数理解析研究所講究録
301 巻 1977 年 32-49

非正則な素数の見付け方
(Fermat の予想 の検証実験)

上智大 理工数・和田秀男

§ 1. Bernoulli 数

ベルヌイ数 B_k, ($k \geqq 0$) は

$$(1) \quad \frac{t}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} t^k$$

により定義される有理数である. $B_0 = 1$ であり, 原理的には

$$(2) \quad B_k = \frac{-1}{\binom{k+1}{k}} \left\{ 1 + \binom{k+1}{1} \cdot B_1 + \binom{k+1}{2} \cdot B_2 + \cdots + \binom{k+1}{k-1} \cdot B_{k-1} \right\}$$

により順に計算出来る. $B_1 = -\frac{1}{2}$ であるが $B_{2k+1} = 0$ ($k \geqq 1$) となる. (2) を使えば $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{42}$, ・・・ と次々に計算出来る. ([1], [2] 参照)

p を素数, $(p-1) \nmid 2k$ ならば B_{2k} の分母は p を含まない. 逆に B_{2k} の分母は $(p-1) | 2k$ なる素数を1回ずつ含む (Staudt の定理). よって $1 < 2k < p-1$ の

とき B_{2k} の分母は p を含まない．しかし分子は p を含むかも知れない。奇素数 p に対し $B_2, B_4, \cdots, B_{p-3}$ のすべての分子が p を含まぬとき、p を正則な素数といい、1つでも p を含むとき、p を非正則な素数という。非正則な素数は小さい順に 37, 59, 67, 101, 103, 131, 149, 157, 233, ⋯ となり、無限に存在することが知られている。正則な素数も無限にあるだろうと予想されている．

$p < 125,000$ には正則な素数が 7128 個あり、非正則な素数が 4605 個あることが計算されている（[3]）．その比 $4605/7128 = 0.6460 \cdots$ はやがては $\sqrt{e} - 1 = 0.6487 \cdots$ に収束するだろうと C.L. Siegel（[4]）により予想されている．

§2. Fermat の大定理

"p が 3 以上の素数のとき、

(3) $x^p + y^p = z^p$

は自然数解 x, y, z を持たない"

というのがフェルマーの大定理である．証明はまだされていない。Kummer は p が正則ならばこの大定理は正しい．と証明した．

フェルマーの大定理を2つに分けて "$p \nmid xyz$ なる

自然数解がない” というのを Case 1 といい “$p \mid xyz$ なる自然数解がない” というのを Case 2 という。Case 1 については、もし解があるならば $2 \leqq q \leqq 43$ なるすべての素数 q に対して

(4) $q^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$

が成立しなければならない。このことより $p < 253747889$ ならば Case 1 は正しいことが計算機を使わずに計算されている ([5])。また Case 1 の場合、解があるならば

$$0 \equiv B_{p-3} \equiv B_{p-5} \equiv B_{p-7} \equiv B_{p-9} \pmod{p}$$

が成立しなければならない。

§ 3. 正則性の判定法

フェルマーの大定理を確かめるために、正則か否かということは大切である。次の Voronoi (1889) の式はとても便利である。

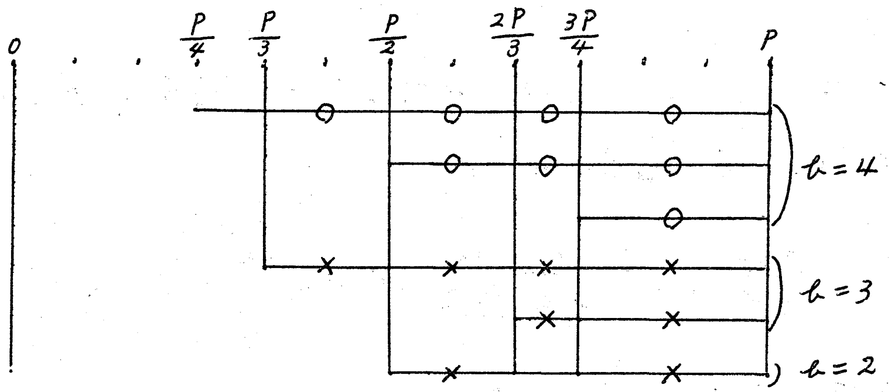
$(p-1) \nmid 2k, \quad p \nmid b, \quad b \in N$

のとき

(5) $\displaystyle (b - b^{p-2k}) \frac{B_{2k}}{2k} \equiv \sum_{a=1}^{p-1} \left[\frac{ba}{p}\right] a^{2k-1} \pmod{p}$

この式において $n = \left[\frac{ba}{p}\right]$ となるのは $\frac{n}{b} p \leqq a < \frac{n+1}{b} p$ となるので、たとえば $b = 4$ とおいた式より $b = 3$,

$b=2$ とおいた式を引くと



$$\left(2^{P-2k}+3^{P-2k}-4^{P-2k}-1\right)\frac{B_{2k}}{2k}\equiv\sum_{\frac{P}{4}<a<\frac{P}{3}}a^{2k-1}-\sum_{\frac{P}{4}<a<\frac{P}{3}}(P-a)^{2k-1}$$

よって次の式が得られる.

$$(6)\quad \left(2^{P-2k}+3^{P-2k}-4^{P-2k}-1\right)\frac{B_{2k}}{4k}\equiv\sum_{\frac{P}{4}<a<\frac{P}{3}}a^{2k-1}\qquad (\mathrm{mod}\ P)$$

