

コレログラムの或る簡便推定量について

東京理科大 理学部 岩瀬晃盛

I. $X(t)$, $t=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, を実正規定常確率過程とし, $E[X(t)] = \mu$, $V[X(t)] = \sigma^2$ 及び $Cov[X(t), X(t+h)] = \sigma^2 \rho(h)$ とする。 μ は既知であると仮定し, 一般性を失なうことなく $\mu=0$ と置く。ここでの目的はコレログラム $\rho(h)$ の推定である。簡単のために $X(t)$ は $t=1, 2, \dots, N, \dots, N+h$ で観測されるものとする。Nは正整数, hは非負整数である。

通常は, $\rho(h)$ の推定量として

$$r^*(h; D) = \frac{\sum_{t=1}^N (X(t)-D) \cdot (X(t+h)-D)}{\sigma^2 N}, \quad \sigma^2 \text{既知}, \quad (1)$$

$$r(h; D) = \frac{\sum_{t=1}^N (X(t)-D) \cdot (X(t+h)-D)}{\sum_{t=1}^N (X(t)-D)^2}, \quad \sigma^2 \text{未知} \quad (2)$$

が用いられることが多い。ここで, Dはゼロレベルを誤ってDだけ真値から離れて設定してしまったとのズレの大きさを示すものである。Dは未知なる任意の実数である。ここでは, $r^*(h; D)$, $r(h; D)$ のかわりに, 符号変換を利用した

$$\tilde{r}(h, D; d, \beta) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{\sigma^2} \cdot \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [\alpha \cdot (X(t)-D) \cdot \operatorname{sgn}(X(t+h)-D) + \beta \cdot \operatorname{sgn}(X(t)-D) \cdot (X(t+h)-D)] , \quad \sigma^2 \text{ 既知}, \quad (3)$$

$$\hat{r}(h, D; d, \beta) = \frac{\sum_{t=1}^N [\alpha \cdot (X(t)-D) \cdot \operatorname{sgn}(X(t+h)-D) + \beta \cdot \operatorname{sgn}(X(t)-D) \cdot (X(t+h)-D)]}{\sum_{t=1}^N |X(t)-D|} , \quad \sigma^2 \text{ 未知}, \quad (4)$$

なる推定量を考察する。但し α, β は $\alpha + \beta = 1$ を満たす任意の非負実数であり、 $\operatorname{sgn}(x) = 1 (x > 0), 0 (x = 0), -1 (x < 0)$ である。データから $p(h)$ を推定しようとする場合、計算機を前提にしても、 $r^*(h, D)$ や $r(h, D)$ を用いるよりも $\tilde{r}(h, D; d, \beta)$ や $\hat{r}(h, D; d, \beta)$ を用いる方が計算時間は大幅に短縮される。しかも N が或る程度大きい場合、 $r^*(h, D)$ や $r(h, D)$ の計算時間とのものが相当大きいので、この計算時間の短縮は $\tilde{r}(h, D; d, \beta)$ や $\hat{r}(h, D; d, \beta)$ の使用が実際的な意味でかなり有効であることを示している。このことより、 $\tilde{r}(h, D; d, \beta)$ や $\hat{r}(h, D; d, \beta)$ は $p(h)$ の簡便推定量呼ばれる。

(1) 式の中の $X(t)X(t+h)$ を $X(t) \cdot \operatorname{sgn} X(t+h)$ で換えることを最初に示すのは K. Takahasi & K. Husimi (1935) である。その後 1962 年に M. Hugli が simple Markov Gaussian process での $\tilde{r}(h, 0; 1, 0)$ の分散式を、また 1964 年に Gaussian process での $\hat{r}(h, 0; 1, 0)$ の分散式を示した。これらにより、 $|p(h)|$ が或る値より大きい h に対して、 $r^*(h, 0)$ の分散よりも $\tilde{r}(h, 0; 1, 0)$ の分散の方が小さいと云ふ結果が数値計算例によつて示された。

