

Semi-free S^1 -actions on homotopy spheres
and higher dimensional knots

東大 理 枝田 幹也

(Mitsuya Masuda)

§1 序

ホモトピー球面上の smooth S^1 作用を考える際、作用が「free」の場合と、「semi-free」の場合が、最も単純な場合と、思われる。 「free」の場合、 S^1 -orbit space を考えると、それは、ホモトピー複素射影空間になり、容易に、

“ホモトピー- S^{2n+1} 上の free S^1 作用全体”

$\uparrow \downarrow 1:1$

“ホモトピー- $\mathbb{C}P^n$ 全体”

であることがわかる。この事実に注目し、surgery理論を用いて、ホモトピー球面上の free S^1 作用が、(可算)無限にあることが示される ([Hc])。しかし、残念ながら、この集合には、自然な群構造がない。したがって、(可算)無限にあるとか言えないし、(中心的な位置にあると思われる)生成元は何かということも無意味な問題である。これに

反して、「semi-free」の場合には、固定点のまわりの equivariant connected sum は $\#$ で、自然に可換群の構造が入り、その構造や、生成元は何かということを論じることはできる。二の群の free part の rank については、たとえば Browder-Petrie^[1] によると完全な解答が与えられてる。 $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ は、free part の生成元について、考えていい。

§2. 背景

以下、考え方 category は C^∞ -category, manifold は 断りかねない限りすべて closed とし、次の記号を用いる。

- $X \cong Y \Leftrightarrow X$ と Y は ホモトピー同値
- $X \cong Y \Leftrightarrow X$ と Y は diffeo.
- $\rho \in X$ 上の 群 G の 作用 と いたどり。

G -fixed point set $\Sigma F(\rho, X)$ 又は $F(G, X)$

G -orbit space $\Sigma X/\rho$ 又は X/G と表す。

定義

$$\Sigma_g^n(S^1) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (\Sigma, \phi) \middle| \begin{array}{l} \Sigma \cong S^n \quad (\Sigma: \text{oriented}) \\ \phi: \text{semi-free } S^1\text{-action on } \Sigma \\ \text{s.t.} \\ \text{(i)} \quad F(\phi, \Sigma) \cong S^g \\ \text{(ii)} \quad (\text{complex})\text{normal bundle of } F(\phi, \Sigma) \text{ is trivial} \end{array} \right\}$$

- ⑤ $n-g$ は正の偶数
- $F(\phi, \Sigma)$ の normal bundle は S^1 作用 (= \mathbb{R}^1)。自然に複素構造が入る。
 - 多くの場合 (ii) の条件は満たされてない。(例121)。
 $n-g=2$ のとき、 Σ は後述の通り。

上記の集合は、固定点のまわりの equivariant connected sum により可換群の構造をもつ。 Σ の群の free part の rank は、次で与えられる。

定理1 (Browder-Petrie [B-P]),

$$\text{rank}_{\mathbb{Z}} \Sigma_g^n(S^1) = \text{rank}_{\mathbb{Z}} H^{4+}(CP^{S-1} \times (D^{g+1}, S^2); \mathbb{Z}) - \varepsilon$$

ただし、 $2S = n-g$,

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \nmid m \equiv 1 \pmod{4} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

= (1) $n-g=2$ のとき、 $\text{rank}_{\mathbb{Z}} \Sigma_g^n(S^1) = 0$ (これは、 $\Sigma_g^n(S^1) = 0$ for $n \geq 7$ w.r.t. Hsiang [Hr]).