同様に $x=2^{P-2k}$, $y=3^{P-2k}$, $z=5^{P-2k}$, $u=7^{P-2k}$ とおくと

$$(7)\quad \left(x^2-xy+y-1\right)\frac{B_{2k}}{4k}\equiv\sum_{\frac{P}{6}<a<\frac{P}{4}}a^{2k-1}$$

$$(8)\quad \left(z+x-xy-1\right)\frac{B_{2k}}{4k}\equiv\sum_{\frac{P}{6}<a<\frac{P}{5}}+\sum_{\frac{P}{3}<a<\frac{2}{5}P}$$

$$(9)\quad \left(x^2-x+z-u\right)\frac{B_{2k}}{4k}\equiv\sum_{\frac{P}{7}<a<\frac{P}{5}}-\sum_{\frac{P}{4}<a<\frac{2P}{7}}-\sum_{\frac{2P}{5}<a<\frac{3}{7}P}$$

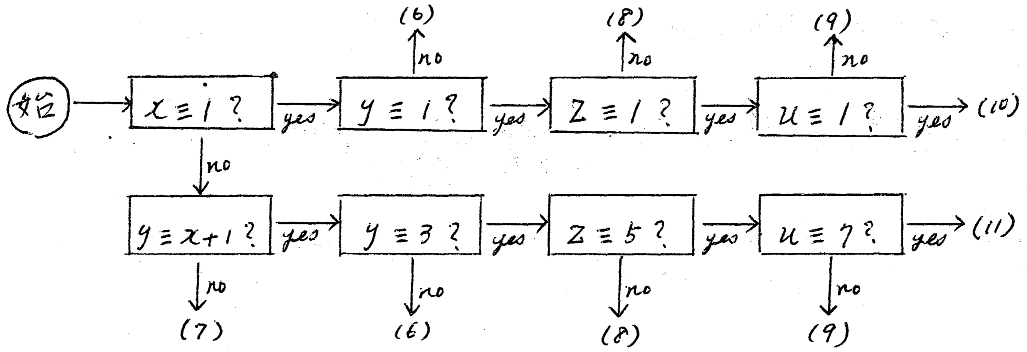
$$(10)\quad (xy - x - y - 1)\frac{B_{2k}}{4k} \equiv \sum_{0<a<\frac{p}{6}}$$

などが得られる．しかしこれらの式は左辺の係数が 0 になるかも知れない。E. Lehmen は

$$(11)\quad 2^{2k-1}\frac{B_{2k}}{2k}p \equiv \frac{1}{2k}\sum_{0<a<\frac{p}{2}}(p-2a)^{2k} \pmod{p^2}$$

という式を作り出した。(1938)

これらの式を $x^2 - xy + y - 1 = (x-1)(x+1-y)$ を用い、たとえば次のように使えば良い。



(6), (7) などは $\frac{p}{12}$ 位の計算をすれば良いから一番能率的だと思われていたが、W. Johnson は (8) を変形し

$$\equiv \sum_{\frac{p}{6}<a<\frac{p}{5}} a^{2k-1} + \sum_{\frac{p}{6}<a<\frac{p}{5}} (2a)^{2k-1} + \sum_{\substack{\frac{p}{3}<a<\frac{2p}{5} \\ a=\text{奇数}}} a^{2k-1}$$

$$\equiv (1 + 2^{2k-1})\sum_{\frac{p}{6}<a<\frac{p}{5}} a^{2k-1} - \sum_{\substack{\frac{3p}{5}<p-a<\frac{2}{3}p \\ p-a=\text{偶数}}} (p-a)^{2k-1}$$

$$\equiv \left(1+2^{2k-1}\right)\sum_{\frac{p}{6}<a<\frac{p}{5}} a^{2k-1} - 2^{2k-1}\cdot\sum_{\frac{3p}{10}<a<\frac{1}{3}p} a^{2k-1}$$

とした。(1976) よって $\frac{p}{15}$ 個の計算をすれば良い。これが今のところ一番能率良く思われる。

§4. 非正則な場合

p が非正則なとき、次の定理がある ([6], [7])。

"$q = rp + 1$, $q < p(p-1)$ なる素数 q と $t^r \not\equiv 1 \pmod{q}$ となる自然数 t を定める。$B_{2k} \equiv 0 \pmod{p}$ なるすべての $2k$ $(1 < 2k < p-1)$ に対し

$$m = \frac{p-1}{2}, \quad d = \sum_{j=1}^{m} j^{p-2k}, \quad Q_{2k} = t^{-\frac{rd}{2}} \prod_{b=1}^{m} \left(t^{rb}-1\right)^{b^{p-1-2k}}$$

と定めた Q_{2k} について $Q_{2k}^{\,r} \not\equiv 1 \pmod{q}$ ならば、Case 2 の場合の整数解は存在しない"

この定理を用いて Case 2 の場合も $p < 125{,}000$ までならば解がないことが計算されている ([3])。なお、この判定法を用いると副産物として円分体 $Q(\zeta_p)$, $(p < 125{,}000)$ の最大実部分体 $Q(\zeta_p + \zeta_p^{-1})$ の類数が p で割れないことが得られる。

ところで "$Q(\zeta_p + \zeta_p^{-1})$ の類数が p で割れないとき、Case 1 の場合、解がない" という Vandiver－森島 の定理の

証明には誤りがあるらしい．注意深く論文[8]を読み直そう！

§5．計算機を使って

$p<2^{15}$ までの素数を正則なものと非正則なものに分けるのに私はミニコンピューター OKITAC－4300C をアセンブラ言語でプログラムを書き，昼も夜も続けて使い，1ヶ月かかった．

