

置換類群の torsion part

阪大 宮田武彦 (Takehiko Miyata)

§0 序論

π は有限群とする。有限 π -集合 S (作用は左から)のアーベル化 $\mathbb{Z}S$ ($\mathbb{Z}[S]$ と表記する事もある)は同型な $\mathbb{Z}\pi$ -加群を置換 $\mathbb{Z}\pi$ -加群と呼ぶ。 M と N は置換加群の直和因子となるとす。

M と N は同値 $\Leftrightarrow M \oplus \mathbb{Z}S \cong N \oplus \mathbb{Z}S$ となる π -集合 S , T が存在。

と定義する。

$T^0(\pi) = \{ \text{置換加群の直和因子の同型類} \} / (\text{上の同値関係})$ とする。直和分解を導入すると、 $T^0(\pi)$ は有限生成アーベル群になる。これを Dress に従って π の置換類群と呼ぼう ([DR.2])。有限生成には \exists ことは [S-E] 定理 6.17 (p.118) を参照。 $T^0(\pi)$ の階数、すなはち $\dim_{\mathbb{Q}} (\bigoplus_{\mathbb{Z}} T^0(\pi))$ は Dress により計算されている ([DR.2] 定理 3.1, p.10).

この小論では $T^0(\pi)$ の torsion part $t(\pi)$ を考察する。

すすめ; $t(\pi)$ は明るかなる部分群を持つことを説明しよう。 π の

類群 (locally free class group) $Cl(\mathbb{Z}\pi)$ が $\tilde{\tau}^g(\pi)$ へ自然な準同型があり、その核 $C^g(\mathbb{Z}\pi)$ は

$$C^g(\mathbb{Z}\pi) = \left\{ [\alpha] - [\mathbb{Z}\pi] \in Cl(\mathbb{Z}\pi) \mid \alpha \oplus \mathbb{Z}\pi \cong \mathbb{Z}\pi \oplus \mathbb{Z}T \text{ となる } \right. \\ \left. \text{ } \pi\text{-集合 } S, T \text{ が存在} \right\}$$

と定めている。 π の $\mathbb{Z}\pi$ を含む極大整域の一つを \mathcal{M} とするとき、

$$D(\mathbb{Z}\pi) = \ker(Cl(\mathbb{Z}\pi) \rightarrow Cl(\mathcal{M}))$$

π の the kernel group と呼ぶ。 $D(\mathbb{Z}\pi)$ は極大整域 $\mathcal{M} \rightarrow$ 取り方によって定まるといふのが知られてる。Oliver は

$$D(\mathbb{Z}\pi) = \left\{ [\alpha] - [\mathbb{Z}\pi] \mid \alpha \oplus \mathbb{Z}S \cong \mathbb{Z}\pi \oplus \mathbb{Z}S \text{ となる } \pi\text{-集合 } S \text{ が存在} \right\}$$

従って $C^g(\mathbb{Z}\pi) \supset D(\mathbb{Z}\pi)$ を示し、種々の π に対して巧妙な方法で $C^g(\mathbb{Z}\pi)/D(\mathbb{Z}\pi)$ を計算している ([OL], 2]).

さて、 $Cl(\mathbb{Z}\pi)/C^g(\mathbb{Z}\pi) \hookrightarrow t(\pi)$ から左の群は $t(\pi)$ の部分群となり、左の $=$ の群を比較することを考える。

大域的な結果を出すには、局所的な結果から出発するのが常套手段だから、 $T^g(\pi)$ に応じて局所的な対称を作つ。 R は可換環、 S は (有限) π 集合とする。 RS と同型な $R\pi$ 加群を R 上の置換加群 と呼び、 R 上の置換加群の直和因子に対して $T^g(\pi)$ の類似物を作り、これを $T^g(\pi, R)$ と言え、torsion part を $t(\pi, R)$ と言くことにする。 R が \mathbb{Z} に整域のとき、 $R\pi$ -lattices (有限

生成元 $R\pi$ -加群で R -加群としては torsion を持たないもの)の同型類上直和で和を入れると半群がである。この半群のクロタンティエック群を π の R 上の表現環 といい $K(\pi, R)$ と書く。

π のバーンサイド環 $A(\pi)$ から $K(\pi, R)$ へ自然な写像があるが、その像を $A(\pi, R)$ と書くこととする。

p を素数とすると、 p の \mathbb{Z} の局所化を \mathbb{Z}_p 、完備化を $\hat{\mathbb{Z}}_p$ と書くことにする。

Dressは [DR2] の §2 で、この研究の出発点に $T = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$ の結果を本質的に証明している。自然な準同型

$$\varphi : T^g(\pi) \longrightarrow \prod_{p \mid |\pi|} T^g(\pi, \mathbb{Z}_p)$$

を考える。 φ を $t(\pi)$ に制限すると、 $\varphi|_{t(\pi)}$ の像は $\prod_{p \mid |\pi|} t(\pi, \mathbb{Z}_p)$ に含まれる。また、 φ の像が決定であることが [DR2] 定理 2.1 の証明(p.3)で示される。各素数 p に対し自然な準同型

$$\psi_p : T^g(\pi, \mathbb{Z}_p) \longrightarrow K(\pi, \mathbb{Q}) / A(\pi, \mathbb{Q})$$

を考えると、

命題 0.1. $(M_p) \in \prod_{p \mid |\pi|} T^g(\pi, \mathbb{Z}_p)$ とする。

$$(M_p) \in \text{Im } \varphi \iff \forall p, g \mid |\pi| \text{ に対して } \psi_p(M_p) = \psi_g(M_g).$$

$K(\pi, \mathbb{Q}) / A(\pi, \mathbb{Q})$ は有限群 (Artin の帰納定理)，また各 $p \mid |\pi|$ に対して $T^g(\pi, \mathbb{Z}_p)$ は有限生成であるから、命題 1 によると $\text{coker } \varphi$ は有限アーベル群である。この命題の例を作りうるに便利である。

[DR2] の §2 の重要な結果は補題 2.4 と言うよりは、その証明方法である。この方法は次の二つの命題に分けられる。

命題 0.2. $\ker(\varphi|_{t(\pi)}) = \ker \varphi$. すなはち、

$$\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} T^{\delta}(\pi, \mathbb{Z}) \cong \prod_{p \mid |\pi|} \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} T^{\delta}(\pi, \mathbb{Z}_p) \quad ([\text{DR2}] \text{ 定理 2.1})$$

命題 0.3. $|\pi| \cdot \ker \varphi \subset \text{cl}(\mathbb{Z}^{\pi}) / C^{\delta}(\mathbb{Z}^{\pi})$.