(2) $n-g=4$ のとき、

$$\text{rank}_{\mathbb{Z}} \Sigma_g^n(S^1) = \begin{cases} 1 & \nmid g \equiv 3 \pmod{4} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

この場合、 $\Sigma_g^n(S^1)$ は codim 3 高次元 knot group と密接な関係である。これを述べるために、次の定義を用いる。

定義

$$\Sigma_g^m \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{array}{l} \text{oriented pair } (M, N) \\ | \\ M \cong S^m \\ N \cong S^2 \\ N \subset M \text{ submanifold} \end{array} \right\}$$

さらに、 $M \cong S^m$ を要請した Σ_g^m の部分集合と、 $\Sigma_g^{m, 0}$ とかく。

これらの集合は、 $m-g \geq 3 \Rightarrow g \geq 5$ かつ knot connected sum 1 = 2 11. 可換群 $= \mathbb{Z}/3$ 。

注意 1. $\Sigma_g^m \cong \Sigma_g^{m, 0} \oplus \mathbb{H}^m$, ただし \mathbb{H}^m はホモトピー S^m 全体の可換群 (特に有限群)。

さて、 (Σ, ϕ) が $\Sigma_g^n(S^1)$ の元であるとき、orbit space Σ/ϕ は、 $m-g=4$ 以上とされ、ホモトピー一球面に下ることが、容易にわかる。1. $\mathbb{Z}/2$, 2. pair $(\Sigma/\phi, F(\phi\Sigma))$ は Σ_g^m の元を定める。

定理 2 (Levine [L1] 1973). Σ^n 上の対応。

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_g^{n+4}(S^1) & \xrightarrow{\sim} & \Sigma_g^{n+3} \\ \downarrow & \Psi & \\ (\Sigma, \phi) & \xrightarrow{\quad} & (\Sigma/\phi, F(\phi\Sigma)) \end{array}$$

非同型

一方、knot group Σ_g^{g+3} は Levine [L₂] (= §1). 木戸比
群の言葉を用いて、ある exact sequence で表わされ（後述）、
ある程度わかっている。例えば、

$$\Sigma_g^{g+3} = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \text{torsion}_{(\text{infinite})} & \text{if } g \equiv 3 \pmod{4} \\ \text{torsion}_{(\text{infinite})} & \text{otherwise} \end{cases}$$

である。この事実と、定理2より $\text{rank}_{\mathbb{Z}} \Sigma_g^{g+4}(S^1)$ が決定
されるが、これは、Browder-Petrie (= §1) 得られた前述のものと
一致してしまった。

(注) $g=3$ のとき (= Haefliger (= §1)) $\Sigma_3^6 \cong \mathbb{Z}$ (i.e. torsionless)
よし、2. $\Sigma_3^7(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

一方、最近 M. Davis は次の事を示した。

定理3 (Davis [D] 1982). $\Sigma_3^n(S^1)$ の生成元は、 S^4 上の
 S^3 -bundle として得られるもしくは 木戸比 S^7 上の自然な
semi-free S^1 作用である。

(具体的な構成については [D] を参照 (2<7=§1)).

$\Sigma_g^n(S^1)$ の torsion subgroup で、たとえば $\widehat{\Sigma}_g^n(S^1)$ を
書くことになると、Davis の定理の一一般化として、自然に、

次の問題が考えられる。

問題 $\hat{\Sigma}_g^n(S^1)$ の生成元は何か。

特に $m-g=4$ のときはどうか。

注意2. 一般の m, g のときは、“一般に” rank が 1 以上となるが、特に $m-g=4$ のときは、たゞ HF に

$$\hat{\Sigma}_g^m(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{if } g=3 (4) \\ 0 & \text{その他。} \end{cases}$$

§3. 例1.

ホモトピー-球面工の semi-free S^1 作用の例と (2). 以下で述べる Brieskorn 上の S^1 作用が有名である。

$$N_\varepsilon := \{(u, v, z_1, \dots, z_{2k}) \in \mathbb{C}^{2k+3} \mid u^3 + v^{6r-1} + z_1^2 + \dots + z_{2k}^2 = \varepsilon\} \quad (\varepsilon \neq 0)$$

とおくとき、 $M^{4k-1}(r) \cong N_\varepsilon \cap S^{4k+5}$ の diffeo. type は ε の取り方によらず、次の性質をもつ。

事実 $bP^{4m} \cong \overset{(4m+2)}{\text{parallelizable manifold}}$ と bound すホモトピー- S^{4m-1} 全体とすと、 $m \geq 2$ のとき、有限巡回群で。

$$(1) M^{4m-1}(r) \in bP^{4m}$$

$$(2) M^{4m-1}(r) \cong S^{4m-1} \Leftrightarrow b_m | r \quad (b_m \text{ は } bP^{4m} \text{ の位数})$$

