

定常点過程の統計的漸近理論

統計数理研究所 尾形良彦

§1. はじめに

点列 $\omega = \{t_j; j=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ は集積点をもたない実直線上の点列で $\dots < t_{-1} < 0 \leq t_0 < t_1 < \dots$ となっているものとする。counting measure $N(A) = N(A, \omega)$ はボレル集合 $A \in \mathcal{B}'$ に対して $\omega \cap A$ の点の数を対応させるものである。点過程の法則 P が与えられたとき時間 t についての complete intensity function は次のように定義される。

$$(1.1) \quad \lambda(t, \omega) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} P\{N(t, t+\delta) = 1 \mid \mathcal{H}_t\}$$

ここで \mathcal{H}_t は ω の時間 t 以前の履歴、すなはち $N(A)$, $A \in \mathcal{B}'$, $t < s$ で生成された σ -加法族である。いま λ を $\lambda(t, \omega)$ は t と $\{t_j \in \omega, t_j < t\}$ の度数である関数と乙看理せらる。

以下いくつかの例をあげる。

例1 ポアソン過程

$$\lambda(t, \omega) = \lambda(t)$$

このとき $N(A)$ の分布は, $k=0, 1, 2, \dots$ に従う

$$P(N(A)=k) = (1/k!) \left(\int_A \lambda(t) dt \right)^k \exp - \int_A \lambda(t) dt$$

定常ならば $\lambda(t) = \lambda = \text{const.}$

例2 Survivor function $F(x)$ の 更新過程

$$\lambda(t, \omega) = - \frac{d}{dt} \log F(t-t^*)$$

ここで $t^* < t$ は最近の点。 ('hazard function')

例3 Wald process [6]

これは更新過程の拡張になっている。かんたんのため $m=2$ の場合を考える。時間 t についてと最近の 2 点 $t^{**} < t^* < t$ についての区間の長さに対する回次分布を $F(t-t^*, t^*-t^{**})$ で与えると、この条件付 hazard 関数は

$$\lambda(t, \omega) = - \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \log \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial}{\partial \sigma} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) F(\tau, \sigma) \right\}$$

となる。

例4 Hawkes の self-exciting process [2]

生死滅過程の死滅が止む場合について移位時点と出生時点がつくる点列を考える。移位者が到着するのは平均 μ の定常ポアソン過程、それより前に到着する子孫たちは生れてからの時間 $(t, t+dt)$ のあたりに $\gamma(t) dt$ の確率で子どもを一つ生む。 $\int_0^\infty \gamma(u) du < 1$ であるとき点過程

今は定常になり、intensity function は

$$\lambda(t, \omega) = \mu + \int_{-\infty}^t \gamma(t-u) dN(u) = \mu + \sum_{t_i < t} \gamma(t-t_i)$$

で与えられる。

いま、たえていきるクラスの点過程は、complete intensity function に対して ^{定常} 点過程が存在し、しかも一意にきまるものに限っておく。上にあげた例たちはこのことを保證されていき。さて時間区间 $[0, T]$ に於いて点列 $\{t_i\}_{i \geq 0}$ が観測されたときには次のように尤度関数を考えることとする。すなはち intensity function を $\lambda_\theta(t, \omega)$, $\theta \in \Theta$, としたとき、対数尤度関数は形式的に次で与えられる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_T(\theta) &= - \int_0^T \lambda_\theta^*(t, \omega) dt + \int_0^T \log \lambda_\theta^*(t, \omega) dN(t) \\ &= - \int_0^T \lambda_\theta^*(t, \omega) dt + \sum_{0 \leq t_i \leq T} \log \lambda_\theta^*(t_i, \omega) \end{aligned}$$

ただし、実際的に行は

$$\lambda_\theta^*(t, \omega) = E\{\lambda_\theta(t, \omega) | \mathcal{H}_0, t\}$$

(すなはち λ_θ は定常でないが、 $T \rightarrow \infty$ のときには漸近的に λ_θ のふるまいと違ひないことが期待される。このことは最後の節で述べる。ここでは λ_θ^* は λ_θ について語をすすめる。)

最大推定量 $\hat{\theta}_T = \hat{\theta}_T(t_i; 0 \leq t_i \leq T)$ は尤度を最大にするものの t_i を定義する。 $L_T(\hat{\theta}_T) = \max_{\theta} L_T(\theta)$ 。これはまた $\partial L_T(\theta)/\partial \theta = 0$ の解にもなる。

