j$ $(j=1,2)$ に対して、$X_T(F_1 \cup F_2) = X_T(F_1) + X_T(F_2)$ である。　更に、$\sigma(T/X_T(F_1 \cup F_2)^{\sim}) \subset F_1 \cup F_2 \Rightarrow X_T(F_1 \cup F_2)$, $X_T(F_j) \in SM(T)$ であり、$\sigma(T/X_T(F_j)) \subset F_j$ 且つ $X_T(F_1) \cap X_T(F_2) = \{0\}$ である。

<u>系 1.</u>　与えられた閉集合 $S \subset \mathbb{C}$ に対して、$S$ を含む凡ての閉集合 $F$ に対して $\sigma(T/X_T(F)^{\sim}) \subset F \Rightarrow F' \cap S = \emptyset$ なる

凡ての閉集合 $F'$ に対して、$X_T(F') \in SM(T)$ 且つ $\sigma(T|X_T(F')) \subset F'$ である。

<u>系 2.</u>　与えられた閉集合 $S \subset \mathbb{C}$ に対して、$S$ を含む凡ての閉集合 $G$ に対して $\sigma(T|X_T(G^{\sim})^{\sim}) \subset G^{\sim}$ $\Rightarrow$ $D^{\sim} \cap S = \emptyset$ なる凡ての閉集合 $D$ に対して、$X_T(D^{\sim}) \in SM(T)$ 且つ $\sigma(T|X_T(D^{\sim})) \subset D^{\sim}$ である。

<u>補助定理.</u>　閉集合族 $F_\alpha \subset \mathbb{C}$ に対して、$F_\alpha \cup F_\beta \supset \sigma_p^0(T)^{\sim}$ for any $\alpha, \beta$ such as $\alpha \neq \beta$ $\Rightarrow$ $\bigcap_\alpha X_T(F_\alpha) = X_T(\bigcap_\alpha F_\alpha)$.

<u>定理 3.</u>　$Y \in Lat(T)$ 及び閉集合 $F \subset \mathbb{C}$ に対して、$X_T(F)/Y \subset X_{T^Y}(F)$. 特に、$X_T(F \cup \sigma(T/Y) \cup \sigma_p^0(T)^{\sim})/Y = X_{T^Y}(F \cup \sigma(T/Y) \cup \sigma_p^0(T)^{\sim})$ である。

<u>系 3.</u>　$Y \in Lat(T)$ 及び閉集合 $F \subset \mathbb{C}$ に対して、$X_T(F \cup \sigma(T|Y) \cup \sigma_p^0(T)^{\sim})$, closed $\Rightarrow$ $X_{T^Y}(F \cup \sigma(T|Y) \cup \sigma_p^0(T)^{\sim}) \in SM(T^Y)$ 且つ $\sigma(T^Y|X_{T^Y}(F \cup \sigma(T|Y) \cup \sigma_p^0(T)^{\sim})) \subset F \cup \sigma(T/Y) \cup \sigma_p^0(T)^{\sim}$.

<u>系 4.</u>　$Y \in Lat(T)$ に対して、$X_T(F \cup \sigma(T|Y) \cup \sigma_p^0(T)^{\sim})$, closed for every closed set $F \subset \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $F' \cap [\sigma(T|Y) \cup \sigma_p^0(T)^{\sim}] = \emptyset$ なる凡ての closed set $F'$ に対して、$X_{T^Y}(F') \in SM(T^Y)$ 且つ $\sigma(T^Y|X_{T^Y}(F')) \subset F'$ である。

<u>定理 4.</u>　与えられた閉集合 $S \subset \mathbb{C}$ に対して、$S$ を含む凡ての閉集合 $G$ に対して $X_T(G^{\sim})$ が閉集合 $\Rightarrow$ $\sigma_p^0(T)^{\sim} \subset S \cup H$

である。　但し、Hは the holes of $S$（$\mathbb{C}\setminus S$ の bounded components）である。

<u>系 5.</u>　[6] 任意の開集合 $G \subset \mathbb{C}$ に対して、$X_T(G^{\sim})$が閉集合 ⇨ $\sigma_p^o(T) = \emptyset$ である。