$\in \alpha M^{4k-1}(r)$ 上には次の自然な semi-free S^1 作用がある。

$\lambda < k$, $q = e^{i\theta} \in S^1$ とすると $= \alpha \circ \phi_\lambda$ 作用 $\phi_\lambda \in$

$$\Phi_\lambda(g, z) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} I_{2k+2} & 0 \\ 0 & D(\theta) \\ & \ddots \\ & & D(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{2k} \end{pmatrix}$$

と定義する。

ただし, $I_{2k+2} = (2k+2)$ 次 単位行列

$$D(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

明らかに, $F(\Phi_\lambda, M^{4k-1}(r)) = M^{4k-1}(r) \in bP^{4k}$.

\uparrow
 $(k \geq 2$ の必要)

よく知られているように、固定束の complex normal bundle は trivial である。 \Rightarrow $\Sigma_q(S^1)$ の定義の(ii) の条件は満たさない。
従って, $(M^{4k-1}(r), \Phi_\lambda) \in \sum_{4k-1}^{4k-1}(S^1)$ の元であるためには、固定束 $M^{4k-1}(r)$ が S^{4k-1} に diffeo. であることが、必要十分である。事実 $\alpha(2)$ より。

$$(M^{4k-1}(r), \Phi_\lambda) \in \sum_{4k-1}^{4k-1}(S^1) \Leftrightarrow b_\lambda | r.$$

注意3. $W^{4k}(r) \stackrel{\text{def}}{=} N_r \cap D^{4k+6}$ とすると、 $= \alpha \circ \phi_\lambda$ と、 semi-free S^1 作用が、同様に定義される。それを $\widetilde{\Phi}_\lambda$ とかく。

- $\partial(W^{4k}(r), \widetilde{\Phi}_\lambda) = (M^{4k-1}(r), \Phi_\lambda)$

- $F(\tilde{\Phi}_e, W^{4k}(r)) = W^{4l}(r)$,
- $W^{4l}(r)$ as complex normal bundle is trivial.

§ 4. 結果

主定理 2次のようす. Homomorphism $\hat{\beta} : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$.

$$\hat{\beta} : \sum_{4l-1}^{4k-1} (\mathbb{S}^1) \rightarrow \mathbb{Z} \text{ from.}$$

s.t. $\hat{\beta}((M^{4k-1}(b_e), \Phi_e)) = \alpha_e \quad \text{for } l \geq 2 \quad (\text{up to sign})$

\mathbb{Z}^m . $\alpha_e = \begin{cases} 1 & \text{if } l \text{ is even,} \\ 2 & \text{if } l \text{ is odd.} \end{cases}$

系 1. $k=l+1$, つまり codim 4 の場合. $(M^{4l+3}(b_e), \Phi_e)$
 $(l \geq 2)$ は. $\hat{\beta} \sum_{4l-1}^{4l+3} (\mathbb{S}^1) (\cong \mathbb{Z})$ の

(i) 生成元 (l が 偶数のとき)

(ii) 生成元が生成元の 2倍 (l が 奇数のとき).

又. codim 4 の場合は. knot 群 $\sum_{4l+2, 4l-1}$ と関連
 がある. 一方. ∞ の群 1st. Levine [L_2] (= 81). exact
 sequence

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \sum_{4l+2, 4l-1} \rightarrow \ker \sigma_e \rightarrow 0$$

应用 112. 表示され得る。すなはち、 σ_ℓ は inclusion たる
導かれる自然な homomorphism $\pi_{4\ell-1}(G_3, SO_3) \rightarrow \pi_{4\ell-1}(G, SO)$ 。
しかし、 π の exact sequence が“split” していいのかどうかに
ついては、知られていないようである。我々の定理は、
 π の splitting に関する情報を与えていく。

系 2. Levine exact sequence $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha_\ell} \sum_{4\ell+2, 4\ell-1} \rightarrow \mathbb{H}_{4\ell+2} \rightarrow 0$
は、 ℓ が偶数のとき、split。