§2. 仮定および準備。

仮定

- (A1) 点過程は定常エルゴード的。
- (A2) 点過程は orderly ; $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} P\{N(0, \delta) \geq 2\} = 0$ 。
- (A3) $\sup_{0 < \delta \leq 1} \frac{1}{\delta} E\{N(0, \delta)^2 | \mathcal{H}_{-\infty, 0}\}$ は P -可積分。
- (A4) \mathbb{G} は compact, $\mathbb{G} \subset \mathbb{R}^d$
- (A5) 任意の $\theta \in \mathbb{G}, t \in \mathbb{R}'$ に対して $\lambda_\theta(t, \omega) > 0$ a.s.
- (A6) $\theta_1 = \theta_2$ if and only if $\lambda_{\theta_1}(0, \omega) = \lambda_{\theta_2}(0, \omega)$ a.s. P 。
- (A7) $\forall \theta \in \mathbb{G}, t \in \mathbb{R}$ に対して $\partial \log \lambda / \partial \theta_i, \partial^2 \log \lambda / \partial \theta_i \partial \theta_j, \partial^3 \log \lambda / \partial \theta_i \partial \theta_j \partial \theta_k, i, j, k = 1, 2, \dots, d$, が存在する。
- (A8) 任意 $t \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{G}$ に対して $|\partial \lambda / \partial \theta_i| \leq \Lambda_1(t, \omega), |\partial \lambda / \partial \theta_i \partial \theta_j| \leq \Lambda_2(t, \omega), i, j = 1, 2, \dots, d$, で $\Lambda_1(t, \omega), \Lambda_2(t, \omega)$ は $\mathcal{H}_{-\infty, t}$ -adapted かつ P に属する 2乗可積分。
- (A9) 任意の θ に対して $I(\theta) = \left\{ E\left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta_i} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta_j}\right)\right\}_{i, j=1, \dots, d}$ は正則行列で $\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta_i} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta_j}, i, j = 1, \dots, d$, は P に属する 2乗可積分。
- (A10) 任意の $\theta \in \mathbb{G}, t \in \mathbb{R}$ に対して $|\partial^3 \lambda / \partial \theta_i \partial \theta_j \partial \theta_k| \leq$

X

$H(t, \omega)$, $|\partial^3 \log \lambda / \partial \omega_i \partial \omega_j \partial \omega_k| \leq G(t, \omega)$, $i, j, k = 1, \dots, d$,
 があり適當な正数 $M > 0$ は $\exists E_0 \{H(t, \omega)\} < M$,
 $E_0 \{\lambda_0(t, \omega)^2 G(t, \omega)^2\} < M$.

補題 1

(A1) ~ (A3) のとき

$$1^\circ \quad E[N(0, 1)^2] < \infty$$

$$2^\circ \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} P\{N(t, t+\delta) \geq 2 | \mathcal{H}_t\} = 0$$

$$3^\circ \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} E[N(t, t+\delta)^2 | \mathcal{H}_t] = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} E[N(t, t+\delta) | \mathcal{H}_t]$$

証明

$$1^\circ. \quad \delta = 1 \text{ と } (A_3) \text{ から } t_2 - t_1 = \frac{\delta}{2} \text{ と } h_3.$$

$$2^\circ \quad E\left[\frac{1}{\delta} \cdot P\{N(t, t+\delta) \geq 2 | \mathcal{H}_t\}\right]$$

$$\leq E\left[\frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^{\infty} i^2 P\{N(t, t+\delta) = i | \mathcal{H}_t\}\right] \leq E\left[\frac{1}{\delta} E\{N(t, t+\delta) | \mathcal{H}_t\}\right]$$

したがって (A3) は δ , t で orderliness (A2) とあわせて

$$E\left[\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} P\{N(t, t+\delta) \geq 2 | \mathcal{H}_t\}\right]$$

$$= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} P\{N(t, t+\delta) \geq 2\} = 0$$

被積分関数は (A3) と \exists non-negative f_2 と \exists

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} P\{N(t, t+\delta) \geq 2 | \mathcal{H}_t\} = 0.$$

3° orderliness (A3) は $\mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Z}$ $n \rightarrow \infty$ は $\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$

$$\sum_{k=0}^{n-1} N\left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)^2 - \sum_{k=0}^{n-1} N\left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right) \rightarrow 0 \text{ a.s.}$$

$$N(0, 1) = \sum_{k=0}^{n-1} N\left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right) \text{ となる}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} N\left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)^2 \leq \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} N\left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right) \right\}^2 = N(0, 1)^2$$