1973年, K. Iwase は 1964 年の M. Huzii の結果の別証を与えたことより, より簡単な分散式を得た。また, 1976 年, Iwase は Gaussian process $\tilde{r}(h, D; 1, 0)$ の分散式を与え, D の増大に対する $\tilde{r}(h, D; 1, 0)$ の MSE の方が $r^*(h, 0)$ の MSE の増大よりも少ないと証明した。数値計算例で, $D=0$, $p(h)=Q^{lh}$, $|a|<1$ の時, $|p(h)|$ が既定値より大きくなる h に対して, $r^*(h, 0)$ の分散よりも $\tilde{r}(h, 0; 1, 0)$ の分散の方が小さいことを証明した。1966 年に Huzii は M -dependent Gaussian process $\tilde{r}(h, 0; 1, 0)$ の $N \rightarrow \infty$ に対する漸近分散を示し, 数値計算例にあり, $r(h, 0)$ の漸近分散よりも $\tilde{r}(h, 0; 1, 0)$ の漸近分散の方がどの h に対しても大きいことを示した。

今回の主要目的は, 次の 2 つにつきを取る。1) に α と β の決まり方による, 2) 漸近分散の減少と云う意味での精度改善と收束か? 2) に D の増大に対する $r^*(h, 0)$ の減少量の大きさと "良さ" がどの程度保たれるか? これらを $\tilde{r}(h, D; \alpha, \beta)$ について行なう。

2. $\tilde{r}(h, D; \alpha, \beta)$ の漸近的性質。

以下では, M. Huzii^[3] が取扱ったのと同じ $X(t)$ を仮定する。即ち, $E[\xi(t)] = 0$, $V[\xi(t)] = 1$ かつ $E[\xi(t_1)\xi(t_2)] = 0$ ($t_1 \neq t_2$) 今 3 white noise $\xi(t)$ は δ , す

$$X(t) = G_0 \cdot \xi(t) + G_1 \cdot \xi(t-1) + \cdots + G_M \cdot \xi(t-M)$$

の如く finite moving average と表すと次の正規定常過程となる。
 $\xi(t)$ は正整数 M は正整数, G_k は実定数である。

$h=0$ のときは, ほとんどの確率は $\tilde{r}(0,0;\alpha,\beta)=1$ となるが、
 以下では $h \geq 1$ とする。最初に次の式を変形する。

$$\begin{aligned} & \sqrt{N} \cdot (\tilde{r}(h,D;\alpha,\beta) - H(h,\delta)) \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{\sigma} \sum_{t=1}^N [\alpha \cdot (X(t)-D) \cdot \text{sgn}(X(t+h)-D) + \beta \cdot \text{sgn}(X(t)-D) \cdot (X(t+h)-D) - H(h,\delta) \cdot |X(t)-D|]}{\frac{1}{N} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{\sigma} \sum_{t=1}^N |X(t)-D|} \quad (4) \end{aligned}$$

但し $\delta = \frac{D}{\sigma}$, $\Phi(\delta) = \int_0^\delta \exp[-\frac{1}{2}x^2] dx$,

$$H(h,\delta) = \left\{ p(h) \exp\left[-\frac{1}{2}\delta^2\right] + \delta \Phi(\delta) \right\} / \left\{ \exp\left[-\frac{1}{2}\delta^2\right] + \delta \Phi(\delta) \right\},$$

となる。

定理 1.

$$\tilde{r}(0,D;\alpha,\beta) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \delta \Phi(\delta) + \exp\left[-\frac{1}{2}\delta^2\right] \text{ in probability.}$$

証明は K.Iwase [5] の (2-1) 式及 B. u" (2-20) 式を利用すればよい。

この定理での $\tilde{r}(0,D;\alpha,\beta)$ とは (4) 式の分子の部分である。

$X(t)$ 及 D は次元を持ち、2 以上の板状の t における x の値の範囲の大きさには

$$Y(t) = \frac{|X(t)-D|}{\sigma}$$

と置く。このとき

$$Z(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \{ \alpha \cdot Y(t) \cdot \operatorname{sgn} Y(t+h) + \beta \cdot \operatorname{sgn} Y(t) \cdot Y(t+h) - H(h, \delta) \cdot |Y(t)| \}$$