<証> 注意 1 と定理 2.5.1. $\sum_{4\ell-1}^{4\ell+3}(S^1) \cong \sum_{4\ell+2, 4\ell-1} \oplus \mathbb{H}_{4\ell+2}$
 $\hat{\beta}$ は、 $\sum_{4\ell-1}^{4\ell+3}(S^1)$ から \mathbb{Z} への homomorphism であるが、
 $\mathbb{H}_{4\ell+2}$ は有限群であるから、 $\sum_{4\ell+2, 4\ell-1}$ から \mathbb{Z} への homomorphism
>を導く。これも同じ記号 $\hat{\beta}$ で表わすと、 α_ℓ と $\hat{\beta}$ の定義から、
 $\hat{\beta} \circ \alpha_\ell(1) = \alpha_\ell$ がわかる。□

(注) $\ell=1$ のとき、上 exact sequence は split (2.1.11)
(実際 $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$ となる)。 $\ell > 1$ なる奇数
>のとき、上 exact sequence が“split” するかどうかは、
>明らかでない。

§5. $\hat{\beta}$ の定義の動機:

$\hat{\beta}$ の定義の動機となる Montgomery-Yang の主張を.

簡単に復習しよう。まず:

$$\Pi = \{ \text{ホモトピー-CP}^3 \text{ 全体} \} \quad \text{とする}$$

(実は、この集合は、和が定義できて、可換群になつるとか)。

$[M-Y] \in \Pi$ は、知られて(いる) $X \in \Pi$ の元であるとき。

$\gamma(X) \in \mathbb{Z}$ も次で定まる。

$$p_1(X) = (4 + 24 \gamma(X)) X^2$$

$= z$ 。 $p_1(X)$ は X の first Pontryagin class z である。

$H^2(X; \mathbb{Z})$ の生成元。

定理4 (Montgomery-Yang, Wall, ---)

$$\Sigma_3^n(S^1) \xrightarrow{\Psi} \Sigma_3^6 = \Sigma^{6,3} \xrightarrow{\kappa} \Pi \xrightarrow{\gamma} \mathbb{Z}$$

は亦然、isomorphism.

この定理は、我々にいくつかのことを教えてくれる。

例えば、

(I) $\Sigma_3^n(S^1) \cong \Sigma^{6,3}$ を研究するなどと、 Π を研究することは同じ。

(II) γ 、本質的には Π の (first) Pontryagin class、すな $\Sigma_3^n(S^1)$ の invariant である。

これら 2 つの事実は、高次元の場合でも成り立つ。成立する。
それを説明する前に、上の対応をもう少し詳しく見よう。

まず、 Ψ は定理 2 で与えられたもと、つまり、orbit space Σ と \mathbb{C}^n の対応。 K は “knot のまわり”、適当な framing を取って、surgery ある対応。 Σ の順序は、入れかえてもよい。つまり、まず (equivariant) surgery して、次に orbit space Σ と \mathbb{C}^n も、同じことである。

\widetilde{S}^{2n-1} , \widetilde{D}^{2n} は \mathbb{C}^n の単位球面、单位球である複素数とかけ算という S^1 作用をもつものとすると、 $\Sigma \in \sum_3^n(S^1)$ は、

$$\Sigma = D^4 \times \widetilde{S}^3 \sqcup_{f'} S^3 \times \widetilde{D}^4 \quad \text{と分解する。}$$

$\Sigma = Z$ 、 $f: S^3 \times \widetilde{S}^3 \rightarrow S^3 \times \widetilde{S}^3$ equivariant diffeo. Z 。

$S^3 \times \{0\} = F(\Phi, \Sigma)$ 。今、注意した様に、合成 $K \circ \Psi$ は、次の様に記述できる。

$$\begin{array}{c} \Sigma = D^4 \times \widetilde{S}^3 \sqcup_{f'} S^3 \times \widetilde{D}^4 \\ \downarrow \text{equivariant surgery} \\ K \circ \Psi \left(\begin{array}{c} \widetilde{\Sigma} = D^4 \times \widetilde{S}^3 \sqcup_{f'} D^4 \times \widetilde{S}^3 \\ \downarrow \text{orbit Space} \\ \widetilde{\Sigma}/S^1 = D^4 \times S^2 \sqcup_{f'} D^4 \times S^2 \end{array} \right) \in \Pi. \end{array}$$