1° \mathbb{P} 、 \mathbb{Z} 有界収束定理から \mathbb{Z}^2

$$n E\left[N\left(0, \frac{1}{n}\right)^2\right] \rightarrow E\{N(0, 1)\}$$

$$n E\left[N\left(0, \frac{1}{n}\right)\right] \rightarrow E\{N(0, 1)\}.$$

さて

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} E\{N(t, t+\delta)^2\} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} E\{N(t, t+\delta)\} = E\{N(0, 1)\}$$

$N(t, t+\delta)$ は ^{非負} integer-valued たゞ \times 3 次の非積分関数

は non-negative となる

$$\begin{aligned} & E\left[\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} E\{N(t, t+\delta)^2 | \mathcal{H}_t\} - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} E\{N(t, t+\delta) | \mathcal{H}_t\}\right] \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\delta} E\{N(t, t+\delta)^2\} - \frac{1}{\delta} E\{N(t, t+\delta)\} \right] = 0 \end{aligned}$$

だから 3° が 事実である。

§ 3. 結果

我々は確率過程 $\xi = \{\xi(t, \omega), t \geq 0\}$ が adapted である

3° は、定義 $t \geq 0$ は $\xi(t, \omega)$ が $\mathcal{H}_{\infty}, t = \overline{\omega}$ に

であるときと言う。ここで定義を引いたから *adapted* な確率過程の subclass Φ とは *predictable* 確率過程 (c.f. [3] page.2) のことを意味する。ここでは、我々は $\xi = \{\xi(t, \omega); t \geq 0\}$ が a.s. で ω に対して標本関数が左連続ならば重つきである事實を知りたゞで満足するとしている。仮定がときには述べたのを忘れてしまったことであるが、 $\lambda_\theta(t, \omega)$, $\frac{\partial}{\partial \theta_i} \lambda_\theta(t, \omega)$, $\frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \lambda_\theta(t, \omega)$ などの intensity process の必要な測度はすべて predictable であるとする。

さて、こちも我々はすでに書いてしまったことであるが確率積分 (Stieltjes) $\int_0^T \xi(t, \omega) dN(t) = \sum_{0 \leq t_i \leq T} \xi(t_i, \omega)$ は、ここでは predictable な ξ に対するもの。そうすると我々は次のような形式的な運算をすることを許している。

$$\int_0^T E[\lambda_\theta(t, \omega) | \xi(t, \omega)] dt < \infty \text{ ならば } \\ E\left\{ \int_0^T \xi(t, \omega) dN(t) \right\} = E\left[E\left\{ \int_0^t \xi(t, \omega) dN(t) | \mathcal{H}_{-\infty, t} \right\} \right] = E\left[\int_0^t (\xi(t, \omega)) E\{dN(t) | \mathcal{H}_{-\infty, t}\} \right] = E\left\{ \int_0^T \xi(t, \omega) \lambda_\theta(t, \omega) dt \right\}$$

以下、結果をあげて証明のあらすじを述べる。

定理 1

仮定 (A1) から (A9) のもとで: $\theta = \theta_0$ に対し

$$E\left\{ \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial \theta_i} \right\} = 0, i = 1, 2, \dots, d$$

$$E\left\{ \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial \theta_i} \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial \theta_j} \right\} = -E\left\{ \frac{\partial^2 \mathcal{L}_T}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right\} = T \cdot E\left\{ \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta_i} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta_j} \right\}, i, j = 1, \dots, d.$$

証明.

後半を示す。 $\theta = \theta_0$, $i = 2T$ の補題 1 の 1° , 2° は \mathbb{P} , \mathbb{E}

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\frac{\partial^2 L_T}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right] &= \mathbb{E}\left[-\int_0^T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \theta_i \partial \theta_j} dt + \int_0^T \frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \theta_i \partial \theta_j} dN(t) - \int_0^T \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta_i} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta_j} dN(t)\right] \\ &= \mathbb{E}\left\{-\int_0^T \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta_i} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta_j} dt\right\} = -T \cdot \mathbb{E}\left\{\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta_i} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta_j}\right\}. \end{aligned}$$

他方, $\theta = \theta_0$, $i = 2T$ の

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left\{\frac{\partial L_T}{\partial \theta_i} \frac{\partial L_T}{\partial \theta_j}\right\} \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_0^T \frac{\partial \lambda(s)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \lambda(t)}{\partial \theta_j} ds dt - \frac{dN(s)dt}{\lambda(s)} - \frac{dsdN(t)}{\lambda(t)} + \frac{dN(s)dN(t)}{\lambda(s)\lambda(t)}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\iint_{\{0 \leq s < t \leq T\}} + \iint_{\{0 \leq t < s \leq T\}} + \iint_{\{0 \leq s=t \leq T\}}\right] \\ &= I_1 + I_2 + I_3, \end{aligned}$$