この命題は、[DR2] の §2 で奇妙にも見落されてしまふ補題を補うと、 $|\pi| \cdot t(\pi) \subset \text{cl}(\mathbb{Z}^{\pi}) / C^{\delta}(\mathbb{Z}^{\pi})$ は 3 定理に拡張である。π が巡回群、すなはち p-群のとき $t(\pi) = \text{cl}(\mathbb{Z}^{\pi}) / C^{\delta}(\mathbb{Z}^{\pi})$ であることが簡単に示せる。つまり、これらの場合は $T^{\delta}(\pi) = t(\pi)$ であることも証明である。

以下各節の内容を述べよう。

§1 では安定同値、局所同型などの概念を説明し、この論文全般で必要な技術を用意する。合併せて、"見落された補題"（補題 1.①）を述べ、命題 0.3 の拡張を証明する。

§2 では補題 1.6 が証明される。この節はまことに技術的である。

§3 では、π が中零群であり of split type たる（例えは π がアーベル群のときにはこの条件を満している）、 $t(\pi) = \text{cl}(\mathbb{Z}^{\pi}) / D(\mathbb{Z}^{\pi})$ であることを示す。

§4. π が特別な metacyclic 群の場合には $t(\pi) = \text{cl}(\mathbb{Z}^{\pi}) / D(\mathbb{Z}^{\pi})$ となることを示す。

§5 では, $t(\pi) \neq \frac{Cl(\mathbb{Z}\pi)}{Cl^0(\mathbb{Z}\pi)}$ のときの 2 種示す。

§1. 局所同型と安定同型.

$\mathbb{Z}\pi$ -lattices M, N が 局所同型 であるとは次の同値条件が成り立つとしてある。

- (i) すべての素数 p に対して $\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} M \cong \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} N$
- (ii) $\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} M \cong \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} N, \quad \forall p \mid |\pi|$
- (iii) $\hat{\mathbb{Z}}_p \otimes_{\mathbb{Z}} M \cong \hat{\mathbb{Z}}_p \otimes_{\mathbb{Z}} N, \quad \forall p \mid |\pi|$
- (iv) $M \oplus \Omega \cong N \oplus \mathbb{Z}\pi$ を満たす影イデアル Ω が存在。
- (v) M, N は $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} K(\pi, 2)$ には同じ元をもつ。
- (vi) $M^m \cong N^m$ となる整数 m が存在する。

この定義は(1)-(2)は、(3)の注意が必要である。

- (1) $\mathbb{Z}_p\pi$ -lattices M, N は満たす

$$M \cong N \iff \hat{\mathbb{Z}}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} M \cong \hat{\mathbb{Z}}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} N$$

- (2) $\mathbb{Z}_p\pi$ -加群（有限生成）は(1)で(2)は Krull-Schmidt の定理が成り立つ。このことから、(i) \iff (v) が言える。

- (3) 射影 $\mathbb{Z}\pi$ -加群上は局所自由である。すなはち、任意の素数 p に対して $\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} P \cong (\mathbb{Z}_p\pi)^n$ となる整数 $n > 0$ が存在する (Swan)。

- (4) (i) \iff (iv) \iff (vi) は本質的で Roiter は $\mathcal{F}3 ([R], [S-E])$ 。

M と N が局所同型のときは $M \sim N$ と書くことにする。

$\mathbb{Z}\pi$ -lattices M, N に対して $M \oplus L \cong N \oplus L$ となる $\mathbb{Z}\pi$ -加群 L が存在するととき、これらは 安定同型であるといふ。 M と N とが安定同型であれば Krull-Schmidt の定理により M と N とは局所同型である。しかし、逆は必ずしも成り立たない。安定同型に関しては次の Oliver の結果 ([OL1]) の結果は基本的である。

M と N とは安定同型 $\iff M \oplus \mathbb{Z}S \cong N \oplus \mathbb{Z}S$, $S: \pi$ 集合。
この結果によれば、自然な準同型 $T^g(\pi) \rightarrow K(\pi, \mathbb{Z})/A(\pi, \mathbb{Z})$ は単射であることが分かる。
 $K(\pi, \mathbb{Z})/A(\pi, \mathbb{Z})$ の torsion part は $t(\pi)$ であることは易學に判る。

$$\text{Res}_H^\pi : A(\pi) \longrightarrow A(H)$$

は H への制限写像とする。

有限群 π は p -シロー部分群 π_p が正規部分群であり、 π/π_p が巡回群のとき法 p で巡回群と呼ばれる。一般の有限群 π に対し、

$$\mathcal{A}_p = \mathcal{A}_p(\pi) = \{ H \leq \pi / H \text{ は法 } p \text{ で巡回群} \}$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\pi) = \bigcup_{p \mid |\pi|} \mathcal{A}_p$$

とかく。今後は \mathcal{A} , \mathcal{A}_p などの意味での \mathcal{A} 使用することにする。

$\mathbb{Z}\pi$ -加群 M は $\mathbb{Z}L M|_H \cap M$ の G の作用の H への制限とする。 π -集合 S は $\mathbb{Z}L \mathbb{Z}[S]|_H = \mathbb{Z}[S|_H]$ の置換 $\mathbb{Z}H$ -加群である。

命題 1.1 ([DR3], §9) π は法 p で巡回群, S, T は π 集合とする.

$$\mathbb{Z}_p S \cong \mathbb{Z}_p T \iff S \cong T.$$

特に $\mathbb{Z}_p S \cong \mathbb{Z}_p T \iff \mathbb{Z}S$ と $\mathbb{Z}T$ は局所同型を意味する.