とすれば、この $Z(t)$ は $E[Z(t)] = 0$ ならびに Diananda の意味での
 $(M+h)$ -dependent process である。 $N \rightarrow \infty$ かつ $\bar{Z}(t) = \sum_{k=1}^N Z(t)/\sqrt{N}$ は
 平均ゼロ、分散 $\sum_{k=-(M+h)}^{M+h} C(k)$ の正規分布に法則収束する。但

し $C(k) = E[Z(t) Z(t+k)]$ である。従つて、以下に於ける $C(k)$ を
 求めよう。

$$C(k) = \frac{\pi}{2} \{ \alpha^2 \cdot E[Y(t) \cdot \operatorname{sgn} Y(t+h) \cdot Y(t+k) \cdot \operatorname{sgn} Y(t+h+k)]$$

$$+ \alpha \beta \cdot E[Y(t) \cdot \operatorname{sgn} Y(t+h) \cdot \operatorname{sgn} Y(t+k) \cdot Y(t+h+k)]$$

$$- \alpha \cdot H(h, \delta) \cdot E[Y(t) \cdot \operatorname{sgn} Y(t+h) \cdot Y(t+k) \cdot \operatorname{sgn} Y(t+h+k)]$$

$$+ \beta^2 \cdot E[\operatorname{sgn} Y(t) \cdot Y(t+h) \cdot \operatorname{sgn} Y(t+k) \cdot Y(t+h+k)]$$

$$- \beta \cdot H(h, \delta) \cdot E[\operatorname{sgn} Y(t) \cdot Y(t+h) \cdot Y(t+k) \cdot \operatorname{sgn} Y(t+h+k)]$$

$$- \alpha \cdot H(h, \delta) \cdot E[Y(t) \cdot \operatorname{sgn} Y(t) \cdot Y(t+k) \cdot \operatorname{sgn} Y(t+h+k)]$$

$$- \beta \cdot H(h, \delta) \cdot E[Y(t) \cdot \operatorname{sgn} Y(t) \cdot \underbrace{Y(t+k)}_{\operatorname{sgn}} \cdot Y(t+h+k)]$$

$$+ H(h, \delta)^2 \cdot E[Y(t) \cdot \operatorname{sgn} Y(t) \cdot Y(t+k) \cdot \operatorname{sgn} Y(t+h+k)] \}$$

計算する。このために、次の4つの場合に分けて行なう。

i) $k \neq 0$ 且つ $k \neq \pm h$,

ii) $k = h$,

iii) $k = -h$,

iv) $k = 0$.

計算のためには、 $p(h)$ に対する仮定をもと

$$\sum_1 = \begin{pmatrix} 1 & p(h) & p(R) & p(R+h) \\ p(h) & 1 & p(R-h) & p(R) \\ p(R) & p(R-h) & 1 & p(h) \\ p(R+h) & p(R) & p(h) & 1 \end{pmatrix}$$

が任意の正整数 h 、及ぶ $|R| \leq M+h$ なら 任意の整数 R につき
 Σ non-singular であるとする。 $\Sigma = \Sigma^H$, 現在 [7], p.83, 補題
 5.1.1 と 11, 任意の複数 a, t に対し

$$\left| \int_a^t \frac{\sin t}{t} dt \right| \leq C$$

なる絶対定数 C が存在し、 $C = \pi$ とするのが十分であることを示す。

$$\text{また}, \quad \text{sgn}(x) = \frac{1}{\pi i} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{L \geq |u| \geq \epsilon} \frac{1}{u} \exp[iux] du$$