ここで $\lambda(s) = \lambda_{\theta_0}(s, \omega)$, $s < t$ のとき \mathbb{P} で I_1 と I_2 が 0 である。

$$\mathbb{E}\{dN(s)dN(t) | \mathcal{H}_t\} = dN(s)\lambda(t)dt \neq 0 \text{ である} \Rightarrow I_1 = 0$$

同様に $I_2 = 0$ 。以上で $I_1 + I_2 = 0$ が証明された。

次に

$$\mathbb{E}\{(dN(t))^2 | \mathcal{H}_t\} = \mathbb{E}\{dN(t) | \mathcal{H}_t\} = \lambda(t)dt$$

である。

$$I_3 = \mathbb{E}\left\{\int_0^T \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta_i} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta_j} dt\right\} = T \cdot \mathbb{E}\left[\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta_i} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta_j}\right].$$

以上で $\theta = \theta_0$ のとき L_T が \mathcal{H}_T -non-anticipating であることを示した。

最後に $\theta = \theta_0$ のとき L_T が \mathcal{H}_T -non-anticipating であることを示す。

補題2

確率過程 $\xi(t, \omega)$ は定常で 2 次モーメント $E[\xi^2]$ が finite であることを示す。

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t, \omega) dt = E\{\xi(0, \omega)\} \text{ a.s. ,}$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t, \omega) \frac{dN(t)}{\lambda(t)} = E\{\xi(0, \omega)\} \text{ a.s. .}$$

証明

補題の仮定と (A1) より $\xi(t, \omega)$ はエルゴード的であるから最初の η の定義はエルゴード的である。2 番目は \cdots 。

$$\eta(T, \omega) = \int_0^T \xi(t, \omega) \frac{dN(t)}{\lambda(t)} - \int_0^T \xi(t, \omega) dt$$

とおけ。

$$Y_i = \eta(i, \omega) - \eta(i-1, \omega), \quad i=1, 2, \dots, [T]$$

は定常なマルコフ過程の差であるから $\sum_{i=1}^{[T]} Y_i / T \rightarrow 0$ a.s. となる。以下 $\eta(T, \omega) / T \rightarrow 0$ a.s. となる。前半の結果とあわせて後半が得られた。

補題3

単位区間 $[0, 1]$ における対数尤度比

$$L_1^*(\theta) = \int_0^1 (\lambda_\theta - \lambda_{\theta_0}) dt + \int_0^1 \log \frac{\lambda_{\theta_0}}{\lambda_\theta} dN(t)$$

(= 定義)

$$E[L_1^*(\theta)] \geq 0, \quad \theta \in \mathcal{O}$$

したがって λ_θ は $\lambda_\theta(\theta, \omega) = \lambda_{\theta_0}(\theta, \omega)$ a.s. のときをもつ。

証明

$$E[L_1^*(\theta)] = E[\lambda_\theta(\theta, \omega) - \lambda_{\theta_0}(\theta, \omega) + \lambda_{\theta_0}(\theta, \omega) \log \frac{\lambda_{\theta_0}(\theta, \omega)}{\lambda_\theta(\theta, \omega)}]$$

一般に $x > 0$ に対して $\log x \geq 1 - x^{-1}$ が成立し

で等号は $x=1$ のときにはさるときなり証明でき。3。

定理2.

仮定(A1)～(A7)のもとで最尤推定量 $\hat{\theta}_T = \hat{\theta}_T(x_i, 0 \leq t_i \leq T)$ は一致性をもつ。

証明

θ の近傍 U から $\{\theta\}$ に縮むと同時に $L_1^*(\theta)$ は、仮定(A7)から λ_θ は θ について連続であるから、

$$E[\inf_{\theta' \in U} \lambda_{\theta'}] \rightarrow E[\lambda_\theta]$$

$$E[\lambda_{\theta_0} \log \frac{\lambda_{\theta_0}}{(\sup_{\theta' \in U} \lambda_{\theta'})}] \rightarrow E[\lambda_{\theta_0} \log \frac{\lambda_{\theta_0}}{\lambda_\theta}]$$

となる。すなはち θ_0 の近傍を適当に U_0 とすれば、任意の $\theta \in \Theta \setminus U_0$ に対して $E[L_1^*(\theta)] \geq 3\varepsilon$ となる。すなはち、適当な $\varepsilon > 0$ をとることができ。 $L_1^*(\theta)$ は θ について連続だから補題3と仮定(A6)をつかえれば $\theta \sim \theta_0$ である。