この命題と Mackey functor の vertex の理論とを使うと,

命題 1.2 ([DR3], §9) π は任意の有限群, S, T は π 集合とする.

$$\mathbb{Z}_p S \cong \mathbb{Z}_p T \iff \text{任意の } H \in \mathcal{A}_p \text{ に対して } S|_H \cong T|_H.$$

が得られる.

$$\Phi_p = \Phi_p(\pi) = \bigcap_{H \in \mathcal{A}_p} \ker(\text{Res}_H^\pi)$$

$$\Phi = \Phi(\pi) = \bigcap_{p \mid |\pi|} \ker(\text{Res}_H^\pi)$$

と置く. これらはバーンサイド環 $A(\pi)$ のイデアルである. 命題 1.2 に吉川替えると

定理 1.3 ([DR3] §9) S, T は π 集合とする.

$$\mathbb{Z}S \text{ と } \mathbb{Z}T \text{ は局所同型} \iff [S] - [T] \in \Phi(\pi)$$

$\mathbb{Z}S$ と $\mathbb{Z}T$ は \mathbb{Z} 同型にはならない (問題 1.1 にて) は [OL1], [OL2]

を参照. そして, 任意の π -集合 S, T は, $\mathbb{Z}S$ と $\mathbb{Z}T$ は局所同型

(この条件は $A(\pi, \mathbb{Z}) \rightarrow K(\pi, \mathbb{Z})$ が準射であることと同値である) が成り立つ必要十分条件は $C^0(\mathbb{Z}\pi) = D(\mathbb{Z}\pi)$ である (これは完全列 $0 \rightarrow C^0(\mathbb{Z}\pi)/D(\mathbb{Z}\pi) \rightarrow A(\pi, \mathbb{Z}) \rightarrow K(\pi, \mathbb{Z})$)

から分る. この注意と命題 1.1 とから π が法 p で巡回群のとき

且 $C^f(\pi) = D(\pi)$ は成り立つている。

補題 1.4 ([DR2], 補題 2.7) π は有限群, B は π の部分群の族で条件

H, K は π の部分群で $gHg^{-1} \subset K$ と T の $g \in \pi$ が存在するとする
る。 $K \in B \Rightarrow H \in B$

を満たす。 $X : B \rightarrow \mathbb{Z}$ は任意の $g \in \pi$, $K \in B$ に対し $X(gKg^{-1}) = X(K)$ が成り立つ写像とする。このとき

$$(i) |H| \cdot X(H) + |S^H| = |T^K|, \quad \forall K \in B$$

$$(ii) (S^H)^H = \emptyset, \quad \forall H \notin B$$

を満たす π に集合 S , T が存在する。

ここで $|S^H|$ は H で固定される S の元の個数。

証明は [T, D] 命題 1.2.3, p3 (Dress の結果) を利用すると直ちに得られる。

この補題は簡単なものであるが, Artin の帰約定理等を含む重要な結果である。

$B = \mathcal{A}_p$, $X(H) = 1$, $H \in \mathcal{A}_p$ の場合には補題 1.4 を適用する。命題 1.2 を考慮に入れると

$$(i) \quad \mathbb{Z}_p^{|\pi|} \oplus \bigoplus'_{H \in \mathcal{A}_p} \mathbb{Z}_p[\frac{\pi}{H}]^{m(H)} \cong \bigoplus'_{H \in \mathcal{A}_p} \mathbb{Z}_p[\frac{\pi}{H}]^{n(H)}, \quad m(H), n(H) \geq 0$$

(\oplus' は共役類上に下, て直和を取ることをあらわす)

なる同型が存在することが分る。

R は可換環, M は有限生成 $\mathbb{Z}\pi$ -加群とする. 同型

$$(2) \quad R\pi \otimes_{R\pi} (M|_H) \cong R[\frac{\pi}{H}] \otimes_R M$$

は良く知られている.

定理 1.5. ([DR1]) M, N は有限生成 $\mathbb{Z}\pi$ -加群とする.

M と N とは局所同型 $\Leftrightarrow \forall H \in A_p$ に対して $M|_H \cong N|_H$.

補題 1.6 π は法 p で巡回群とする. 単射 $A(\pi, \mathbb{Z}_p) \rightarrow K(\pi, \mathbb{Z}_p)$

(命題 1.1 による) の cokernel は有限位数の元をもつ \mathbb{Z} である.

言い替えると, M, N は $\mathbb{Z}_p\pi$ -lattices, S, T は π -集合とする,

$$M^n \oplus \mathbb{Z}_p S \cong N^n \oplus \mathbb{Z}_p T \quad n \geq 1$$

が成り立つ.

$$M \oplus \mathbb{Z}_p S' \cong N \oplus \mathbb{Z}_p T'$$

を満たす π -集合 S', T' が存在する.

命題 1.1 より π が局所同型 \Leftrightarrow 定義 ((iv)) を利用すると, この補題から直ちに, π が法 p で巡回群なら $t(\pi) = \frac{Cl(\mathbb{Z}\pi)}{D(\mathbb{Z}\pi)}$ が分る. π の位数は 21 である非可換群とすると, $T^g(\pi)$ の rank は 1 であることは知られており ([DR2]). 従って, π の場合 $T^g(\pi) \cong \mathbb{Z}$ となる. この補題を利用して, 次の定理を示そう.

定理 1.7. 任意の有限群に対して

$$|\pi| \cdot t(\pi) \subset \frac{Cl(\mathbb{Z}\pi)}{C(\mathbb{Z}\pi)}$$

証明. $t(\pi)$ の一つの元を $[1]$ とする. これは有限位数 k の \mathbb{Z}

$$M^n \oplus ZS \cong ZT$$

となる $n \geq 1$ と π 集合 S, T が存在する. $M \in M \oplus ZS \cong T \in$
 $T^{\cup}(\underbrace{S \cup \dots \cup S}_{n-1 \text{ 回}}) =$ 適当替え, $M^n \cong ZT$ と見て下さい.