Samuel S. Wagstaff [3] は大型計算機を2年間も使い，$p<125{,}000$ までの素数の分類を行なったようである．

次の表は非正則な素数 l に対して $B_{2A}\equiv 0 \pmod{l}$ となる $2A$ をならべたものである．2つ以上そのような $2A$ が存在するときは＊印をつけた．

－－－

［編集者注］講演当日 Wagstaff [3] のプレプリントのコピーが配布された．その文献と付表1（4つ以上の分子を割る p）を参考資料として掲げる．

Wagstaff は一生の仕事として $p<1000000$ まで検証したいとはりきっている．現在のペースだと，2000年までかかっても完了しないかもしれない大仕事である．

A TABLE OF IRREGULAR PRIMES LESS THAN 32768. BY HIDEO WADA.

L	2A	L	2A	L	2A	L	2A	L	2A
37	32	631*	226	1297	202	1979	148	2671*	2394
59	44	647	236	1297*	220	1987	510	2689	926
67	58	647*	242	1301	176	1993	912	2753	482
101	68	647*	554	1307	382	1997	772	2767	2528
103	24	653	48	1307*	852	1997*	1888	2777	1600
131	22	659	224	1319	304	2003	60	2789	1984
149	130	673	408	1327	466	2003*	600	2789*	2154
157	62	673*	502	1367	234	2017	1204	2791	2554
157*	110	677	628	1381	266	2039	1300	2833	1832
233	84	683	32	1409	358	2053	1932	2857	98
257	164	691	12	1429	996	2087	376	2861	352
263	100	691*	200	1439	574	2087*	1298	2909	400
271	84	727	378	1483	224	2099	1230	2909*	950
283	20	751	290	1499	94	2111	1038	2927	242
293	156	757	514	1523	1310	2137	1624	2939	332
307	88	761	260	1559	862	2143	1916	2939*	1102
311	292	773	732	1597	842	2153	1832	2939*	2748
347	280	797	220	1609	1356	2213	154	2957	138
353	186	809	330	1613	172	2239	1826	2957*	788
353*	300	809*	628	1619	560	2267	2234	2999	776
379	100	811	544	1621	980	2273	876	3011	1496
379*	174	821	744	1637	718	2273*	2166	3023	2020
389	200	827	102	1663	270	2293	2040	3049	700
401	382	839	66	1663*	1508	2309	1660	3061	2522
409	126	877	868	1669	388	2309*	1772	3083	1450
421	240	881	162	1669*	1086	2357	2204	3089	1706
433	366	887	418	1721	30	2371	242	3119	1704
461	196	929	520	1733	810	2371*	2274	3181	3142
463	130	929*	820	1733*	942	2377	1226	3203	2368
467	94	953	156	1753	712	2381	2060	3221	98
467*	194	971	166	1759	1520	2383	842	3229	1634
491	292	1061	474	1777	1192	2383*	2278	3257	922
491*	336	1091	888	1787	1606	2389	776	3313	2222
491*	338	1117	794	1789	848	2411	2126	3323	3292
523	400	1129	348	1789*	1442	2423	290	3329	1378
541	86	1151	534	1811	550	2423*	884	3391	2232
547	270	1151*	784	1811*	698	2441	366	3391*	2534
547*	486	1151*	968	1811*	1520	2441*	1750	3407	2076
557	222	1153	802	1831	1274	2503	1044	3407*	2558
577	52	1193	262	1847	954	2543	2374	3433	1300
587	90	1201	676	1847*	1016	2557	1464	3469	1174
587*	92	1217	784	1847*	1558	2579	1730	3491	2544
593	22	1217*	866	1871	1794	2591	854	3511	1416
607	592	1217*	1118	1877	1026	2591*	2574	3511*	1724
613	522	1229	784	1879	1260	2621	1772	3517	1836
617	20	1237	874	1889	242	2633	1416	3517*	2586
617*	174	1279	518	1901	1722	2647	1172	3529	3490
617*	338	1283	510	1933	1058	2657	710	3533	2314
619	428	1291	206	1933*	1320	2663	1244	3533*	3136
631	80	1291*	824	1951	1656	2671	404	3539	2082