さて任意の $\theta \in \Theta \setminus U_0$ に対して θ の近傍 U を適当にとれば、

$$E[\inf_{\theta' \in U} \lambda_{\theta'} - \lambda_{\theta_0} + \lambda_{\theta_0} \log \frac{\lambda_{\theta_0}}{\sup_{\theta' \in U} \lambda_{\theta'}}] \geq L_1^*(\theta) - \varepsilon \geq 2\varepsilon$$

とできる。④ U_0 はコンパクト集合であるからこれを覆う有限個の U_s , $s=1, 2, \dots, N$ を選ぶ。すると $U_0 \subset U_{s=1}^N, U_s$ 。 $s=3$ で $\inf_{\theta \in U} \lambda_{\theta}(t, \omega)$, $\sup_{\theta \in U} \lambda_{\theta}(t, \omega)$ は predictable process たる $s < T$ で十分大きくなると λ_{θ} は $\theta \in U$, $t > 0$ および $s = 1, 2, \dots, N$ のとき λ_{θ} は $(T \geq T_0(\varepsilon))$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T} \mathcal{L}_T(\theta_0) - \sup_{\theta \in U_0} \frac{1}{T} \mathcal{L}_T(\theta) \\ & \geq \frac{1}{T} \int_0^T (\inf_{\theta \in U_s} \lambda_{\theta} - \lambda_{\theta_0}) dt + \frac{1}{T} \int_0^T \log \frac{\lambda_{\theta_0}}{\sup_{\theta \in U_s} \lambda_{\theta}} dN(t), \\ & \geq E \left[\inf_{\theta \in U_0} \lambda_{\theta} - \lambda_{\theta_0} + \lambda_{\theta_0} \log \frac{\lambda_{\theta_0}}{\sup_{\theta \in U_0} \lambda_{\theta}} \right] + \varepsilon \\ & \geq \varepsilon \end{aligned}$$

が成立する。すなはち θ_0 の任意の近傍 U_0 は $\exists T_0 = T_0(U_0)$ が存在して、 $T \geq T_0$ のときは

$$\sup_{\theta \in U_0} \mathcal{L}_T(\theta) \geq \sup_{\theta \in \theta_0 - U_0} \mathcal{L}_T(\theta) + \varepsilon T \quad \text{a.s.}$$

これは定理 2 を導く。

定理 3

θ_0 の適当な近傍で尤度の Hessian $\left\{ \frac{1}{T} \frac{\partial^2 \mathcal{L}_T(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right\}_{i,j=1,2,\dots,d}$ は漸近的に negative-definite.

証明略。

例5. intensity function の parametrization と $\lambda_\theta(t, \omega)$ の
单峰性。

$$\lambda_\theta(t, \omega) = \sum_{i=1}^k \theta_i \xi_i(t, \omega) + \eta(t, \omega)$$

$$\lambda_\theta(t, \omega) = \exp \left\{ \sum_{i=1}^k \theta_i \xi_i(t, \omega) + \eta(t, \omega) \right\}$$

(t_0 で ξ_i, η は λ に 適合する \Rightarrow predictable)

尤度は单峰である。事實、 $\exists u_i \in \mathbb{R} \quad i=1, 2, \dots, d$

使得する

$$\sum_{i,j=1}^d u_i u_j \frac{\partial^2 \mathcal{L}_T}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = \begin{cases} - \int_0^T \left\{ \left(\sum_{i=1}^k u_i \xi_i \right)^2 / \lambda_\theta^2 \right\} dN(t) \\ - \int_0^T \left(\sum_{i=1}^k u_i \xi_i \right)^2 \lambda_\theta dt \end{cases}$$

と \mathcal{P}_3 。

定理4.

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \frac{\partial \mathcal{L}_T(\theta_0)}{\partial \theta} \rightarrow N(0, I(\theta_0)), \quad T \rightarrow \infty$$

証明。

$0 \leq S \leq T, i=1, 2, \dots, d$ は \Rightarrow

$$E \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}_T(\theta_0)}{\partial \theta_i} \mid \mathcal{H}_S \right\} = \frac{\partial \mathcal{L}_S(\theta_0)}{\partial \theta_i} + E [\Delta(S, T) \mid \mathcal{H}_S]$$

使得する

$$E \{ \Delta(S, T) \mid \mathcal{H}_S \} = E \left[\int_S^T \frac{d\lambda}{\partial \theta} \left\{ \frac{dN(t)}{\lambda} - dt \right\} \mid \mathcal{H}_S \right] = 0$$