さて、高次元の場合をみよう。 $\Sigma \in \sum_g^n(S^1)$ ($n-g=2g$) とすると、

$$\begin{aligned}
 \Sigma &= D^{8+1} \times \widetilde{S}^{2s-1} \sqcup S^8 \times \widetilde{D}^{2s} \quad \text{と分解する。} \\
 &\downarrow \qquad \qquad \qquad \text{equivariant surgery} \\
 \widetilde{\Sigma} &= D^{8+1} \times \widetilde{S}^{2s-1} \sqcup D^{8+1} \times \widetilde{S}^{2s-1} \\
 &\downarrow \qquad \qquad \qquad \text{orbit space.} \\
 \widetilde{\Sigma}/S^1 &= D^{8+1} \times \mathbb{C}P^{s-1} \sqcup D^{8+1} \times \mathbb{C}P^{s-1}
 \end{aligned}$$

高次元の場合、 $\Sigma = \widetilde{\Sigma}/S^1$ と対応させる対応は、全単射とは言えず \mathbb{Z} の。ある意味で“ほとんど”全単射”であることはわかる。これは、(I) の事実に対応してい。した \mathbb{Z} , $\widetilde{\Sigma}/S^1$ の Pontryagin class たちが、 $\sum_g^n(S^1)$ の invariant E と \mathbb{Z} とを “予想”される。実際、Pontryagin class E 用い、 $\text{rank}_{\mathbb{Z}} H^*(\mathbb{C}P^{s-1} \times (D^{8+1}, S^8); \mathbb{Z})$ の分。 $\sum_g^n(S^1)$ から \mathbb{Z} への homomorphism が定義でき、Signature theorem から、多くのとも、このうち独立なものは、 $\text{rank}_{\mathbb{Z}} H^{4*}(\mathbb{C}P^{s-1} \times (D^{8+1}, S^8); \mathbb{Z}) - \text{個} \geq \text{ある} \geq \text{わかり}.$ これらが実際 独立であることは Surgery 理論を使って示せる。

§6. $\widehat{\beta}$ の定義:

簡単のため、 $\sum_{4l-1}^{4l+3}(S^1)$ (codim 4) で $l \geq 2$ の場合

のみ扱う。 $(\Sigma, \phi) \in \sum_{4l-1}^{4l+3}(S^1)$ に付し、固定点集合の
まわりの equivariant embedding $h: S^{4l-1} \times \tilde{D}^4 \rightarrow \Sigma$
 $\hookrightarrow \Sigma$ とする。これを用ひて、前節で述べた対応 $(= f')$
 $\tilde{\Sigma}/S^1$ を得る。次の補題は Mayer-Vietoris exact seq.
よりすぐり扱う。

補題1. $l \geq 2$ のとき $H^*(\tilde{\Sigma}/S^1) \cong H^*(S^{4l} \times S^2)$.

定義 $l \geq 2$ のとき、

$\beta((\Sigma, \phi)) \stackrel{\text{def}}{=} x^* p_l(\tilde{\Sigma}/S^1) [\tilde{\Sigma}/S^1] \in \mathbb{Z}$
とする。 x は $H^2(\tilde{\Sigma}/S^1; \mathbb{Z})$ の生成元。

㊂ 正確には、生成元 x の取り方には、符号の
ありましさがある。それを除くには、向こうのこと考慮に
入れる必要がある。

補題2. (1) β の値は h の取り方によらない。
(2) $\beta: \sum_{4l-1}^{4l+3}(S^1) \rightarrow \mathbb{Z}$ は homomorphism
<証> 略 \square

一般に β が全射であることは期待できない。

実際、次のことが示せる。

補題3. β_α の値は $(2\ell-1)! \alpha_\ell \times \left(\frac{B_{2\ell} \alpha}{4\ell} \text{ の分母} \right)$ ($= d_{2\ell} \alpha$) で割れる。 B_ℓ は ℓ 番目の Bernoulli 数。