L	2A	L	2A	L	2A	L	2A	L	2A
3539*	2130	4349	2052	5209*	2928	6247	1492	7039	1454
3559	344	4409	636	5227	308	6247*	3474	7057	4154
3559*	1592	4409*	672	5231	3466	6257	4272	7057*	4972
3581	1466	4421	3768	5297	4810	6263	3286	7069	1478
3583	1922	4451	2896	5303	4156	6263*	4226	7069*	2570
3593	360	4451*	2978	5309	158	6287	4452	7109	290
3593*	642	4457	444	5351	1948	6287*	5034	7121	1502
3607	1976	4493	746	5399	1482	6317	2354	7127	6798
3613	2082	4519	848	5413	1702	6329	5102	7177	962
3617	16	4523	456	5441	4726	6337	1956	7187	3906
3617*	2856	4561	436	5443	1710	6343	750	7207	1670
3631	1104	4591	2292	5477	1150	6343*	5820	7207*	5774
3637	2526	4591*	3596	5479	1826	6367	1190	7211	898
3637*	3202	4637	3618	5479*	4802	6373	2838	7213	1436
3671	1580	4639	3226	5501	666	6373*	4226	7213*	6930
3677	2238	4657	1578	5527	5206	6379	218	7229	6236
3697	1884	4657*	2416	5531	3438	6421	438	7309	324
3779	2362	4657*	4110	5557	3196	6449	4884	7321	348
3797	1256	4663	216	5569	938	6449*	5830	7351	1466
3821	3296	4663*	4278	5573	2032	6451	3236	7411	4712
3833	1840	4679	3592	5639	2672	6491	346	7459	5286
3833*	1998	4691	3450	5641	4580	6521	236	7487	2500
3833*	3286	4751	3768	5641*	5258	6529	1564	7489	4250
3851	216	4783	252	5669	2218	6547	734	7499	3642
3851*	404	4793	2636	5669*	2680	6569	1692	7507	6924
3853	748	4813	2620	5689	348	6569*	1776	7537	2264
3881	1686	4861	4678	5701	2450	6571	1744	7547	5644
3881*	2138	4889	2924	5783	2200	6577	1312	7559	116
3917	1490	4903	3106	5791	1258	6619	1952	7591	2620
3967	106	4909	1462	5813	4284	6619*	3170	7607	3594
3989	1936	4943	492	5821	1150	6659	2950	7643	5026
4001	534	4951	1914	5839	2308	6659*	4014	7681	368
4003	82	4951*	2468	5861	3554	6689	5252	7687	1246
4003*	142	4951*	3890	5897	2996	6701	5484	7687*	3216
4003*	2610	4957	3812	5903	3970	6733	1690	7687*	6516
4021	3228	4969	1940	5903*	5000	6763	4144	7691	2218
4027	2332	4973	4208	5923	4240	6763*	6218	7727	950
4049	1854	5009	1544	5927	3642	6763*	6230	7727*	3756
4051	3548	5009*	4956	5939	342	6779	3994	7817	7346
4073	3620	5039	594	5939*	5014	6793	2686	7823	3298
4129	1784	5077	3092	5953	3274	6823	4952	7829	1392
4157	658	5081	3016	6007	912	6827	4108	7853	3494
4157*	2322	5099	1378	6011	5870	6833	2254	7901	2472
4219	4190	5101	190	6037	3396	6833*	5144	7901*	4286
4243	2712	5107	4872	6043	1226	6857	6676	7907	584
4243*	4146	5119	4086	6091	702	6863	6406	7919	3888
4259	3580	5167	4112	6101	2008	6949	2432	7927	6448
4259*	3726	5179	4732	6173	5008	6971	2010	7937	3980
4261	2068	5189	1102	6173*	5894	6997	1746	7949	2506
4339	214	5209	644	6217	4186	7001	4842	7949*	3436

L	2A	L	2A	L	2A	L	2A	L	2A
7951	4328	8731*	7274	9473	6156	10487	1502	11437*	4960
7963	4748	8747	2688	9511	1132	10499	2644	11443	6786
8011	622	8753	1050	9533	3122	10531	2172	11483	3504
8039	6636	8753*	4784	9539	1060	10531*	3804	11489	340
8059	874	8779	1072	9539*	9172	10589	80	11503	1078
8069	5354	8821	2358	9613	4830	10589*	1182	11551	9788
8087	5558	8831	1552	9631	860	10589*	10116	11597	10868
8089	44	8831*	2620	9677	7094	10597	6478	11621	9102
8089*	3906	8831*	3830	9689	3068	10597*	7488	11657	6358
8101	5968	8837	4212	9689*	5280	10657	1278	11677	7346
8101*	7898	8837*	4374	9733	138	10663	9430	11701	3346
8123	5906	8839	5584	9739	3374	10663*	9788	11743	9580
8161	2424	8849	6638	9743	152	10687	1518	11777	2898
8161*	2758	8893	5336	9767	2410	10723	2496	11779	5120
8179	5354	8923	2382	9767*	4586	10729	7528	11779*	5780
8191	7680	8923*	5614	9791	7318	10733	4760	11783	2514
8209	8056	8929	4126	9803	3562	10739	9638	11783*	8106
8219	5014	8933	4442	9811	1366	10771	2970	11789	6868
8221	4900	8951	7404	9829	4562	10831	1136	11831	5862
8231	4806	8999	572	9829*	7548	10847	10232	11839	8154
8293	5784	9011	4052	9833	4234	10859	5862	11863	11012
8317	7172	9011*	4294	9839	4844	10867	1390	11867	2618
8369	7398	9011*	5444	9859	1514	10957	4254	11887	2286
8369*	8348	9013	8214	9859*	3812	10973	7170	11897	1872
8419	174	9041	4972	9871	2980	10979	9150	11909	6314
8419*	2658	9043	6204	9883	9622	11027	3910	11923	1488
8429	2478	9059	8100	9901	8550	11027*	4620	11923*	5528
8443	1894	9103	8996	9907	5968	11047	6568	11933	2336
8447	1300	9133	3498	9923	938	11059	5288	11939	11332
8467	2368	9133*	9104	9949	4810	11059*	7886	12007	5310
8527	2442	9137	5160	9949*	9112	11069	3016	12011	11024
8537	6806	9137*	5396	10009	3952	11069*	3262	12073	744
8537*	7190	9199	1964	10037	5740	11087	7406	12073*	2458
8573	3562	9221	4802	10061	9922	11117	5024	12073*	6874
8597	2846	9221*	8470	10069	5808	11119	2564	12101	7718
8599	482	9277	2422	10069*	8684	11149	10114	12119	7352
8609	6070	9311	9300	10093	4512	11161	10412	12119*	10494
8609*	6778	9323	1512	10133	10114	11243	3118	12143	6462
8623	4592	9323*	7226	10193	4132	11279	9256	12149	11692
8627	1206	9337	5726	10243	8134	11279*	11096	12197	10740
8629	3170	9349	28	10247	6270	11311	3998	12211	2942
8641	3944	9377	1596	10337	4816	11351	1018	12239	10316
8647	5700	9377*	2118	10343	5744	11351*	1044	12241	2712
8663	1698	9413	6674	10427	5140	11353	11040	12269	5260
8669	2904	9431	2766	10429	3652	11369	9186	12269*	5496
8677	2658	9431*	3920	10453	4378	11393	5112	12343	11506
8677*	6794	9433	178	10457	10028	11399	892	12373	5604
8689	5744	9433*	9026	10463	158	11411	4640	12413	11232
8719	6432	9463	3760	10463*	1862	11423	6674	12421	732
8731	6654	9467	1598	10463*	9500	11437	3714	12433	4106