$\mathcal{P}_3 = \mathcal{P}_3 \quad \partial \mathcal{L}_T(\theta_0) / \partial \theta$ は \mathcal{P}_4 で \mathcal{P}_3 である。 \mathcal{P}_3

$$\frac{\partial \mathcal{L}_T(\theta_0)}{\partial \theta} = \sum_{k=1}^{[T]} \Delta(k-1, k) + \Delta([T], T)$$

この解すと確率変数列 $\{\Delta(k-1, k)\}_{k=1,2,\dots}$ は定数エルゴード的でマルコフ連鎖であり $\in \{\Delta(0,1), \Delta(0,1)^*\}$
 $= I(\theta_0)$ となるから定理1より導かれるから
 $\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{k=0}^{[T]-1} \Delta(k, k+1) \rightarrow N(0, I(\theta_0))$ 。

一方 $\sqrt{T} \cdot \Delta([T], T) \rightarrow 0$ in prob. から定理4を得る。

定理5

$\hat{\theta}_T$ が最大推定量のとき $T \rightarrow \infty$ とき

$$\sqrt{T} (\hat{\theta}_T - \theta_0) \rightarrow N(0, I(\theta_0)^{-1})$$

$$2 \{ \mathcal{L}_T(\hat{\theta}_T) - \mathcal{L}_T(\theta_0) \} \rightarrow \chi^2_\alpha$$

証明

$$0 = \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{\partial \mathcal{L}_T(\theta_0)}{\partial \theta} + \frac{1}{T} \frac{\partial^2 \mathcal{L}_T(\theta_0)}{\partial \theta \partial \theta'} \sqrt{T} (\hat{\theta}_T - \theta_0) + \\ + \sqrt{T} (\hat{\theta}_T - \theta_0)' \left\{ -\frac{\alpha}{T} \int_0^T H(t, \omega) dt + \frac{\beta}{T} \int_0^T G(t, \omega) dN(t) \right\} (\hat{\theta}_T - \theta_0)$$

(は仮定(A7)～(A10)と定理2に従って充分大きく T を取れば等かれる。ここでは α, β は確率変数を成さずに行はれて $|\alpha_{ij}|, |\beta_{ij}| \leq d^2/2$ 。任意の $\delta > 0$ に対し T を充分大きく取ると $\hat{\theta}_T = \theta_0$ になる。

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} dt + \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} dN(t) \right| < \delta d^2$$

$$\left| I(\theta_0) + \frac{1}{T} \int_0^T -\frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} dN(t) \right| < \delta d^2$$

$$\left| \frac{\alpha}{T} \int_0^T H(t, \omega) dt + \frac{\beta}{T} \int_0^T G(t, \omega) dN(t) \right| < \varepsilon d^3 M^3$$

ゆえに $T \rightarrow \infty$ のとき $\hat{\theta}_T - \theta_0 \rightarrow 0$ a.s. から 適当

で $\varepsilon_T > 0$, 但し $T \rightarrow \infty$ のとき $\varepsilon_T \rightarrow 0$, $\varepsilon \neq 0$

$$\left| \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{\partial \mathcal{L}_T(\theta_0)}{\partial \theta} - \sqrt{T} I(\theta_0) (\hat{\theta}_T - \theta_0) \right| \leq \varepsilon_T \sqrt{T} (\hat{\theta}_T - \theta_0)$$

を得るので、前半の結果が得られる。後半については、

$$\begin{aligned} & 2 \{ \mathcal{L}_T(\hat{\theta}_T) - \mathcal{L}_T(\theta_0) \} \\ &= 2 \frac{\partial \mathcal{L}_T(\theta_0)}{\partial \theta} (\hat{\theta}_T - \theta_0) + (\hat{\theta}_T - \theta_0)' \frac{\partial^2 \mathcal{L}_T(\theta_0)}{\partial \theta \partial \theta} (\hat{\theta}_T - \theta_0) + \\ &+ |\hat{\theta}_T - \theta_0|^3 \left\{ \int_0^T \alpha^* H(t, \omega) dt + \int_0^T \beta^* G(t, \omega) dN(t) \right\} \end{aligned}$$

となるよう α^*, β^* , $|\alpha^*|, |\beta^*| \leq d^2/2$ だから

最後の項は 0 に収束 (9.5) するから 後半の結果を得る。

4. 初期条件についての問題。

「まず漸近的結果を出すために intensity function
 $\lambda_\theta(t, \omega)$ は定常過程である必要がある。たとえば $\lambda_\theta(t, \omega) = \lambda_\theta - \omega t$ の関数である」