以上、spectral manifolds の性質について、昨年11月に、伊豆に於ける研究集会（科研費総合(A)）で報告したので証明は省略する。

<u>定義 3.</u>　閉集合 $S \subset \sigma(T)$ 及び a positive integer $n$ に対して、$\bigcup_{j=1}^{n} G_j \cup G_S \supset \sigma(T)$ 且つ $G_j^{\sim} \cap S = \emptyset$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ なる任意の開集合 $G_j$ 及び $G_S$ に対して、$\sigma(T|Y_j) \subset G_j$ 及び $\sigma(T|Y_S) \subset G_S$ をみたす $Y_j \in SM(T)$ 及び $Y_S \in SM(T)$ が存在して、$X = \sum_{j=1}^{n} Y_j + Y_S$ と分解できるとき、T は、$(S, n+1)$-decomposable といい、$S = \emptyset$ の場合、$(n+1)$-decomposable という。　又、凡ての positive integer $n$ に対して、T が $(S, n+1)$-decomposable（又は、$(n+1)$-decomposable）ならば、T は、単に、$S$-decomposable（又は、decomposable）であるという。

<u>性質 4.</u>　[1] $T$, $(S, 2)$-decomposable ⇨ $\sigma_p^o(T)^{\sim} \subset S$ 且つ $S$ を含む凡ての閉集合 F に対して、$X_T(F) \in SM(T)$であり、

$\sigma(T|X_T(F))\subset F$ である。

$X$ を、the Banach space $C[a,b]$ of complex-valued continuous functions on $[a,b]$ with the norm $\|x\| = \sup_{t\in[a,b]}|x(t)|$, $x\in X$ とするとき、$Tx = tx(t)$, $t\in[a,b]$, $x\in X$ によって定義される operator $T$ は、not spectral, decomposable operator の例として、よく知られている。 又、上に準備した spectral manifolds の性質についての結果を用いれば、序論で述べた I. Bacalu の結果を容易に証明することができる。 即ち、$G_k' = G_k\cap[\mathbb{C}\setminus\sigma(T|Y)]$, $G_S' = G_S\cup[\mathbb{C}\setminus\sigma(T^Y)]$ とすれば、$G_k'$ 及び $G_S'$ は開集合で、$\bigcup_{k=1}^{n} G_k'\cup G_S'$

$$
\begin{aligned}
&= \bigcup_{k=1}^{n}\{G_k\cap[\mathbb{C}\setminus\sigma(T|Y)]\}\cup G_S\cup[\mathbb{C}\setminus\sigma(T^Y)] \\
&= \{\bigcup_{k=1}^{n} G_k\cup G_S\cup[\mathbb{C}\setminus\sigma(T^Y)]\}\cap\{[\mathbb{C}\setminus\sigma(T|Y)]\cup G_S\cup[\mathbb{C}\setminus\sigma(T^Y)]\} \\
&\supset \{\sigma(T^Y)\cup[\mathbb{C}\setminus\sigma(T^Y)]\}\cap\{[\mathbb{C}\setminus\sigma(T|Y)\cap\sigma(T^Y)]\cup G_S\} \\
&= [\mathbb{C}\setminus S]\cup G_S\supset[\mathbb{C}\setminus G_S]\cup G_S = \mathbb{C}\supset\sigma(T)
\end{aligned}
$$

だから、$\{G_1', \cdots, G_n', G_S'\}$ は $\sigma(T)$ の open cover である。 $T$ は、仮定より、decomposable だから、$\sigma(T|Y_k)\subset G_k'$ 且つ $\sigma(T|Y_S)\subset G_S'$ なる $Y_k\in SM(T)$ 及び $Y_S\in SM(T)$ が存在して、$X = \sum_{k=1}^{n} Y_k + Y_S$ と分解できる。 又、性質4によって、$\sigma_p^{\circ}(T) = \phi$ 且つ、任意の閉集合 $F\subset\mathbb{C}$ に対して $X_T(F)$ は閉集合である。 従って、