L	2A	L	2A	L	2A	L	2A	L	2A
12451	6726	13411*	7450	14449	7996	15137	8340	15913	2546
12517	10688	13417	9908	14461	7422	15149	11976	15919	4098
12527	2122	13441	3016	14503	8246	15187	7656	15923	6792
12547	2612	13463	12674	14519	3464	15287	2884	15959	612
12583	11856	13487	4086	14519*	3638	15287*	8060	16007	6728
12613	308	13513	3430	14533	2884	15287*	12774	16007*	12082
12613*	502	13537	11702	14533*	3998	15307	5952	16007*	13250
12613*	9400	13567	2652	14533*	8896	15313	7316	16069	1460
12613*	10536	13567*	2990	14537	5556	15319	8012	16069*	5470
12637	11474	13577	12424	14551	7330	15319*	8864	16111	1620
12641	1278	13613	2712	14561	2304	15377	1044	16127	9324
12697	10052	13627	13106	14593	7152	15383	3814	16127*	14122
12703	594	13649	8096	14629	10886	15413	3970	16141	15308
12703*	2782	13679	13528	14699	7054	15467	4992	16189	3468
12739	2328	13687	8136	14723	5332	15473	1172	16193	16000
12739*	11490	13687*	9570	14737	4498	15473*	11752	16229	4552
12743	1230	13693	6560	14737*	8226	15497	3250	16253	8216
12743*	8826	13693*	12456	14737*	8420	15527	1356	16273	11766
12781	2716	13697	4750	14753	8000	15541	2916	16369	9882
12781*	5082	13709	3500	14753*	9244	15583	6806	16369*	15620
12809	4618	13711	8814	14759	13688	15601	11818	16417	11550
12821	8886	13721	218	14767	238	15619	10180	16427	6842
12899	9532	13723	1626	14767*	8494	15629	8482	16477	1860
12907	11842	13729	12132	14783	7130	15647	11158	16481	3742
12923	3866	13759	8386	14797	2582	15647*	13490	16519	15688
12973	12552	13763	4102	14813	12012	15649	9518	16547	4708
12979	4960	13781	12040	14831	2570	15667	7362	16553	6588
12983	11762	13873	4172	14831*	13256	15667*	9904	16553*	6744
13001	7072	13931	11238	14843	8406	15671	12910	16567	5438
13033	6718	13999	10362	14843*	8428	15733	14760	16573	4432
13037	7264	14011	5324	14851	12520	15737	6352	16603	16100
13049	9840	14057	6872	14867	1628	15737*	7454	16607	9950
13063	3796	14081	8200	14869	12866	15737*	12486	16607*	13742
13127	898	14153	4148	14879	9664	15737*	13078	16657	15570
13147	2550	14177	8192	14891	1144	15739	14260	16661	8560
13147*	8826	14207	2086	14891*	11256	15749	7208	16691	3162
13187	2618	14221	13190	14897	3054	15761	6902	16703	12700
13217	550	14243	2668	14897*	11354	15767	7840	16729	13752
13217*	2640	14249	886	14923	14334	15773	5294	16729*	14756
13217*	9132	14303	1584	14939	844	15787	9316	16741	2424
13219	12986	14323	10198	14947	1314	15787*	11484	16741*	13050
13249	12724	14327	7822	14957	2630	15787*	11884	16763	2718
13259	224	14347	4800	14957*	13172	15803	5722	16763*	15346
13259*	12262	14369	12262	14957*	14374	15809	11986	16787	6718
13267	11848	14401	8684	15053	8486	15823	482	16811	14830
13297	1438	14401*	13372	15091	470	15823*	13552	16811*	16730
13367	1488	14407	4556	15091*	12228	15823*	15748	16823	8036
13367*	2874	14407*	6688	15101	774	15887	2446	16829	8902
13399	6936	14411	6380	15107	11282	15901	5780	16829*	10926
13411	5974	14411*	8170	15131	12152	15901*	11970	16831	4020