こと、すなはち $t = \infty$ の過去からの影響があることを考慮して
 わざわざというべきである。実際には確率過程の時間
 区間 $[0, T]$ からのだから、当然 intensity function とは
 は。たとえば $\lambda_0^*(t, \omega) = E[\lambda(t, \omega) | \mathcal{F}_0, t]$ を代用する
 ことである。これは $T \rightarrow \infty$ とともに $\lambda(t, \omega)$ に収束する
 ことはわかるが、(1) 題は、そのスピードについてである。この達
 いかく、補題 2 のタイプの極限定理や中心極限定理
 は影響を与えない程度のものである必要がある。
 確率収束のための条件を要求してつき下の条件は見
 容の標準になるものと思う。

条件 B

$$|\lambda_\theta(t, \omega) - \lambda_\theta^*(t, \omega)| \leq f_0(t, \theta) \xi_0(\theta, \omega),$$

$$\left| \frac{\partial \lambda}{\partial \theta_i} - \frac{\partial \lambda^*}{\partial \theta_i} \right| \leq f_1(t, \theta) \xi_1(\theta, \omega),$$

$$\left| \frac{\partial \lambda}{\partial \theta_i \partial \theta_j} - \frac{\partial \lambda^*}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right| \leq f_2(t, \theta) \xi_2(\theta, \omega)$$

$$\left| \frac{\partial^3 \lambda}{\partial \theta_i \partial \theta_j \partial \theta_k} - \frac{\partial^3 \lambda^*}{\partial \theta_i \partial \theta_j \partial \theta_k} \right| \leq f_3(t, \theta) \xi_3(\theta, \omega) \quad i, j, k = 1, \dots, d.$$

$t = t_n \rightarrow \infty$ かつ $T \rightarrow \infty$

$$\sqrt{\frac{1}{T}} \int_0^T f_\nu(t, \theta) dt \rightarrow 0, \quad \nu = 0, 1, 2, 3,$$

この条件は、例1ならば定常ボアソン、例2,3は自動的には満足している。例4についてもたとえば

$$\lambda_\theta = \mu + \int_{-\infty}^t \alpha e^{-\beta(t-u)} dN(u), \quad 0 < \alpha < \beta,$$

なれば

$$\lambda_\theta^* = \mu + \frac{\alpha\mu}{\beta-\alpha} e^{-\beta t} + \int_0^t \alpha e^{-\beta(t-u)} dN(u)$$

だから

$$|\lambda_\theta - \lambda_\theta^*| = e^{-\beta t} \cdot \left\{ \frac{\alpha\mu}{\beta-\alpha} + \int_{-\infty}^0 \alpha e^{\mu u} dN(u) \right\}$$

である。さて $f_\lambda(t, \theta) = (-t)^\nu e^{-\beta t}$ となつて条件を満たすことはなる。

§5. Cramer-Rao の不等式

いま区間 $(0, T)$ において点過程 P_θ の母数 $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$ に対する推定量 $\delta_T = \delta_T(\omega)$, ($\omega = (\dots, t_1, t_2, \dots, t_n, \dots)$), を考へる。さてここで点過程 P_θ , $\theta \in \Theta$, は区間 $(0, T)$ 上, intensity 1 のボアソン過程に対して絶対連続であるとする。このとき Radon-Nykodim 微分は

$$P_\theta(\omega) = \frac{dP_\theta}{dP_T} = \exp \left\{ \int_0^T \log \lambda_\theta^*(t) dN(t) + \int_0^T (1 - \lambda_\theta^*(t)) dt \right\}$$

で与えられることが知られている。以下において必要な正則条件(たとえば微分と積分の交換など)は、すべて満たす

ものとする。

定理 6

$$E_\theta(\delta_T) = \theta + b_T(\theta), \quad I_T^*(\theta) = \int_0^T E\left\{\frac{1}{X(t)} \frac{\partial \lambda^*}{\partial \theta} \frac{\partial \lambda^*}{\partial \theta}\right\} dt$$

$$\sum (\delta_T) \geq \left(I + \frac{db_T(\theta)}{d\theta}\right)' I_T^*(\theta)^{-1} \left(I + \frac{db_T(\theta)}{d\theta}\right)$$

ここで $\sum (\delta_T)$ は δ_T の 共分散行列。等号は $\delta_T = \text{const} \times \frac{\partial}{\partial \theta} \log P_\theta(\omega)$ の時。不等号は非対称定値を意味する。