<証> $\theta_\ell \in \widetilde{\Sigma}/S^1 \rightarrow$ tangent bundle (= associate) する principal $SO(4\ell+2)$ bundle $\rightarrow H^{4\ell}(\widetilde{\Sigma}/S^1; \mathbb{Z})$ (= 値) \rightarrow obstruction class となる。Kervaire [K] 5'.

$$P_\ell(\widetilde{\Sigma}/S^1) = (2\ell-1)! \alpha_\ell \theta_\ell \quad \text{--- ①}$$

- 一方 Atiyah-Hirzebruch-Singer 5')

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\ni e^{x^\vee} \hat{\wedge} (\widetilde{\Sigma}/S^1) [\widetilde{\Sigma}/S^1] \quad (\hat{\wedge}(\) \text{ は } \hat{n}\text{-class}) \\ &= - \frac{B_\ell}{2 \times (2\ell)!} x^\vee P_\ell(\widetilde{\Sigma}/S^1) [\widetilde{\Sigma}/S^1] \\ &= - \frac{B_\ell \alpha_\ell}{4\ell} x^\vee \theta_\ell [\widetilde{\Sigma}/S^1] \end{aligned}$$

$$\therefore x^\vee \theta_\ell [\widetilde{\Sigma}/S^1] \text{ は } \frac{B_\ell \alpha_\ell}{4\ell} \text{ の分母で割り切れる} \quad \text{--- ②}$$

① ② より 補題を得る。 \square

この補題 5'

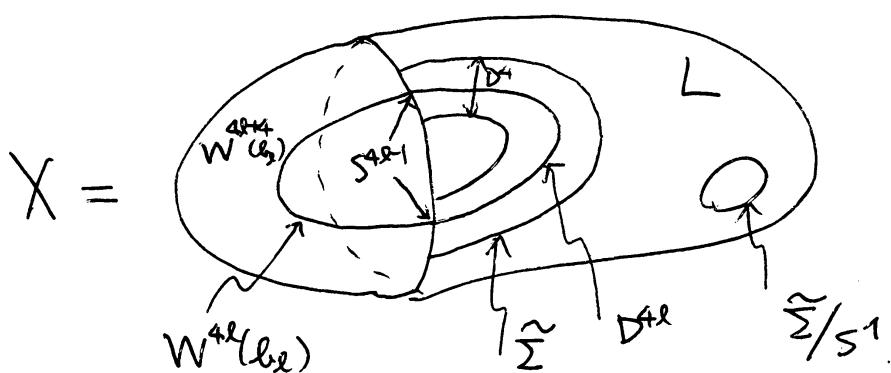
$$\begin{aligned} \text{定義: } \hat{\beta}((\Sigma, \phi)) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\beta((\Sigma, \phi))}{d_\ell} \in \mathbb{Z} \\ &\quad (d_\ell \text{ は 補題 3 の } \alpha) \end{aligned}$$

§7. 定理の証明.

$k = l+1$ の場合だけ示す。まず、 $(M^{4l+3}(b_e), \phi_e) = \partial(W^{4l+4}(r), \tilde{\phi}_e)$ である (§3 注意3)。我々の商 N は $r = b_e$ である。簡単のため $M^{4l+3}(b_e) \in \Sigma$, 作用 ϕ_e を中と略記する。計算 (たま) のは 値 $\beta(\Sigma, \phi) = x^0 p_e(\tilde{\Sigma}/S^1) [\tilde{\Sigma}/S^1]$ 。そこで次のように closed S^1 -manifold X を考へる。

$L: \tilde{\Sigma} \xrightarrow{S^1} \tilde{\Sigma}/S^1$ は associate $L = D^2$ -bundle の total space とする。

$W^{4l+4}(b_e)$ a boundary $M^{4l+3}(b_e)$ a 固定点は standard な S^{4l-1} であるから、これに沿って handle $D^{4l} \times \tilde{D}^4$ が equivariant に付加されることが出来る。これによつて出来た S^1 -manifold N a boundary である。またに $\tilde{\Sigma}$ があることに注意された。従つて N と L をそれぞれの境界に沿つてつけ合つて出来る。すなはち、求めまる X であるつまり、 $X = W^{4l+4}(b_e) \cup D^{4l} \times \tilde{D}^4 \cup L$