L	2A	L	2A	L	2A	L	2A	L	2A
16831*	8492	18131	1382	19213*	12772	19979	9472	20983	5422
16843	16840	18199	16522	19231	17004	19991	16996	21001	12864
16879	16780	18223	17618	19237	9078	19997	5052	21013	15420
16883	10496	18253	6096	19289	4658	20011	8452	21017	7570
16901	7518	18257	3812	19301	13092	20029	10332	21019	3108
16901*	9986	18269	940	19309	11418	20051	9098	21023	1196
16903	3174	18289	3938	19319	7820	20051*	17092	21023*	13546
16927	458	18301	9428	19373	13422	20063	18428	21031	6062
16931	14252	18313	2664	19373*	14066	20089	13476	21061	17946
16937	4276	18401	14828	19381	2610	20113	8664	21067	2278
16937*	4872	18427	3524	19381*	4812	20123	7746	21067*	19542
16943	5408	18427*	17226	19391	1480	20129	550	21101	5710
16979	6148	18439	2602	19427	11918	20161	19316	21143	2126
16987	1062	18461	4370	19477	3032	20177	7242	21149	17278
16987*	16674	18461*	14712	19483	16286	20201	5148	21157	10530
17021	16958	18493	6810	19507	8244	20201*	6056	21163	19962
17027	8632	18503	5324	19531	1376	20261	15642	21179	18338
17107	7208	18583	6724	19531*	7820	20269	6110	21193	416
17107*	14722	18713	4350	19543	5576	20269*	10018	21193*	610
17159	9712	18713*	5300	19553	246	20297	6056	21211	1204
17183	9532	18713*	12420	19553*	3146	20297*	6428	21211*	3668
17191	16930	18869	3448	19577	2646	20341	4120	21221	14178
17203	1772	18869*	4888	19583	4470	20369	18308	21269	12278
17209	15880	18869*	16778	19597	16542	20393	5304	21283	14228
17231	7228	18899	6920	19681	18848	20393*	12386	21313	21240
17231*	7916	18911	15670	19697	8890	20407	3052	21317	15890
17317	11850	18919	5592	19697*	16878	20411	12052	21319	2872
17341	10938	18919*	12498	19699	5792	20431	5274	21319*	10662
17341*	14896	18947	9750	19699*	16822	20507	15468	21323	17490
17401	7104	18959	11612	19709	3860	20521	3402	21391	7462
17419	16228	18973	3524	19709*	17020	20521*	6280	21419	4678
17467	6184	18973*	11912	19739	17690	20533	1526	21467	1270
17471	11040	19001	14770	19763	1200	20533*	11734	21481	13644
17551	4418	19051	11696	19763*	4022	20533*	12068	21491	8342
17581	7014	19051*	18794	19793	858	20543	8594	21499	1664
17599	14676	19069	13030	19793*	9036	20551	9106	21499*	8408
17623	13980	19073	7664	19813	8138	20599	15288	21521	10660
17657	15798	19079	2218	19819	14048	20681	11564	21521*	13974
17659	9030	19079*	19010	19843	536	20707	11318	21529	7478
17659*	9290	19121	13444	19843*	6922	20731	19068	21563	86
17669	15298	19121*	15610	19853	7664	20749	5578	21563*	17812
17681	140	19139	2030	19891	14842	20759	15774	21599	13062
17681*	1368	19157	6724	19919	1000	20849	12736	21601	11288
17681*	11826	19157*	15420	19927	7938	20879	16902	21613	804
17707	16262	19183	16992	19937	13734	20921	9740	21649	12134
17737	3110	19183*	18338	19937*	14126	20939	1260	21661	3426
17863	8068	19207	8564	19949	8460	20939*	5016	21661*	7738
17863*	14300	19211	4106	19961	9282	20939*	5746	21757	4590
17863*	15830	19211*	14080	19961*	18544	20959	4368	21817	18856
18121	7764	19213	11360	19973	7172	20981	16102	21821	16260

L	2A	L	2A	L	2A	L	2A	L	2A
21871	4122	23081	9618	24197	21118	25357	*17446	26669	6390
21871	*17306	23099	15860	24239	19298	25391	18146	26669	*11812
21937	17328	23131	320	24317	15510	25391	*24582	26687	25572
21961	14494	23131	*15090	24373	10418	25439	19272	26699	12102
21977	13786	23159	19392	24373	*10990	25447	3698	26717	22750
21991	5832	23201	11066	24379	2874	25463	1856	26729	13596
22013	18182	23227	10634	24419	18752	25523	9822	26737	2116
22031	10032	23291	22998	24469	12318	25579	11822	26777	2526
22037	2846	23293	15614	24499	20324	25583	4494	26777	*11462
22037	*20894	23327	6880	24533	16290	25603	20718	26783	2348
22051	10086	23327	* 7744	24571	5050	25633	590	26783	*13746
22051	*12748	23333	10720	24593	5330	25673	8366	26801	4056
22063	1138	23333	*16746	24593	*14210	25717	10340	26881	7200
22067	5640	23339	2536	24623	702	25759	6878	26891	19072
22091	15602	23369	9390	24631	1510	25771	8028	26893	7472
22129	15458	23447	14024	24659	5020	25889	924	26903	17992
22157	6026	23531	13904	24659	*12262	25889	*23448	26947	14298
22247	434	23537	2676	24659	*22098	25933	15714	26953	7906
22259	21414	23539	8952	24671	750	25943	14318	26981	18564
22283	4316	23539	*15134	24671	*14098	25969	3066	26987	3588
22291	20008	23567	7052	24683	11774	26021	8212	26993	18336
22303	1970	23609	6158	24683	*20138	26021	*18078	27017	22122
22307	11972	23623	2508	24691	13564	26083	11298	27043	16638
22343	2208	23623	* 4252	24733	22704	26111	3690	27061	5784
22349	6868	23633	22828	24763	3974	26111	*23394	27067	21880
22367	12038	23669	3670	24763	*14940	26113	298	27073	26042
22369	20068	23671	21542	24767	12738	26119	25068	27103	2314
22381	17668	23689	16856	24793	10430	26141	25472	27107	13226
22391	10210	23719	14680	24821	1682	26161	17070	27127	8682
22453	20490	23719	*17434	24821	*12136	26161	*24488	27197	24514
22469	10170	23773	11522	24851	16378	26171	23706	27271	2790
22481	1992	23773	*17584	24919	14620	26227	14270	27277	1914
22541	11908	23819	16186	24923	8394	26251	1028	27277	* 9778
22541	*15542	23873	2294	24943	7008	26251	*23336	27299	24422
22549	15186	23957	5062	24977	1304	26267	8396	27361	1540
22573	3896	23971	16418	24977	*23338	26309	12318	27361	*10900
22639	20120	23977	4308	25013	23492	26347	17156	27361	*24528
22643	206	24019	9542	25087	21390	26387	12414	27367	10422
22643	*19100	24019	*12588	25117	15544	26393	8388	27367	*15476
22679	11866	24019	*16020	25127	3772	26423	20520	27509	10274
22777	8990	24049	12904	25153	842	26431	3166	27539	12562
22807	22060	24049	*16340	25153	* 3406	26479	24280	27541	25854
22853	9972	24077	8032	25153	*21690	26489	22778	27551	8216
22853	*17346	24083	17082	25189	10992	26497	4016	27581	15498
22963	21046	24091	14276	25189	*19086	26539	22950	27581	*21296
23003	14040	24107	20266	25301	2684	26561	15044	27611	15732
23011	7764	24133	10098	25321	4814	26561	*15168	27617	316
23021	21684	24137	3308	25321	*23252	26561	*23790	27631	19988
23057	16758	24151	21582	25343	24636	26627	16314	27647	4698
23059	19708	24181	2486	25357	13474	26627	*25386	27737	23332