$G = A$, $x(H) = 1$, $H \in A$ の場合に補題 1.4 を適用すると,

$$(3) \quad Z^{|\pi|} \oplus \bigoplus'_{H \in A} Z[\frac{\pi}{H}]^{m(H)} \sim \bigoplus'_{H \in A} Z[\frac{\pi}{H}]^{n(H)}, \quad m(H), n(H) \geq 0$$

となる (\sim は局所同型である, す). 補題 1.6 は §3 と
 任意の $H \in A$ に対して $M|_H$ を置換 ZH -加群の差に局所同型
 である. (3) の両辺に $\otimes_Z M$ を作用させると,

$$M^{|\pi|} \oplus ZS' \sim ZT'$$

となる π -集合 S, T の左右が分る. Ramanujan の定理 (局所同型の
 定義(iv)) は §3 と,

$$M^{|\pi|} \oplus ZS' \oplus Z\pi \cong ZT' \oplus 0$$

を満たす射影イデアル α が存在する. $[\alpha] = |\pi| \cdot [M](\text{int}(\pi))$
 だから, $|\pi| \cdot t(\pi) \subset \mathcal{C}(Z\pi)/\mathcal{C}^0(Z\pi)$ である.

§2 補題 1.6 の証明.

有限群 π が split type とは, 直上 の任意の既約表現の
 Schur index は 1 であることをいう. 言ひ替えると, 群環 $Z\pi$ を
 単純成分に分解すると, 各単純成分は可換体上の行列環に相当する.

でいる。 dihedral group, 奇数位数の巾零群等は of split type である。

$(p, |\pi|) = 1$ のときは, \mathbb{Z}_p 上の表現論と \mathbb{F} 上の表現論とは同じであることに注意する。これは π が "of split type" ならば, $\mathbb{Z}_p\pi$ の \mathbb{F} の有限次拡大体での \mathbb{Z}_p の integral closure 上の行列環の直和に等しい。

補題 2.1 $p \nmid (p, |\pi|) = 1$ と π は素数とする。既約 $\mathbb{Z}_p\pi$ -加群 V, V' は \mathbb{F} 上の直和に分れる。 $\hat{\mathbb{Z}}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} V$ と $\hat{\mathbb{Z}}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} V'$ は, $V \neq V'$ ならば, 共通な直和既約な直和因子をもつ。

π が of split type のときは $\hat{\mathbb{Z}}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$ と既約 $\hat{\mathbb{Z}}_p\pi$ -加群の直和に分れるが $i \neq j$ ならば V_i と V_j は同型でない。

証明. $\hat{\mathbb{Z}}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p\pi}(V, V') \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p\pi}(\hat{\mathbb{Z}}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} V, \hat{\mathbb{Z}}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} V')$ が前半は従う。

π が of split type とすると, V は対応する $\mathbb{Z}_p\pi$ の component は $M_n(R)$, R は \mathbb{F} のアーベル群で可換 \mathbb{Z}_p -algebra, とす。では、

$$\hat{\mathbb{Z}}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} R = R_1 \oplus \cdots \oplus R_m \quad R_i \in \mathbb{F}\text{-アーベル群}$$

である。

$$\hat{\mathbb{Z}}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} M_n(R) = M_{n_1}(R_1) \oplus \cdots \oplus M_{n_m}(R_m)$$

$M_{n_i}(R_i)$ は対応する表現を V_i とおくと, $\hat{\mathbb{Z}}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$ と分解して, $i \neq j$ ならば $V_i \not\cong V_j$ である。

系 2.2 π は of split type, $(p, |\pi|) = 1$ とす。 V は $\mathbb{Z}_p\pi$ -

lattice とする。 $W^n \cong \hat{\mathbb{Z}}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} V$ ($n \geq 1$) を満たす $\hat{\mathbb{Z}}_p \pi$ -*lattice* W に対しては、 $W = \hat{\mathbb{Z}}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} W_0$ と $\mathbb{Z}_p \pi$ -*lattice* W_0 が存在する。

証明は補題2.1 から直ちに従う。

π の p -シロー部分群 π_p は正規部分群とする。Hallの定理によると、 $\pi = \pi_p * \mu$ と半直積に書ける。 π の任意の部分群は $H * K$ ($H \subset \pi_p$, $K \subset \mu$) の形である。 H_1, \dots, H_t は π の p -部分群の代表系とし、

$$X_i = \{ H_i * K \mid K \text{ は } N_{\pi}(H_i) \cap \mu \text{ の部分群の } \mu \text{ で } \leftrightarrow \text{ 役類の代表系を動く} \}$$

$$X = X_1 \cup \dots \cup X_t$$

とおく。これは $X_i \cap X_j = \emptyset$ であり、 π の任意の部分群は X の唯一つの元に只役である。

補題2.3. $L' \in X_i$, $L'' \in X_j$ ($i \neq j$) とする。 $\hat{\mathbb{Z}}_p[\pi_{L'}]$ と $\hat{\mathbb{Z}}_p[\pi_{L''}]$ は共通の直既約直和因子を行なう。

証明. $\hat{\mathbb{Z}}_p[\pi_{H_i}]$, $\hat{\mathbb{Z}}_p[\pi_{H_j}]$ は $\hat{\mathbb{Z}}_p \pi_p$ -加群として、 $\mathbb{Z}_p[\pi] =$ 共通の直和因子でも、 $\mathbb{Z}_p[\pi]$ としても、 $\hat{\mathbb{Z}}_p \pi$ -加群としてもどうである。 $\hat{\mathbb{Z}}_p[\pi_{L'}]$ (*resp.* $\hat{\mathbb{Z}}_p[\pi_{L''}]$) は $\hat{\mathbb{Z}}_p[\pi_{H_i}]$ (*resp.* $\hat{\mathbb{Z}}_p[\pi_{H_j}]$) の直和因子であるから補題の証明で \square 。