$\sigma(T|Y_k)\cap[\sigma(T|Y)\cup\sigma_p^{\circ}(T)^{\sim}] = \sigma(T|Y_k)\cap\sigma(T|Y)\subset G_k'\cap\sigma(T|Y)$

$= G_k \cap [\mathbb{C} \setminus \sigma(T|Y)] \cap \sigma(T|Y) = \emptyset$ だから、 $Z_k = X_{T^Y}(\sigma(T|Y_k))$,
$Z_S = X_{T^Y}(\sigma(T|Y_S) \cup \sigma(T|Y))$ とすれば、系3及び系4によって、 $Z_k \in SM(T^Y)$ 且つ $Z_S \in SM(T^Y)$ であり、 $\sigma(T^Y|Z_k) \subset \sigma(T|Y_k) \cap \sigma(T^Y) \subset G_k' \cap \sigma(T^Y) = G_k \cap [\mathbb{C} \setminus \sigma(T|Y)] \cap \sigma(T^Y) \subset G_k$,
又、 $\sigma(T^Y|Z_S) \subset [\sigma(T|Y_S) \cup \sigma(T|Y)] \cap \sigma(T^Y) \subset [G_S' \cup \sigma(T|Y)] \cap \sigma(T^Y)$
$= \{G_S \cup [\mathbb{C} \setminus \sigma(T^Y)] \cup \sigma(T|Y)\} \cap \sigma(T^Y) = [G_S \cap \sigma(T^Y)] \cup [\sigma(T|Y) \cap \sigma(T^Y)]$
$= [G_S \cap \sigma(T^Y)] \cup S \subset G_S$ である。 次に、性質2を用いて、
$X = \sum_{k=1}^{n} Y_k + Y_S \subset \sum_{k=1}^{n} X_T(\sigma(T|Y_k)) + X_T(\sigma(T|Y_S))$
$\subset \sum_{k=1}^{n} X_T(\sigma(T|Y_k)) + X_T(\sigma(T|Y_S) \cup \sigma(T|Y))$ だから、定理3を用いて、 $X/Y \subset \sum_{k=1}^{n} X_T(\sigma(T|Y_k))/Y + X_T(\sigma(T|Y_S) \cup \sigma(T|Y))/Y$
$\subset \sum_{k=1}^{n} Z_k + Z_S \subset X/Y$ である。 よって、 $X/Y = \sum_{k=1}^{n} Z_k + Z_S$ と分解できる。 即ち、 $T^Y$ は、 $S$-decomposable である。

## §2、主な結果

定理5、 次の命題は同値である。([9]を参照せよ。)

(1) $T$ は、 $S$-decomposableである。

(2) $T$ は、 $(S, 2)$-decomposableである。

(3) $S$ を含む任意の閉集合 $F$ に対して、 $\sigma(T|X_T(F)^{\sim}) \subset F$ 且つ $\sigma(T^{X_T(F)^{\sim}}) \subset [\mathbb{C} \setminus F^{\circ}] \cup S$ である。 但し、 $F^{\circ}$ は $F$ の内部を表わす。

(4) $S$ を含む任意の開集合 $G$ に対して、 $\sigma(T|X_T(G^{\sim})^{\sim}) \subset G^{\sim}$

且つ $\sigma(T^{X_T(G^\sim)^\sim}) \subset [\mathbb{C}\setminus G] \cup S$ である。

(5) $S$を含む任意の開集合$G$に対して、$\sigma(T|Y) \subset G^\sim$ 且つ、$\sigma(T^Y) \subset [\mathbb{C}\setminus G] \cup S$ となるような$Y \in Lat(T)$が存在する。

(6) $S$を含む任意の閉集合$F$に対して、$\sigma(T|X_T(F)^\sim) \subset F$であり、又、$G_1^\sim \cap S = \phi$ 且つ $G_S \supset S$ なる任意の開集合$G_1$及び$G_S$に対して、$X_T(G_1 \cup G_S) = X_T(G_1) + X_T(G_S)$である。