であることを注意すれば、K.Iwase [5] と同様に $1/2 C(R)$ が
 計算される α^{2u} , 途中の計算式は略す。

$$R(h) = \sum_{R=-M+h}^{M+h} C(R) ,$$

$$J_1(a) = \int_0^a (1-x^2)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{1+x} \delta^2\right] dx + (\bar{\Psi}(\delta))^2 ,$$

$$J_2(a) = \int_0^a (1-x^2)^{-1/2} \left\{ (1-x^2)^{-1} - \delta^2 (1+x)^{-2} \right\} \exp\left[-\frac{1}{1+x} \delta^2\right] dx + \delta \bar{\Psi}(\delta) \exp\left[-\frac{1}{2} \delta^2\right] ,$$

$$J_3(a) = (1-a^2)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{1+a} \delta^2\right] ,$$

$$J_4(a) = \delta \int_0^a (1+x)^{-1} (1-x^2)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{1+x} \delta^2\right] dx - \bar{\Psi}(\delta) \exp\left[-\frac{1}{2} \delta^2\right] ,$$

($\Re u - |a| < 1$) で $1 \neq \bar{\Psi}$,

$$\begin{aligned}
\tilde{K}(h) = & \frac{\pi}{2} (1 + H(h, \delta)^2) (1 + \delta^2) - \pi \cdot H(h, \delta) \cdot (p(h) + \delta^2) - \pi \alpha \beta \cdot (1 - p(2h)) \\
& + 2 \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq h}}^{M+h} \left\{ \alpha \beta \left[(p(k+h) + \delta^2) \cdot J_1(p(k-h)) - 2p(k)p(h)J_2(p(k-h)) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (p(k)^2 + p(h)^2) \cdot J_3(p(k+h)) - 2\delta(p(k) + p(h))J_4(p(k-h)) \right] \right. \\
& \quad \left. - \alpha \cdot H(h, \delta) \cdot \left[(p(k) + \delta^2) \cdot J_1(p(k-h)) - (p(k) + p(h)p(k-h))J_2(p(k-h)) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (p(h) + p(k)p(k-h))J_3(p(k+h)) - \delta(p(k) + p(h) + p(k-h))J_4(p(k-h)) \right] \right\} \\
& + 2 \sum_{k=1}^{M+h} \left\{ (\alpha^2 + \beta^2) \left[(p(k) + \delta^2) J_1(p(k)) - p(h)(p(k+h) + p(k-h))J_2(p(k)) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (p(h)^2 + p(k+h)p(k-h))J_3(p(k)) - \delta(2p(h) + p(k+h) + p(k-h))J_4(p(k)) \right] \right. \\
& \quad \left. + \alpha \beta \left[(p(k-h) + \delta^2) J_1(p(k+h)) - 2p(k)p(h)J_2(p(k+h)) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (p(k)^2 + p(h)^2) J_3(p(k+h)) - 2\delta(p(k) + p(h))J_4(p(k+h)) \right] \right. \\
& \quad \left. - \alpha \cdot H(h, \delta) \left[(p(k) + \delta^2) J_1(p(k-h)) - (p(k) + p(h)p(k-h))J_2(p(k-h)) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (p(h) + p(k)p(k-h))J_3(p(k+h)) - \delta(1 + p(k) + p(h) + p(k+h))J_4(p(k+h)) \right] \right\} \\
& - \beta \cdot H(h, \delta) \left[(p(k+h) + \delta^2) J_1(p(k)) - (p(k)p(h) + p(k+h))J_2(p(k)) \right. \\
& \quad \left. + (p(h) + p(k)p(k+h))J_3(p(k)) - \delta(1 + p(k) + p(h) + p(k+h))J_4(p(k)) \right. \\
& \quad \left. + (p(k-h) + \delta^2) J_1(p(k)) - (p(k)p(h) + p(k-h))J_2(p(k)) \right. \\
& \quad \left. + (p(h) + p(k)p(k-h))J_3(p(k)) - \delta(1 + p(k) + p(h) + p(k-h))J_4(p(k)) \right] \\
& + H(h, \delta)^2 \left[(p(k) + \delta^2) J_1(p(k)) - 2p(k)J_2(p(k)) \right. \\
& \quad \left. + (1 + p(k)^2) J_3(p(k)) - 2\delta(1 + p(k))J_4(p(k)) \right] \}
\end{aligned}$$