補題1.6 を証明しよう。 π は法 p で巡回群、すなはち上の μ は位数が p と素な巡回群とする。 S, T を π -集合、 M, N を $\mathbb{Z}_p \pi$ -

加群とし、

$$M^n \oplus \mathbb{Z}_p S \cong N^n \oplus \mathbb{Z}_p T$$

では3個の因数があるとす、

$$M \oplus \mathbb{Z}_p S' \cong N \oplus \mathbb{Z}_p T'$$

ここで3個の集合 S', T' が存在する事を示そう。定理1.7を証明の場合と同様に \mathbb{Z}_p で、最初が S で $M^n \cong N^n \oplus \mathbb{Z}_p T$ と見てさ

る。 $\hat{\mathbb{Z}}_p\pi$ -加群は因数 L は Krull-Schmidt の定理が成立つから、 $\hat{\mathbb{Z}}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} N$ は $\hat{\mathbb{Z}}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} M$ の直和因子である (Heller の定理) 事実と N は M の直和因子であることが分かるが、今これは $\mathbb{Z}_p\pi$ -lattice D が存在して、

$$D^n \cong \hat{\mathbb{Z}}_p T.$$

$$\hat{\mathbb{Z}}_p T = \bigoplus_{L \in X} (\hat{\mathbb{Z}}_p \frac{\pi}{L})^{r(L)}$$

と言く。補題2.3によれば、 $\bigoplus_{L \in X_L} (\hat{\mathbb{Z}}_p \frac{\pi}{L})^{r(L)}$ と $\bigoplus_{L \in X_I} (\hat{\mathbb{Z}}_p \frac{\pi}{L})^{r(L)}$ とは互いに正規共通の直既約直和因子をもたないから、任意

の L に対して

$$(1) \quad D_L^n \cong \bigoplus_{L \in X_L} (\hat{\mathbb{Z}}_p \frac{\pi}{L})^{r(L)}$$

とでは $\hat{\mathbb{Z}}_p$ -lattice D_L が存在する。 $\hat{\mathbb{Z}}_p \frac{\pi}{\pi p} \otimes \hat{\mathbb{Z}}_p \pi$ を (1)

の両辺に作用させると、巡回群の場合に帰着で $n|t(L)$ がわかる。従って、 $T = \overbrace{T' \cup \dots \cup T'}^{n \text{ 回}} T'$ なる π 集合 T' の存在が知られる。そこで、 $\hat{\mathbb{Z}}_p T = (\hat{\mathbb{Z}}_p T')^n$ 従って、

$$\hat{\mathbb{Z}}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} M = \hat{\mathbb{Z}}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} N \oplus \hat{\mathbb{Z}}_p T'$$

ここで $M \cong N \oplus \mathbb{Z}_p T'$ が成り立つ、補題 1.6 が言え后。

上の巡回群の場合と言うのは次の簡単な命題を指す。

命題 2.4. (1) π は巡回群とし $p \mid |\pi|$ と素な素数とする
と $A(\pi, \mathbb{Z}_p) = K(\pi, \mathbb{Z}_p)$ であり、 $K(\pi, \hat{\mathbb{Z}}_p)/A(\pi, \hat{\mathbb{Z}}_p)$ は有限位数の
元をもつ。 (2) $p \nmid |\pi|$ のときも、 $K(\pi, \hat{\mathbb{Z}}_p)/A(\pi, \hat{\mathbb{Z}}_p)$ は有
限位数の元をもつ。

証明. (1). $A(\pi, \mathbb{Z}_p) = K(\pi, \mathbb{Z}_p)$ は反転公式そのものである。

補題 1.6 の証明と同様に考えると

$$D^n \cong \hat{\mathbb{Z}}_p T$$

とす。 T は $\hat{\mathbb{Z}}_p \pi$ -lattice D は $\hat{\mathbb{Z}}_p$ 上の置換加群の差であることを言えれば良い。巡回群は split type F から系 2.2 に至り。

$D \cong \hat{\mathbb{Z}}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} D_0$ となる $\mathbb{Z}_p \pi$ -lattice D_0 が存在する。 $A(\pi, \mathbb{Z}_p) = K(\pi, \mathbb{Z}_p)$ から証明は終り（実は D が自身が $\hat{\mathbb{Z}}_p$ 上の置換加群であることも言える）。

(2) は、まだ補題 1.6 の証明の後でして、 $(p, |\pi|) = 1$ の場合に帰着である。

§3. 中零群

この節では次の定理を示す。

定理 3.1. 中零群 π に対しては

$$\mathcal{C}(\mathbb{Z}\pi) / D(\mathbb{Z}\pi) = \ker(t(\pi) \rightarrow \prod_{p \mid |\pi|} t(\pi, \mathbb{Z}_p))$$

この定理が意味を持つためには 12 次が必要である。

命題 3.2. π は中零群で, $\mathcal{S}(\pi)$ は split type と 3.3 と, 位数の素因数 $p = 3, 7, 11, 13$ で $t(\pi, \mathbb{Z}_p) = 0$. 特に $t(\pi) = \frac{d(\mathbb{Z}^\pi)}{D(\mathbb{Z}^\pi)}$ である。

定理 3.1 の証明. π の部分群 H に対して

$$\text{Res}_H^\pi : A(\pi) \longrightarrow A(H)$$

射影限写像と 3.3.