(7) $S$を含む任意の開集合$G$に対して、$\sigma(T|X_T(G^\sim)^\sim) \subset G^\sim$であり、又、$G_1^\sim \cap S = \phi$ 且つ $G_S \supset S$ なる任意の開集合$G_1$及び$G_S$ に対して、$X_T(G_1 \cup G_S) = X_T(G_1) + X_T(G_S)$である。

証明. (1)⇒(2); 定義より明らか。

(2)⇒(3); 性質4より後半を示せばよい。 $z_0 \in \mathbb{C}\setminus\{[\mathbb{C}\setminus F^\circ] \cup S\} = F^\circ \cap [\mathbb{C}\setminus S]$ ならば、$D_r(z_0)^\sim \subset F^\circ \cap [\mathbb{C}\setminus S]$ なる$D_r(z_0)$がとれる。$G_1 = D_r(z_0)$, $G_S = \mathbb{C}\setminus D_{r/2}(z_0)^\sim$ とすれば、仮定より、$\sigma(T|Y_1) \subset G_1$ 且つ $\sigma(T|Y_S) \subset G_S$ なる $Y_1 \in SM(T)$ 及び $Y_S \in SM(T)$が存在して、$X = Y_1 + Y_S$ と分解できる。 $\sigma(T|Y_1) \subset G_1 = D_r(z_0) \subset F^\circ \cap [\mathbb{C}\setminus S] \subset F$ だから、性質2より、$Y_1 \subset X_T(\sigma(T|Y_1)) \subset X_T(F)$ である。又、$x \in X$ とすると、$x = y_1 + y_S$, $y_1 \in Y_1$, $y_S \in Y_S$と表わせて、$z_0 \notin G_S \supset \sigma(T|Y_S)$ だから、$y = (z_0 - T|Y_S)^{-1} y_S$ とすれば、$\hat{x} = \hat{y}_1 + \hat{y}_S = \hat{y}_S = (z_0 - T^{X_T(F)})\hat{y} \in (z_0 - T^{X_T(F)}) X/X_T(F)$ である。よって、$(z_0 - T^{X_T(F)}) X/X_T(F) = X/X_T(F)$.

次に、或る $\hat{x} \in X/X_T(F)$ に対して、$(z_0 - T^{X_T(F)})\hat{x} = \hat{0}$ とすれば、$(z_0 - T)x \in X_T(F)$ で、$Y_1 \subset X_T(F)$ であったから、

$(z_0 - T)y_S = (z_0 - T)(x - y_1) = (z_0 - T)x - (z_0 - T)y_1 \in X_T(F).$

従って、$(z_0 - T)y_S \in Y_S \cap X_T(F) \subset X_T(\sigma(T|Y_S)) \cap X_T(F)$

$\subset X_T(G_S^{\sim}) \cap X_T(F) = X_T(G_S^{\sim} \cap F)$ である。　何故ならば、$G_S^{\sim} \cup F \supset [\mathbb{C} \setminus D_{r/2}(z_0)] \cup D_r(z_0) = \mathbb{C}$ だから補助定理によって。

従って、或る analytic function $f: \mathbb{C} \setminus [G_S^{\sim} \cap F] \to X$ が存在して、$(z - T)f(z) \equiv (z_0 - T)y_S$ であり、性質 3 より、$f(z) \in X_T(G_S^{\sim} \cap F) \subset X_T(G_S^{\sim})$ for any $z \in \mathbb{C} \setminus [G_S^{\sim} \cap F]$ である。

$S \subset G_S$ だから、性質 4 より、$X_T(G_S^{\sim}) \in SM(T)$ 且つ $\sigma(T|X_T(G_S^{\sim})) \subset G_S^{\sim}$ である。　又、性質 2 より、$Y_S \subset X_T(\sigma(T|Y_S)) \subset X_T(G_S^{\sim})$ だから、$(z - T)(z_0 - T|X_T(G_S^{\sim}))^{-1} f(z) = (z - T|X_T(G_S^{\sim}))(z_0 - T|X_T(G_S^{\sim}))^{-1} f(z)$

$= (z_0 - T|X_T(G_S^{\sim}))^{-1}(z - T|X_T(G_S^{\sim}))f(z) = (z_0 - T|X_T(G_S^{\sim}))^{-1}(z - T)f(z)$