L	2A	L	2A	L	2A	L	2A	L	2A
27749	13820	28627	18820	29531	27688	30577	16802	31627	28680
27751	2182	28631	18230	29567	216	30671	5098	31667	26224
27773	16024	28631*	20316	29587	18338	30677	28888	31687	19642
27773*	18946	28657	8116	29641	8832	30697	14202	31687*	26698
27773*	19092	28657*	20614	29723	16950	30727	18382	31721	29336
27779	9394	28663	16610	29753	4160	30757	5472	31729	5848
27779*	11962	28687	9200	29803	2094	30757*	15514	31741	8434
27793	27616	28771	25916	29803*	14434	30773	9818	31751	642
27809	25614	28789	2020	29803*	19520	30781	11234	31771	4942
27817	5516	28789*	21360	29833	7520	30809	21956	31847	30728
27823	24214	28789*	23782	29837	14868	30817	148	31907	15820
27827	14980	28793	20058	29863	5182	30829	22162	32009	350
27883	6248	28813	6996	29867	18712	30859	9534	32083	2032
27917	9250	28813*	20670	29917	10192	30893	9160	32089	27648
27947	16796	28817	6794	29917*	12270	30971	22038	32099	27678
27967	12832	28817*	28248	29921	19948	30977	21376	32119	11284
27983	306	28837	5980	29947	9916	31051	25402	32141	12162
28001	26736	28843	1924	29989	19424	31051*	27712	32141*	30270
28069	25122	28843*	17924	29989*	20532	31063	25938	32143	916
28069*	25788	28933	10284	30059	6614	31069	8908	32159	3258
28097	19704	29009	21676	30059*	23588	31081	18200	32159*	16174
28097*	20464	29017	18718	30071	23226	31139	7704	32191	12922
28109	6316	29059	9318	30071*	28796	31151	28242	32251	7406
28111	10020	29123	9532	30089	24890	31153	22202	32261	19120
28123	842	29129	14206	30097	3324	31159	22044	32297	28876
28151	25364	29137	2980	30109	11954	31181	26846	32303	13598
28151*	27076	29153	28044	30113	6468	31183	4822	32303*	14222
28163	23006	29167	19068	30113*	27554	31183*	12768	32321	25716
28163*	24582	29179	5694	30119	1984	31193	2018	32327	11404
28181	25492	29207	14646	30133	566	31193*	17546	32341	15996
28201	9958	29207*	16164	30133*	26048	31249	15944	32341*	20294
28211	168	29207*	28510	30169	1972	31271	17398	32369	29360
28211*	13108	29209	11574	30169*	7520	31277	24380	32377	11872
28279	18486	29231	6604	30187	1952	31319	5480	32411	606
28351	23826	29243	526	30187*	28362	31319*	20320	32429	18692
28393	1804	29287	24048	30223	6712	31337	10362	32563	3654
28393*	6178	29297	14032	30293	17822	31379	27060	32563*	18882
28409	17520	29327	22262	30307	12060	31387	19492	32573	26870
28429	7792	29327*	27072	30313	4718	31387*	27282	32603	22950
28447	13082	29333	14766	30323	21176	31391	15254	32609	22846
28463	3960	29339	18068	30367	19596	31397	26712	32609*	25144
28477	2964	29383	27458	30367*	25238	31481	3496	32609*	29858
28499	11432	29401	9372	30389	6204	31489	16344	32653	23852
28549	1788	29401*	27744	30427	21624	31511	30998	32687	15346
28549*	14658	29411	25694	30467	1930	31513	24642	32687*	19392
28549*	17740	29437	4936	30469	9702	31517	17052	32693	16514
28573	5442	29453	12548	30469*	27432	31531	9282	32713	2108
28579	17878	29501	5694	30509	2692	31547	3100	32749	828
28619	24768	29527	12790	30509*	16020	31567	21446		
28621	2070	29527*	22990	30553	1822	31601	9168		

文 献

[1] ボレビッチ，シャハレビッチ，「整数論」下，吉岡書店

[2] W. Johnson, "p-adic proofs of congruences for the Bernoulli numbers," J. Number Theory, v.7, 1975, pp.251-265.