$\mathcal{A} = \{ \pi \text{ の } p \text{ で巡回群となる部分群}, p \text{ は素数} \}$

と定め.

$$\Phi(\pi) = \{ x \in A(\pi) / \text{Res}_H^\pi(x) = 0 \text{ for all } H \in \mathcal{A} \}$$

と定め. $\Phi(\pi)$ は $A(\pi)$ のイデアルである

$$\mathbb{Z}S \sim \mathbb{Z}T \iff \Phi(\pi) \ni [S] - [T]$$

(\sim は局所同型) が成り立っている。

さて, $[M] \in \ker(t(\pi) \rightarrow \pi t(\pi, \mathbb{Z}_p))$ とすると, 各素因数 p に対して $\mathbb{Z}_p \otimes M \oplus \mathbb{Z}_p T_p \cong \mathbb{Z}_p S_p$ となる π -集合 S_p, T_p が存在する。 $[M]$ は有限位数の元 E から, 適当な整数 $n \geq 1$ が存在して, $M^n \oplus \mathbb{Z}T \sim \mathbb{Z}S$ となる π -集合 S, T が存在する。

M = 適当な置換加群を加えることにより, T_p, T は空集合とし得る。このとき

$$[S] \in \Phi(\pi) + nA(\pi)$$

が示せれば定理の証明は終りである。言い替えると,

$$\Phi(\pi) + nA(\pi) = \ker(A(\pi) \rightarrow \prod_{p \mid |\pi|} A(\pi, \mathbb{Z}_p)/nA(\pi, \mathbb{Z}_p))$$

よって $S \in A(\pi, \mathbb{Z})$ は $\prod_{p \mid |\pi|} A(\pi, \mathbb{Z}_p)$ の直和因子であることを示す。

示す ($A(\pi, \mathbb{Z})$ は $C^0(\mathbb{Z}\pi) = D(\mathbb{Z}\pi)$ (帰納的定理から) 通りに得られる) π が有限位数の元を持たないことを注意)。

素数 $p \mid |\pi|$ を一つ固定する。 π のシロー p 部分群を π_p とする。
 $\pi = \pi_p \times \mu$ と直積に分解する。

$$A(\pi) = A(\pi_p) \otimes_{\mathbb{Z}} A(\mu)$$

π_p が \mathbb{Z} ,

$$(1) [S] = \sum' \left[\frac{\pi_p}{H} \right] \otimes y_H \quad y_H \in A(\mu)$$

(\sum' は π_p の部分群の共役類を動くものとする)

$[z_p S] \in nA(\pi, \mathbb{Z}_p)$ となる S (補題 2.3) は $[z_p y_H] \in nA(\mu, \mathbb{Z}_p)$ である。各 H に対して, $s_H \in A(\mu)$ で

$$z_p y_H \cong (z_p s_H)^n$$

となるものが存在する。 $z_H = y_H - n s_H$ とおく。(1)式は

$$(2) [S] = \sum' \left[\frac{\pi_p}{H} \right] \otimes z_H + n u, \quad u \in A(\mu)$$

と言ける。

$$A(\pi_p) \rightarrow K(\pi_p, \mathbb{Q})$$

は上記の写像 (\mathbb{Q} 上の表現はすべて virtually \mathbb{Z} に置換表現)

から, $w_1, w_2, \dots, w_t \in A(\pi_p)$ を $K(\pi_p, \mathbb{Q})$ の基となるように選ぶ。すなはち,

$$R = \mathbb{Z} w_1 + \cdots + \mathbb{Z} w_t$$

とあるとき $R \cong K(\pi_p, \mathbb{Q})$ である。

$\mathbb{Q} \left[\frac{\pi_p}{\pi_H} \right] = \mathbb{Q} r_H$ となる $r_H \in R$ を選ぶ。 $\pi' \in A$ とすると、 π' の p 部分群を $T = p'$ の部分群（位数が p と素な部分群は巡回群だから）、

$$\left| \left\{ \left[\frac{\pi_p}{\pi_H} \right] - r_H \right\} \otimes \mathbb{Z}_H \right|^{\pi'} = 0$$

($p+1|n$ のとき、 $\mathbb{Q} z_H \cong (\mathbb{Q} s_H)^\vee$ 従、 $\mathbb{Q} z_H = 0$ は注目)
 $\Phi(\pi)$ の定義により、

$$\left(\left[\frac{\pi_p}{\pi_H} \right] - r_H \right) \otimes \mathbb{Z}_H \in \Phi(\pi)$$

この関係を (2) に代入すると

$$S = \sum'_{H \in \pi_p} r_H \otimes \mathbb{Z}_H + nu + v \quad u \in A(\pi), v \in \Phi(\pi)$$

r_H は w_1, \dots, w_t の一次結合で成る

$$(3) \quad [S] = \sum_{1 \leq i \leq t} w_i \otimes \mathbb{Z}_i' + nu + v$$

\mathbb{Z}_i' は $\{\mathbb{Z}_H\}$ の一次結合で成る。

$q/|\pi|$ で $q \neq p$ の素数に対する

$$[\mathbb{Z}_q S] = \sum_{1 \leq i \leq t} [\mathbb{Z}_q w_i] \otimes_{\mathbb{Z}_q} [\mathbb{Z}_q \mathbb{Z}_i'] + n [\mathbb{Z}_q u]$$

で $[\mathbb{Z}_q S] \in nA(\pi, \mathbb{Z}_q)$ である

$$\sum_{1 \leq i \leq t} [\mathbb{Z}_q w_i] \otimes_{\mathbb{Z}_q} [\mathbb{Z}_q \mathbb{Z}_i'] \in nA(\pi, \mathbb{Z}_q)$$

である。

$$A(\pi, \mathbb{Z}_\ell) = A(\pi_p, \mathbb{Z}_\ell) \otimes A(\mu, \mathbb{Z}_\ell)$$

であり $\{[\mathbb{Z}_\ell \omega_i]\}$ は $A(\pi_p, \mathbb{Z}_\ell)$ の基底である。

$$[\mathbb{Z}_\ell z_i] \in nA(\mu, \mathbb{Z}_\ell)$$

が結論である。

π が素数巾の群の直積に分けられると、成分の個数は同じで
帰納法で証明する。帰納法の仮定は π が

$$z_i \in nA(\mu) + \Phi(\mu)$$

$$\pi, A(\pi_p) \otimes_{\mathbb{Z}} \Phi(\mu) \subset \Phi(\pi) \text{ である}$$

$$[z] \in \Phi(\pi) + nA(\pi)$$

が結論である。

実は π が素数巾の場合に向もらつていいらしいが、この場合は、

$$t(\pi) = T^g(\pi) = \frac{\alpha(z^\pi)}{\rho(z^\pi)}$$

が簡単にいえるから問題はない。

命題3.2の証明。ヨニレ一般の形で証明する。

命題3.3. π のシロ- p -部分群は正規部分群で、 $\pi = \pi_p * \mu$ と半直積に書かれているとする。 π_p の任意の部分群は μ で normalize され、 π/π_p は of split type かつ $K(\pi/\pi_p, \mathbb{Q}) = A(\pi/\pi_p, \mathbb{Q})$ があり立つとすると、 $t(\pi, \mathbb{Z}_p) = 0$ である。

(この形下とある種の metacyclic 群に対しても適用できる)

証明. X_i, H_i, \star 等は 120° -シのそれと同じものとする。
まず次の補題を示す.