4 月 30

定理 2

$$\sqrt{N} (\tilde{r}(h, \delta; \alpha, \beta) - H(h, \delta)) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} N(0, \tilde{K}(h) / (\delta^2(\delta) + \exp[-\frac{1}{2}\delta^2])^2)$$

以下簡単の式とし

$$\tilde{V}(h, D; \alpha, \beta) = \tilde{F}(h) / (\delta^2(\delta) + \exp[-\frac{1}{2}\delta^2])^2$$

と置く。すなはち、時 D=0 のとき

$$J_1(\alpha) = \text{Arcsin } \alpha, \quad J_2(\alpha) = \alpha / \sqrt{1-\alpha^2}, \quad J_3(\alpha) = 1 / \sqrt{1-\alpha^2}, \quad J_4(\alpha) = 0$$

であるから、以上の結果を得る。

系 1

$$\begin{aligned} \tilde{V}(h, 0; \alpha, \beta) &= \frac{\pi}{2} (1 - p(h)^2) - \pi \alpha \beta (1 - p(2h)) \\ &+ 2 \sum_{k=0}^{H+h} \left\{ \alpha \beta \left[p(k+h) \text{Arcsin } p(k-h) + \frac{p(k)^2 + p(h)^2 - 2p(k)p(h)p(k-h)}{\sqrt{1-p(k-h)^2}} \right] \right. \\ &\quad \left. - \alpha \left[p(h)p(k) \text{Arcsin } p(k-h) + p(h)^2 \sqrt{1-p(k-h)^2} \right] \right\} \\ &+ 2 \sum_{k=1}^{H+h} \left\{ (\alpha^2 + \beta^2) \left[p(k) \text{Arcsin } p(k) + \frac{p(k)^2 + p(k+h)p(k-h) - p(k)p(h)(p(k+h) + p(k-h))}{\sqrt{1-p(k)^2}} \right] \right. \\ &\quad \left. + \alpha \beta \left[p(k-h) \text{Arcsin } p(k+h) + \frac{p(k)^2 + p(h)^2 - 2p(k)p(h)p(k+h)}{\sqrt{1-p(k+h)^2}} \right] \right. \\ &\quad \left. - \alpha \left[p(k)p(h) \text{Arcsin } p(k+h) + p(h)^2 \sqrt{1-p(k+h)^2} \right] \right. \\ &\quad \left. - \beta \left[p(h)p(k+h) + p(k-h) \right] \text{Arcsin } p(k) + 2p(h)^2 \sqrt{1-p(k)^2} \right\} \\ &+ p(h)^2 p(k) \text{Arcsin } p(k) + p(h)^2 \sqrt{1-p(k)^2} \}. \end{aligned}$$

この系 1 の特別な場合である $\tilde{V}(h, 0; 1, 0)$ は M. Hugli [1], Theorem 3 の結果である。しかし、Hugli の与えた式は数値計算を行えば上記より煩雑であり、且つ系 1 の式の方が便利である。また、 $h=0$ のときに $\tilde{V}(h, 0; \alpha, \beta) = 0$ となる

の ∞ , 形式的には 系 1 の式は $h \geq 0$ のときも成り立つ。

次に, h が十分大きくなる時の $\tilde{V}(h, 0; d, \beta)$ の性質を示す。實際上は, $|P(h)|$ が或る程度大きい h の部分で関心がなるものあり, 従って h が十分大きくなる場合の議論は, 特の意味でサンセニス等のものあるが, (少し) $\tilde{V}(h, 0; d, \beta)$ の数値計算の検算等には有効と思われるべく示すこととする。

$\sqrt{N} (h(h, 0) - P(h))$ の漸近分布の分散を $V(h)$ とする。これは既に M. Hugli [3], Theorem 6 で示されている。系 1 より