$\equiv (z_0 - T|X_T(G_S^{\sim}))^{-1}(z_0 - T)y_S = y_S.$　よって、$y_S \in X_T(G_S^{\sim} \cap F)$

$\subset X_T(F).$　故に、$x = y_1 + y_S \in X_T(F).$　即ち、$\hat{x} = \hat{0}.$

よって、$(z_0 - T^{X_T(F)})$ は injective.　前半と合せて、invertible なることが示されたから、$\sigma(T^{X_T(F)}) \subset [\mathbb{C} \setminus F^{\circ}] \cup S$ が示された。

(3) ⇨ (4)；$G^{\sim}$ に (3) を用いればよい。

(4) ⇨ (5)；$Y = X_T(G^{\sim})^{\sim}$ とすればよい。

(5) ⇨ (6)；はじめに、$\sigma_p^{\circ}(T)^{\sim} \subset S$ を示す。

もし、$z_0 \in \sigma_p^\circ(T) \setminus S$ ならば、$D_r(z_0)^\sim \cap S = \phi$ なる $D_r(z_0) \subset \sigma_p^\circ(T)$ がとれるから、或る non-zero analytic function $f: D_r(z_0) \to X$ が存在して、$(z - T)f(z) \equiv 0$ である。
$G = \mathbb{C} \setminus D_{r/2}(z_0)^\sim$ とすると、$G \supset S$ だから、仮定により、$\sigma(T/Y) \subset G^\sim$ 且つ $\sigma(T^Y) \subset [\mathbb{C} \setminus G] \cup S$ なる $Y \in Lat(T)$ が存在する。 よって、$(z - T^Y)\widehat{f(z)} \equiv \hat{0}$ on $D_r(z_0)$. 故に、$\widehat{f(z)} \equiv \hat{0}$ on $[\mathbb{C} \setminus \sigma(T^Y)] \cap D_r(z_0) \supset (\mathbb{C} \setminus \{[\mathbb{C} \setminus G] \cup S\}) \cap D_r(z_0)$
$= G \cap [\mathbb{C} \setminus S] \cap D_r(z_0) = G \cap D_r(z_0) = [\mathbb{C} \setminus D_{r/2}(z_0)^\sim] \cap D_r(z_0) \neq \phi$.
従って、一致の定理により、$\widehat{f(z)} \equiv \hat{0}$ on $D_r(z_0)$. 故に、$f(z) \in Y$ for any $z \in D_r(z_0)$ である。 よって、$0 \equiv (z - T)f(z) = (z - T/Y)f(z)$ on $D_r(z_0)$ で、$N = \{z \in D_r(z_0);\ f(z) = 0\}$ とすれば、$D_r(z_0) \setminus N \subset \sigma_p(T/Y) \subset \sigma(T/Y) \subset G^\sim = \mathbb{C} \setminus D_{r/2}(z_0)$ である。
$N^\circ \neq \phi$ ならば、一致の定理によって、$f(z) \equiv 0$ on $D_r(z_0)$ となり $f(z)$ が non-zero analytic function on $D_r(z_0)$ ということに反するから、$N^\circ = \phi$. 従って、$D_r(z_0)^\sim = [D_r(z_0) \setminus N]^\sim \subset G^\sim = \mathbb{C} \setminus D_{r/2}(z_0)$ となり矛盾する。 よって、$\sigma_p^\circ(T) \subset S$.
$S$ は閉集合だから、$\sigma_p^\circ(T)^\sim \subset S$ である。

次に、$S$ を含む任意の閉集合 $F$ に対して、$X_T(F)$ は閉集合なることを示す。

$G_\alpha \supset F \cap \sigma(T) \supset S$ なる任意の開集合 $G_\alpha$ に対して、仮定より、$\sigma(T/Y_\alpha) \subset G_\alpha^\sim$ 且つ $\sigma(T^{Y_\alpha}) \subset [\mathbb{C} \setminus G_\alpha] \cup S$ なる $Y_\alpha \in Lat(T)$