補題 3.4. V は既約 $\mathbb{Z}_p\mu$ (resp. $\hat{\mathbb{Z}}_p\mu$) 加群とする.

$\mathbb{Z}_p[\frac{\pi}{H}] \otimes_{\mathbb{Z}_p\mu} V$ (resp. $\hat{\mathbb{Z}}_p[\frac{\pi}{H}] \otimes_{\hat{\mathbb{Z}}_p\mu} V$) ($H \leq \pi_p$, \mathbb{Z} のとき $\hat{\mathbb{Z}}_p[\frac{\pi}{H}]$ は左 $\hat{\mathbb{Z}}_p\pi$ 加群, 右 $\hat{\mathbb{Z}}\mu$ 加群の構造をもつから, テンサ
ー積は考えることができる) は直既約 $\mathbb{Z}_p\pi$ (resp. $\hat{\mathbb{Z}}_p\pi$) 加群である.

証明 $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{Z}_p[\frac{\pi}{H}] \otimes_{\mathbb{Z}_p\mu} V$ とするとき, $\mathbb{Z}_p\pi_p$ -module として
しては V_i は置換加群だから $V_1^{\pi_p} \neq 0, V_2^{\pi_p} \neq 0$ である.
一方 $(\mathbb{Z}_p[\frac{\pi}{H}] \otimes_{\mathbb{Z}_p\mu} V)^{\pi_p} \cong V$ だから, $V_1 = 0$ または $V_2 = 0$
である.

命題 3.3 の証明は帰る. $[M] \in t(\pi, \mathbb{Z}_p)$ とする. 適当
な置換加群を M に加えることにより

$$M^n = \bigoplus_{L \in X} \mathbb{Z}_p[\frac{\pi}{L}]^{r(L)}$$

となる. ここで \mathbb{Z} のとき $[M] \in A(\pi, \mathbb{Z}_p)$ を表す.

補題 1.6 の証明(§2)と同様にして,

$$(4) \quad M_i^n \cong \bigoplus_{L \in X_L} (\hat{\mathbb{Z}}_p[\frac{\pi}{L}])^{r(L)}$$

$$\hat{\mathbb{Z}}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_t$$

をみたす $\hat{\mathbb{Z}}_p\pi$ -加群 M_i が存在するこことがわかる. 補題 3.4
と Krull-Schmidt の定理により

$$M_i = \hat{\mathbb{Z}}_p \pi_{H_i} \otimes_{\hat{\mathbb{Z}}_p \mu} W$$

と書ける。更に $\hat{\mathbb{Z}}_p \pi_{\mu} \otimes_{\hat{\mathbb{Z}}_p \mu} M$ を適用すると、(4) ははたして、

$$W^n \cong \hat{\mathbb{Z}}_p T \quad T : \mu \text{ 庫合}$$

と書ける。且がの split type T は

$$W = W_0 \otimes \hat{\mathbb{Z}}_p \quad W_0 \text{ は } \mathbb{Z}_p \mu\text{-lattice}$$

と書け、 $K(\pi, Q) = A(\pi, Q)$, $p+1\mathbb{H}$ である W_0 は通常
加群の差に書かれている。従、 $\exists [M_i] \in A(\pi, \hat{\mathbb{Z}}_p)$ が $[M] \in A(\pi, \hat{\mathbb{Z}}_p)$, $\exists \sigma \in [M] \in A(\pi, \mathbb{Z}_p)$. 命題 3.4 の
証明 で示す。

系 3.5. π は巾零群、 $|\pi|$ は高々 2 位の素数でしか割り
切れないとき。 $t(\pi) = \frac{C(\mathbb{Z}\pi)}{D(\mathbb{Z}\pi)}$.

§4. ある種の metacyclic 群

巡回群 κ, μ の半直積 $\pi = \kappa * \mu$ を見てる。 $\kappa = \mathbb{Z}^n$,
 $|\kappa| = m$, $|\mu| = n$ とすると、 $(m, n) = 1$ であるとしておく。
自然な準同型 $\mu \rightarrow \text{Aut}(\kappa)$ を見てる。この核 μ' が μ の
直積因子に相当しているとす、且て $(|\mu'|, |\mu'/\mu|) = 1$ の
とき $t(\pi) = \frac{C(\mathbb{Z}\pi)}{D(\mathbb{Z}\pi)}$ が証明できる。二面体群 D_m
で m が奇数の場合にはここに含まれる。

すなはち一般の metacyclic 群は 1 つ 2 つ 同様のことを
が言えるが、あまりにも技術的なので省略します。

次の例

$t(\pi) \neq Cl(2\pi)/Cl^2(2\pi)$ と 3 例 (返藤と人 = 53) を紹介

(3).

$$\pi = \langle \rho, \sigma, \tau \mid \rho^7 = \sigma^{15} = \tau^4 = 1, \rho\sigma = \sigma\rho, \rho\tau = \tau\rho, \sigma\tau = \tau\sigma' \rangle$$

と 3 例. 3 例の S

$$\pi = C_7 \times (C_{15} \rtimes C_4) \quad (\text{X は半直積})$$

① π の simple component は

$$\mathbb{Q}(\zeta_{105}, \bar{\tau}) \cong M_2(\mathbb{Q}(\zeta_n, \zeta_{15} + \zeta_{15}^{-1})), \quad \bar{\tau}^2 = -1$$

となるものが存在する. 但し, $\zeta_n = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$, 1 の原始 n 乗根とする. ところが, $\mathbb{Q}(\zeta_{15}, \bar{\tau})$ は division ring であり,

$$\mathbb{Q}(\zeta_n) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\zeta_{15}, \bar{\tau}) = \mathbb{Q}(\zeta_{105}, \bar{\tau})$$

だから,

$$K(\pi, \mathbb{Q}) \not\cong A(\pi, \mathbb{Q})$$

が言える.