$h > M$ のとき

$$V(h) = 1 + 2 \sum_{k \geq 1} P(k)^2 ,$$

$$\tilde{V}(h, 0; 1, 0) = \tilde{V}(h, 0; 0, 1) = \frac{\pi}{2} + 2 \sum_{k \geq 1} P(k) \operatorname{Arcsin} P(k) .$$

$h > 2M$ のとき

$$\tilde{V}(h, 0; 1/2, 1/2) = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2} + \sum_{k \geq 1} (P(k) \operatorname{Arcsin} P(k) + P(k)^2) .$$

以上より, 次の結果を得る。

$\forall h > 2M \ L \rightarrow 1/2$

系 2. $\tilde{V}(h, 0; d, \beta)$ は $d = \beta = 1/2$ のとき最小値をもつ。

系 3. $\forall h > M \ L \rightarrow 1/2$

$$\frac{\pi}{2} V(h) \geq \tilde{V}(h, 0; 1, 0) = \tilde{V}(h, 0; 0, 1) \geq \frac{\pi - 2}{2} + V(h) .$$

系4. $\forall h > 2M \ L \geq 112$

$$\frac{\pi+2}{4} V(h) \geq \tilde{V}(h, 0; \gamma_2, \gamma_2) \geq \frac{\pi-2}{4} + V(h).$$

系5. $\forall h > 2M \ L \geq 112$

$$\tilde{V}(h, 0; \gamma_2, \gamma_2) = \frac{1}{2} [V(h) + \tilde{V}(h, 0; 1, 0)] = \frac{1}{2} [V(h) + \tilde{V}(h, 0; 0, 1)].$$

ここで系2は、等しいウェイトを付けて対称化した方がよきともう少し云々我々の感覚を裏付ける一つの結果である。系3は Huzii [3] の Theorem 8 に相当するものである、との結果は、ここで記号を置かせば

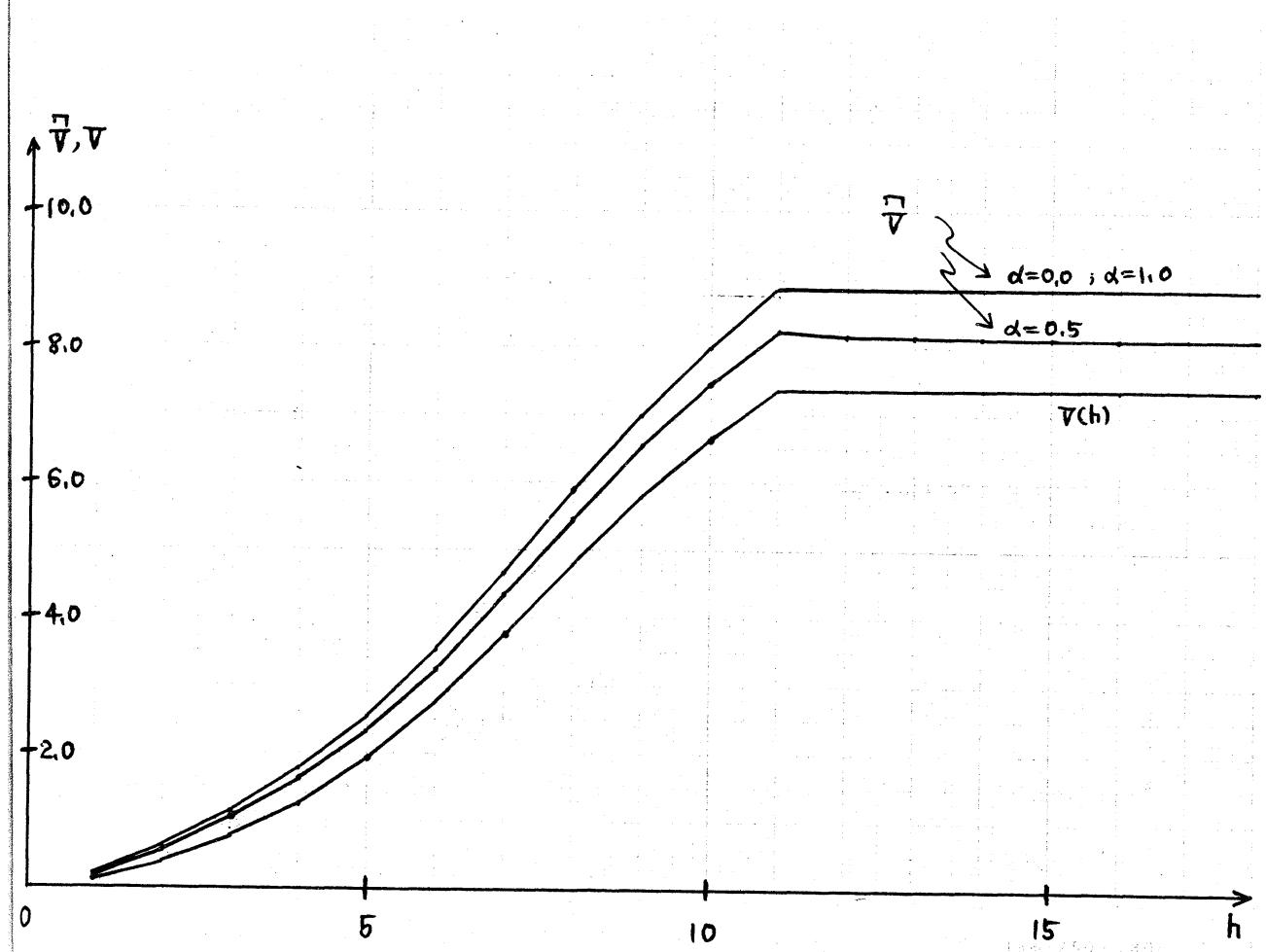
$$\frac{\pi}{2} V(h) \geq \tilde{V}(h, 0; 1, 0) > V(h)$$