が存在する。 性質2より、$X/Y_\alpha = X_{T^{Y_\alpha}}(\sigma(T^{Y_\alpha}))$
$\subset X_{T^{Y_\alpha}}([\mathbb{C}\setminus G_\alpha]\cup S)\subset X/Y_\alpha$ だから、$X/Y_\alpha = X_{T^{Y_\alpha}}([\mathbb{C}\setminus G_\alpha]\cup S)$で、
$\sigma(T^{Y_\alpha}|X_{T^{Y_\alpha}}([\mathbb{C}\setminus G_\alpha]\cup S)) = \sigma(T^{Y_\alpha})\subset[\mathbb{C}\setminus G_\alpha]\cup S$ だから、定理2により、$X/Y_\alpha = X_{T^{Y_\alpha}}(\mathbb{C}\setminus G_\alpha)\oplus X_{T^{Y_\alpha}}(S)$ と分解できて、
$X_{T^{Y_\alpha}}(S)\in SM(T^{Y_\alpha})$ である。 $F\cap\sigma(T)\supset S\supset\sigma_p^\circ(T)^\sim$ だから、
補助定理及び性質2を用いて、$X_{T^{Y_\alpha}}(F\cap\sigma(T))\cap X_{T^{Y_\alpha}}(\mathbb{C}\setminus G_\alpha)$
$= X_{T^{Y_\alpha}}([F\cap\sigma(T)]\cap[\mathbb{C}\setminus G_\alpha]) = X_{T^{Y_\alpha}}(\emptyset)=\{\hat{0}\}$. よって、
$X_{T^{Y_\alpha}}(F\cap\sigma(T))\subset X_{T^{Y_\alpha}}(S)$ $(\subset X_{T^{Y_\alpha}}(F\cap\sigma(T)))$ である。
$(\because\ \hat{x}\in X_{T^{Y_\alpha}}(F\cap\sigma(T))\Rightarrow\hat{x}=\hat{x}_1+\hat{x}_2,\ \hat{x}_1\in X_{T^{Y_\alpha}}(\mathbb{C}\setminus G_\alpha)$,
$\hat{x}_2\in X_{T^{Y_\alpha}}(S)$で、$X_{T^{Y_\alpha}}(S)\subset X_{T^{Y_\alpha}}(F\cap\sigma(T))$ だから、$\hat{x}_1=\hat{x}-\hat{x}_2$
$\in X_{T^{Y_\alpha}}(F\cap\sigma(T))\cap X_{T^{Y_\alpha}}(\mathbb{C}\setminus G_\alpha)=\{\hat{0}\}$. よって、$\hat{x}_1=\hat{0}$. 故に、
$\hat{x}=\hat{x}_2\in X_{T^{Y_\alpha}}(S)$.) $G_\alpha^\sim\supset\sigma(T/Y_\alpha)\cup S\supset\sigma(T/Y_\alpha)\cup\sigma_p^\circ(T)^\sim$ だから、性質2及び定理3によって、$X_T(F\cap\sigma(T))/Y_\alpha\subset X_{T^{Y_\alpha}}(F\cap\sigma(T))$
$= X_{T^{Y_\alpha}}(S)\subset X_{T^{Y_\alpha}}(G_\alpha^\sim) = X_T(G_\alpha^\sim)/Y_\alpha$. $X_\alpha(S)=\{x\in X;\ \hat{x}\in X_{T^{Y_\alpha}}(S)\}$
とすれば、$X_\alpha(S)/Y_\alpha = X_{T^{Y_\alpha}}(S)$ だから、$X_\alpha(S)$も閉集合である。
$G_\alpha^\sim\supset\sigma_p^\circ(T)^\sim$だから、補助定理を用いて、$X_T(F\cap\sigma(T))\subset\bigcap_\alpha X_\alpha(S)$
$\subset\bigcap_\alpha X_T(G_\alpha^\sim) = X_T(\bigcap_\alpha G_\alpha^\sim) = X_T(F\cap\sigma(T))$ だから、$X_T(F)$
$=X_T(F\cap\sigma(T)) = \bigcap_\alpha X_\alpha(S)$ は、閉集合である。 よって、定理1によって、$\sigma(T|X_T(F))\subset F$である。