[3] Samuel Wagstaff, "The Irregular Primes to 12500," to appear.

[4] C. L. Siegel,"Zu Zwei Bemerkungen Kummers," Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math-Phys. Kl. II, Nr. 6, 1964, pp.51-57.

[5] D. H. and Emma Lehmer, "On the first case of Fermat's last theorem," Bull. Amer. Math. Soc., 47, 1941, pp.139-142.

[6] H. S. Vandiver, "On Fermat's last theorem," Trans. A.M.S. 31, 1929, pp.613-642.

[7] D. H. Lehmer, E. Lehmer, and H. S. Vandiver, "An application of high speed computing to Fermat's last theorem," Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., v.40, 1954, pp.25-33.

[8] H. S. Vandiver, "Fermat's last theorem and the second factor in the cyclotomic class number," Bull. A.M.S., 1934, pp.118-126.

付. Wagstaffの論文の文献表

1. J. Bertrand, Personal communication.

2. H. T. Davis, Tables of the Mathematical Functions, v. II, The Principia Press, Inc., San Antonio, 1935.

3. R. Ernvall and T. Metsänkylä, "Cyclotomic invariants and E-irregular primes." (To appear.)

4. K. Iwasawa, "On Γ-extensions of algebraic number fields," Bull. Amer. Math. Soc., v. 65, 1959, pp. 183-226. MR 23 #A1630.

5. K. Iwasawa and C. C. Sims, "Computation of invariants in the theory of cyclotomic fields," J. Math. Soc. Japan, v. 18, 1966, pp. 86-96. MR 34 #2560.

6. W. Johnson, "On the vanishing of the Iwasawa invariant μ_p for $p < 8000$," Math. Comp., v. 27, 1973, pp. 387-396. MR 52 # 5621.

7. W. Johnson, "Irregular prime divisors of the Bernoulli numbers," Math. Comp., v. 28, 1974, pp. 653-657. MR 50 # 229.

8. W. Johnson, "Irregular primes and cyclotomic invariants," Math. Comp., v. 29, 1975, pp. 113-120. MR 51 # 12781.

9. W. Johnson, "p-adic proofs of congruences for the Bernoulli numbers," J. Number Theory, v. 7, 1975, pp. 251-265. MR 51 # 12687.

10. D. H. Lehmer, E. Lehmer, and H. S. Vandiver, "An application of high-speed computing to Fermat's last theorem," Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., v. 40, 1954, pp. 25-33. MR 15, 778.

11. E. Lehmer, "On congruences involving Bernoulli numbers and the quotients of Fermat and Wilson," Ann. Math. v. 39, 1938, pp. 350-360.

12. T. Metsänkylä, "Distribution of irregular prime numbers," J. Reine Angew. Math. (To appear.)

13. M. A. Morrison and J. Brillhart, "A method of factoring and the factorization of F_7," Math. Comp. v. 29, 1975, pp. 183-205.

14. J. L. Selfridge and B. W. Pollack, "Fermat's last theorem is true for any exponent up to 25,000," Notices Amer. Math. Soc., v. 11, 1964, p. 97. Abstract # 608-138.

15. J. L. Selfridge and M. Wunderlich, Personal communication.

16. C. L. Siegel, "Zu zwei Bemerkungen Kummers," Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. II, Nr. 6, 1964, pp. 51-57. MR 29 # 1198; Also in Gesammelte Abhandlungen, v. III, Springer-Verlag, New York, 1966, pp. 436-442.

17. H. Wada, Personal communication.

18. S. S. Wagstaff, Jr., "Zeros of p-adic L-functions," Math. Comp., v. 29, 1975, pp. 1138-1143.

19. K. Wooldridge, "Some results in arithmetical functions similar to Euler's phi-function," Ph.D. thesis, 1975, University of Illinois at Urbana-Champaign.

20. H. S. Vandiver, "On Fermat's Last Theorem," Trans. Amer. Math. Soc., v. 31, 1929, pp. 613-642.

21. I. Yamaguchi, "On a Bernoulli numbers conjecture," J. Reine Angew. Math., v. 288, 1976, 168-175.

Table 1: Irregular primes of index ≥ 4.

p	Values of 2k for which p divides B_{2k}				
12613	308	502	9400	10536	
15737	6352	7454	12486	13078	
43189	9454	14464	26380	35578	
56263	10770	21958	52530	55200	
72337	2346	15858	44354	68030	
76289	11860	25284	26406	72266	
77783	5590	52114	52246	73092	
78233	10400	32084	46620	47364	64628
84067	16322	43722	44246	44794	
94693	11636	54754	76326	80650	84726
102559	6076	50092	54402	66162	
108179	9344	15048	56432	78964	
109789	10734	44536	44836	105520	
109843	16464	25396	27844	84202	
109891	36552	56682	69590	103212	
115727	36360	71962	101956	112830	
115901	33582	68462	90922	95722	
120557	42760	93110	95380	101758	