であり、系3に2, 2=4nが改善され2113。

数値計算例。

$$P(h) = \begin{cases} 1 - \frac{|h|}{M+1} & ; h = 0, \pm 1, \dots, \pm M \\ 0 & ; h = \pm(M+1), \dots \end{cases}$$

とし場合の $M=10$ 例。他の 11< γ の例も同様の求め方で、ある h を見て $\alpha=0.5$ の $\pm \sqrt{h}$ の最小値を求める。また $\alpha=0.5$ は 1112 対称である。



参考文献

- [1] Huzii, M. (1962) ; On a simplified method of the estimation of the correlogram for a stationary Gaussian process , Ann. Inst. Stat. Math. , 14 , 259-268.
- [2] Huzii, M. (1964) ; On a simplified method of the estimation of the correlogram for a stationary Gaussian process , II , Kōdai Math. Sem. Rep. , 16 , 199-212.
- [3] Huzii, M. (1966) ; On a simplified method of the estimation of the correlogram for a stationary Gaussian process , III , Kōdai Math. Sem. Rep. , 18 , 195-211.
- [4] IWASE , K. (1973) ; On the formula of the variance of a simplified estimator of the covariogramme for a stationary normal process , Rep. Stat. Appl. Res. , 20 , 113-117.
- [5] IWASE , K. (1976) ; On a property of a simplified estimator of correlogram , Rep. Stat. Appl. Res. , 23 , 177-185.
- [6] Cramér , H. ; Mathematical Method of Statistics , Overseas, 1966.
- [7] 河田龍夫 ; FOURIER解析 , 産業図書 , 1975.
- [8] 寺沢寛一 ; 数学概論 , 岩波書店 , 1970.
- [9] ГРАДШТЕЙН , И.С. и РЫЖИК , И.М. ; ТАБЛИЦЫ ИНТЕГРАЛОВ , СУММ , РЯДОВ И ПРОИЗВЕДЕНИЙ , НАУКА , 1971.