最後に、後半を示す。

性質2により、$X_T(G_1)+X_T(G_S)\subset X_T(G_1\cup G_S)$ なること

は明らかだから逆向きを示せばよい。

$x \in X_T(G_1 \cup G_S)$ とすれば、$S \subset F \subset G_1 \cup G_S$ なる閉集合 $F$ が存在して $x \in X_T(F)$ である。$D_1^\sim \subset G_1$, $D_S^\sim \subset G_S$ 且つ、$F \subset D_1 \cup D_S$ なる開集合 $D_1$ 及び $D_S$ をとり、$S \subset D \subset D^\sim \subset D_S$ 且つ $D^\sim \cap G_1^\sim = \emptyset$ なる開集合 $D$ をえらんで、$G = [D_1 \cap D_S] \cup D$ とすれば、$G$ は $S$ を含む開集合だから、仮定により、$\sigma(T/Y) \subset G^\sim$ 且つ $\sigma(T^Y) \subset [\mathbb{C} \setminus G] \cup S$ となる $Y \in Lat(T)$ が存在する。

$[F \setminus D_1] \cap [F \setminus D_S] = \emptyset$, $D_1^\sim \cap D^\sim = \emptyset$, $X_T(D_1^\sim \cup D^\sim) \in SM(T)$ であり、定理1より、$\sigma(T/X_T(D_1^\sim \cup D^\sim)) \subset D_1^\sim \cup D^\sim$ だから、性質2及び定理2と3によって、$X_T(F)/Y \subset X_{T^Y}(F) = X_{T^Y}(F \cap \sigma(T^Y))$

$\subset X_{T^Y}(F \cap \{[\mathbb{C} \setminus G] \cup S\}) \subset X_{T^Y}(F \cap \{\mathbb{C} \setminus [D_1 \cap D_S]\})$

$= X_{T^Y}([F \setminus D_1] \cup [F \setminus D_S]) = X_{T^Y}(F \setminus D_1) + X_{T^Y}(F \setminus D_S)$

$\subset X_{T^Y}([F \setminus D_1] \cup G^\sim) + X_{T^Y}([F \setminus D_S] \cup G^\sim)$

$= X_T([F \setminus D_1] \cup G^\sim)/Y + X_T([F \setminus D_S] \cup G^\sim)/Y$

$\subset X_T(G_S)/Y + X_T(D_1^\sim \cup D^\sim)/Y = X_T(G_S)/Y + \{X_T(D_1^\sim) \oplus X_T(D^\sim)\}/Y$

$\subset \{X_T(G_S) + X_T(G_1)\}/Y$. 故に、$x \in X_T(F) \subset X_T(G_S) + X_T(G_1)$.

よって、$X_T(G_1 \cup G_S) \subset X_T(G_S) + X_T(G_1)$.

<u>(6) ⇒ (7)</u>; $G^\sim$ に(6)を用いればよい。

<u>(7) ⇒ (1)</u>; $n$ を任意の positive integer とする。

$\bigcup_{j=1}^{n} G_j \cup G_S \supset \sigma(T)$ 且つ $G_j^\sim \cap S = \emptyset$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ なる任意の開集合 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 及び $G_S$ に対して、$D_j^\sim \subset G_j$, $D_S^\sim \subset G_S$ 且つ、

$\bigcup_{j=1}^{n} D_j \cup D_S \supset \sigma(T)$, $D_j^{\sim} \cap S = \emptyset$ なる開集合 $D_1, D_2, \cdots, D_n$ 及び $D_S$ をとれば、仮定及び性質2によって、$X = X_T(\sigma(T))$

$\subset X_T(D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_n \cup D_S) = X_T(D_1) + X_T(D_2 \cup \cdots \cup D_n \cup D_S)$

$= \cdots\cdots = X_T(D_1) + X_T(D_2) + \cdots + X_T(D_n) + X_T(D_S)$

$\subset X_T(D_1^{\sim}) + X_T(D_2^{\sim}) + \cdots\cdots + X_T(D_n^{\sim}) + X_T(D_S^{\sim}) \subset X$. 故に、