$\mathbb{Z}[\zeta_{105}, \bar{\tau}]$ は $\mathbb{Q}(\zeta_{105}, \bar{\tau})$ の極大整域であるから

$$\mathbb{Z}[\zeta_{105}, \bar{\tau}] \cong M_2(\mathbb{Z}[\zeta_n, \zeta_{15} + \zeta_{15}^{-1}])$$

従って

$$(1) \quad L \oplus L \cong \mathbb{Z}[\zeta_{105}, \bar{\tau}]$$

を満たす $\mathbb{Z}\pi$ -加群 L が存在する. ここで, π -集合 S, T を $\zeta_{105} < \zeta_{15} < \zeta_7$ と 完全列

$$(2) \quad 0 \rightarrow \mathbb{Z}[\zeta_{105}, \bar{\tau}] \rightarrow \mathbb{Z}S \rightarrow \mathbb{Z}T \rightarrow 0$$

が作れる。以下 [E-H] から =, 三の事実を引用しよう。

(3) M は $\mathbb{Z}\pi$ -lattice となると、完全列

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 \rightarrow M \rightarrow K \rightarrow \mathbb{Z}S \rightarrow 0 \\ S \text{ は } \pi \text{ 集合, 任意の部分群 } H \subset \pi \text{ に対して } H^1(H, K) = 0 \end{array} \right\}$$

が存在する。

(4) π の任意のシロ-群は巡回群となる。 K は $\mathbb{Z}\pi$ -lattice となると、

$$K \text{ は 置換加群の直和因子} \iff H^1(H, K) = 0 \text{ for all } H \leq \pi.$$

さて、(1) の L に對し (3) の resolution

$$0 \rightarrow L \rightarrow K \rightarrow \mathbb{Z}S' \rightarrow 0$$

を作る。圖型

$$\begin{array}{ccc} & K \oplus K & \\ & \uparrow & \\ 0 \rightarrow & \mathbb{Z}[\zeta_{105}, \bar{\tau}] \rightarrow \mathbb{Z}S & \end{array}$$

の push out diagram を作ると、

$$(5) \quad K \oplus K \oplus \mathbb{Z}T \cong \mathbb{Z}S' \oplus \mathbb{Z}S' \oplus \mathbb{Z}S$$

$\pi = \mathbb{Z}\pi$, A, B が 置換加群の直和因子ならば

$$\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}\pi}'(A, B) = 0$$

を假定する ($S-E$)。

さて、(5) は $[K] \in t(\pi)$ を意味している。一方での

命題 0.1 をえる。一般に射影加群は局所自由である, 合成写像

$$\mathcal{C}l(\mathbb{Z}\pi) \longrightarrow t(\pi) \longrightarrow t(\pi, \mathbb{Z}_p)$$

同構写像である, ところが合成写像

$$t(\pi) \longrightarrow t(\pi, \mathbb{Z}_p) \longrightarrow K(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) /_{A(\pi, \mathbb{Q})}$$

は π の $[K]$ の像は $[L] \in K(\pi, \mathbb{Q}) /_{A(\pi, \mathbb{Q})}$ と一致するが S キロ、すなわち,

$$t(\pi) \not\cong \mathcal{C}l(\mathbb{Z}\pi) /_{C^0(\mathbb{Z}\pi)}$$

である。

単素群の場合も, Schur index が 1 なので直観を利用しても
 $t(\pi) \not\cong \mathcal{C}l(\mathbb{Z}\pi) /_{C^0(\mathbb{Z}\pi)}$ となるがなぜか。

最後に,

問題 $\mathcal{C}l(\mathbb{Z}\pi) /_{C^0(\mathbb{Z}\pi)} = \ker(t(\pi) \longrightarrow \prod_{p||\pi} t(\pi, \mathbb{Z}_p))$

どうか?

References

[DR1] A. Dress : On integral representations,

Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1969), pp. 1031-1034

- [DR2] A. Dress : The permutation class group of a finite group, J. pure and applied algebra 6 (1975), 1-12
- [DR3] A. Dress ; Contributions to the theory of induced representations, Algebraic K-theory II, Springer Lect. Note in Math. n° 342 (1973), 183-240
- [E-M] S. Endo and T. Miyata : On classification of the function fields of algebraic tori, Nagoya Math. J., 56 (1975), 85 - 104
- [OL.1] R. Oliver : G-actions on disks and permutation representations, J. Algebra 50 (1978), 44-62
- [OL.2] R. Oliver : G-actions on disks and permutation representations II, M.Z. 157 (1977) 237-263
- [S-E] R.G. Swan and E.G. Evans : K-theory of finite groups and orders, Lect. Note in Math. 149 (1970).

15/07/1983 丁

追記1. 何故奇妙な notation $T^g(\pi)$ を使, て い る か は $\Rightarrow 11$ では, [S-E] を参照して $T = T^e$ だけの π , 御理解, $T = T^e \oplus 3$ が
と思ひます。

2. 全般にゆきり, 大域理論とゆうよりは半大域理論,

すれぬち、局所巡回型の理論であるため、途中で巡回群に帰着
でいることは、うまく証明できている点であるが、

$$\tilde{T}^g(\pi) = \frac{T^g(\pi)}{\{[M]=[N] \mid \text{もと } M \sim N\}}$$

$$\tilde{K}(\pi, Z) = \frac{K(\pi, Z)}{\{[M]=[N] \mid M \sim N\}}$$

を導入して、 $\tilde{T}^g(\pi)$, $\tilde{K}(\pi, Z)$ を扱う扱うが良かつたかと
も思いました。