X は $(4l+4)$ 次元 closed S^1 -manifold で、作用は semi-free, 固定点は $W^{4l}(b_2) \cup D^{4l} (=F_{\Sigma}) \times \tilde{\Sigma}/S^1$ の Σ の連結成分からなる。

さて、 F の complex normal bundle が trivial であることに注意し、 G -signature theorem を用いると、

$$\text{Sign } X = \mathcal{L}(F) \left(\frac{t+1}{t-1} \right)^2 [F] + \mathcal{L}(\tilde{\Sigma}/S^1) \left(\frac{te^{2x}+1}{te^{2x}-1} \right) [\tilde{\Sigma}/S^1]$$

ただし、

t は標準的な複素 1 次元の S^1 -module,

$\mathcal{L}(\cdot)$ は Hirzebruch の L -class.

これを、

$$\begin{cases} \text{Sign } F = \text{Sign } W^{4l}(b_2) + \text{Sign } D^{4l} = 8b_2 \\ \mathcal{L}(\tilde{\Sigma}/S^1) = 1 + C_2 P_e(\tilde{\Sigma}/S^1) \quad (C_2 = 2^{2l} (2^{2l}-1) B_e / (2e)_1) \end{cases}$$

と代入すると、

$$\text{Sign } X = 8b_2 \left(\frac{t+1}{t-1} \right)^2 + (1 + C_2 P_e(\tilde{\Sigma}/S^1)) \left(\frac{te^{2x}+1}{te^{2x}-1} \right) [\tilde{\Sigma}/S^1].$$

$\text{Sign } X$ は定義より定数であるから、右辺は $t=1$ で Σ を持つならば 0 となる。従って簡単な計算より、

$$X^0 P_e(\tilde{\Sigma}/S^1) [\tilde{\Sigma}/S^1] = \frac{8b_2}{C_2} \quad \text{でなければならぬ}.$$

$$\hat{\beta}((\Sigma, \phi)) = \frac{\beta((\Sigma, \phi))}{d\epsilon} = \frac{8b_2}{C_2 d\epsilon}.$$

∴ $\alpha \in$.

$$\left\{ \begin{array}{l} b_\ell = 2^{2\ell-2}(2^{2\ell-1}-1) \left(\frac{4B_\ell}{\ell} \text{ or } \frac{B_\ell}{3} \right) \\ c_\ell = 2^{2\ell}(2^{2\ell-1}-1) \frac{B_\ell}{(2\ell)!} \\ d_\ell = (2\ell-1)! \alpha_\ell \left(\frac{B_\ell \alpha_\ell}{4\ell} \text{ or } \frac{\alpha_\ell}{3} \right) \end{array} \right.$$

由代入可得

$$\hat{\beta}((\Sigma, \phi)) = \alpha_\ell$$

∴ 由定理 我们定理 2 表明， \square

参考文献：

[Hc] W.C. Hsiang , A note on free differentiable actions of S^1 and S^3 on homotopy spheres , Ann. of Math. 83 (1966)

[B-P] Browder-Petrie , Diffeomorphisms of manifolds and semifree actions on homotopy spheres , Bull. of A.M.S. 77 (1971).

[Hr] W.Y. Hsiang , On the unknottedness of the fixed point set of differentiable circle group actions on spheres — P.A. Smith conjecture , Bull. of A.M.S. 70 (1964).

[L₁] Levine, Semi-free circle actions on spheres,
Invent. Math. 22 (1973).

[L₂] —, A classification of differentiable knots,
Ann. of Math. 82 (1965).

[D] M. Davis, Some group actions on homotopy spheres
of dimension seven and fifteen, Amer. J. Math. 104 (1982).

[M-Y] Montgomery-Yang, Differentiable actions on
homotopy seven spheres, Trans. A.M.S. 122 (1966)

[K] Kervaire, A note on obstructions and
characteristic classes, Amer. J. Math. 81 (1959).