$X = X_T(D_1^{\sim}) + X_T(D_2^{\sim}) + \cdots + X_T(D_n^{\sim}) + X_T(D_S^{\sim})$ である。又、系2により、$X_T(D_j^{\sim}) \in SM(T)$ 且つ $\sigma(T|X_T(D_j^{\sim})) \subset D_j^{\sim} \subset G_j$ であり、仮定及び定理1によって、$X_T(D_S^{\sim}) \in SM(T)$ 且つ $\sigma(T|X_T(D_S^{\sim}))$ $\subset D_S^{\sim} \subset G_S$ だから、T は、$S$-decomposable である。

系 6. 次の命題は同値である。

(1) $T$ は、decomposable である。

(2) $T$ は、2-decomposable である。([7]).

(3) 任意の閉集合 $F \subset \mathbb{C}$ に対して、$X_T(F)$ は閉集合であり、且つ $\sigma(T^{X_T(F)}) \subset \mathbb{C} \setminus F^{\circ}$ である。([4]).

(4) 任意の開集合 $G \subset \mathbb{C}$ に対して、$X_T(G^{\sim})$ は閉集合であり、且つ $\sigma(T^{X_T(G^{\sim})}) \subset \mathbb{C} \setminus G$ である。([5]).

(5) 任意の開集合 $G \subset \mathbb{C}$ に対して、$\sigma(T|Y) \subset G^{\sim}$ 且つ $\sigma(T^Y) \subset \mathbb{C} \setminus G$ なる $Y \in Lat(T)$ が存在する。([5]).

(6) 任意の閉集合 $F \subset \mathbb{C}$ に対して、$X_T(F)$ は閉集合であり、又、任意の開集合 $G_1 \subset \mathbb{C}$ 及び $G_2 \subset \mathbb{C}$ に対して、

$X_T(G_1 \cup G_2) = X_T(G_1) + X_T(G_2)$である。 ([8]).

(7) 任意の開集合$G \subset \mathbb{C}$に対して、$X_T(G^{\sim})$は閉集合であり、

又、任意の開集合$G_1 \subset \mathbb{C}$及び$G_2 \subset \mathbb{C}$に対して、

$X_T(G_1 \cup G_2) = X_T(G_1) + X_T(G_2)$である。

証明. 定理1及び系5により、次の(a)と(b)及び、(a')と(b')とが同値であることに注意すればよい。

(a) 任意の開集合$G \subset \mathbb{C}$に対して、$\sigma(T|X_T(G^{\sim})^{\sim}) \subset G^{\sim}$である。

(b) 任意の開集合$G \subset \mathbb{C}$に対して、$X_T(G^{\sim})$は閉集合である。

(a') 任意の閉集合$F \subset \mathbb{C}$に対して、$\sigma(T|X_T(F)^{\sim}) \subset F$である。

(b') 任意の閉集合$F \subset \mathbb{C}$に対して、$X_T(F)$は閉集合である。

## 参考文献


[1] I. Bacalu, S-decomposable operator in Banach spaces, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., 20 (1975) 1101-1107.

[2] ――――, Some properties of decomposable operators, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., 21 (1976) 177-194.

[3] C. Foias, Spectral maximal spaces and decomposable operators in Banach space, Arch. Math., 14 (1963) 341-349.

[4] A. A. Jafarian and F.-H. Vasilescu, A characterization of 2-decomposable operators, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., 19 (1974) 769-771.

[5] R. Lange, Equivalent conditions for decomposable operators, Proc. Amer. Math. Soc., 82 (1981) 401-406.

[6] M. Radjabalipour, On subnormal operators, Trans. Amer. Math. Soc., 211 (1975) 377-389.

[7] ————————, Equivalence of decomposable and 2-decomposable operators, Pacific Journ. of Math., 77 (1978) 243-247.

[8] K. Tanahashi, A characterization of decomposable operators, Tôhoku Math. Journ., 34 (1982) 295-300.

[9] ————————, On S-decomposable operators, (to appear in Tôhoku Math. Journ.).