証明

$$E_\theta(\delta_T) = \int \delta_T P_\theta(d\omega) = \int \delta_T(\omega) P_\theta(\omega) P_\pi(d\omega).$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{d}{d\theta} E_\theta(\delta_T) &= \int \delta_T \frac{\partial}{\partial \theta} P_\theta(\omega) P_\pi(d\omega) = \int \delta_T \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log P_\theta(\omega) \right) P_\theta(\omega) P_\pi(d\omega) \\ &= \int \delta_T \frac{\partial}{\partial \theta} \log P_\theta(\omega) P_\theta(d\omega) = E_\theta \left[\delta_T \frac{\partial}{\partial \theta} \log P_\theta(\omega) \right] \end{aligned}$$

定理 1 と同様に $E_\theta \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \log P_\theta(\omega) \right] = 0$ がいえよしとする
ときの下式で $s, t \in R^k$ とする。
 $\left\{ t' \left(I + \frac{d}{d\theta} b_T(\theta) \right) s \right\}^2 = \left\{ t' \cos(\delta_T \frac{\partial}{\partial \theta} \log P_\theta(\omega)) s \right\}^2$

$$\leq E \left(t' (\delta_T - \theta - b_T(\theta)) (\delta_T - \theta - b_T(\theta))' t \right) E \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log P_\theta(\omega) \right)^2 \right]$$

ここで $S = E[(\delta_T - \theta - b_T(\theta)) (\delta_T - \theta - b_T(\theta))']^{-1} (I + \frac{d}{d\theta} b_T(\theta))$ と置
いて代入すると証明は終る。

さて $I_T^*(\theta)/T \rightarrow I(\theta)$, $T \rightarrow \infty$, となることから
 λ^* の条件からわかるから、この定理 6 と定理 5 によれば
次の定理を得る。

定理7

仮定 A と条件 B のもとに最大推定量 $\hat{\theta}_T$ は Best Asymptotic Normal 推定量である。

13/5

ポアソン過程の intensity θ についての Fisher-情報量は $1/\theta$ である。最大推定量は $N(0, T)/\theta$ であり、 $(0, \infty)$ で一様な事前分布を与えたベイズ推定量は $(N(0, T) + 1)/\theta$ となる。これらは、いずれも Cramer-Rao's lower-bound を attain するが、前者が不偏推定量である。

§6. ポアソン過程の最大推定量による特徴づけ

更新過程を生き残り関数 $\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ とする。すなはち、いま $\int_0^\infty dF(x) = 1$, $\int_0^\infty x dF(x) = 1$ なる分布関数に対して生き残り関数が $F_0(x) = 1 - F(\lambda x)$ なる更新過程を考えたとき $E[N(0, 1)] = 0$ となることが知られている。 $F(x)$ は必要な正則条件をすべて満たす。

定理8

更新過程の平均 intensity θ についての最大推定量が $N(0, T)/\theta$ であるための必要十分条件は $F(x) = e^{-x}$ すなはち

定理ボアソン過程となることである。

証明

十分条件は前節の18) 5で与えた。必要条件。いま確率測定 $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq T$ を何等分割したとき対数尤度は

$$\log L_T(\theta) = \sum_{i=1}^n \log \theta f(\theta(t_i - t_{i-1})) + \log \{1 - F(\theta(T - t_n))\}$$

で与えられることが計算できる。(c.f. 例12) このとき
 $(\partial/\partial\theta) \log L_T(\frac{n}{T}) = 0$ の条件から導かれて、これは

$$0 = T + \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \frac{f'(\frac{n}{T}(t_i - t_{i-1}))}{f(\frac{n}{T}(t_i - t_{i-1}))} + \frac{-(T-t_n)f(\frac{n}{T}(T-t_n))}{1 - F(\frac{n}{T}(T-t_n))}$$

ただし $f(x) = dF(x)/dx$, $t_0 = 0$, $T = t_n$, $\xi_i = \frac{n}{T}(t_i - t_{i-1})$, $g(\xi) = \{\xi f'(\xi)/f(\xi)\} + 1$, とおくと
 $\sum_{i=1}^n g(\xi_i) = 0$, $\forall \xi_i > 0$, $\sum \xi_i = n$,

となる。 n すなはち $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_{n-1} = h$, $\xi_n = -(n-1)h$,
 とおく $G(\xi) = g(1+\xi)$ とおくと

$$G(-(n-1)h) = -(n-1) G(h).$$

このことから $G(h) = -ch$ が導かれ、条件 $\int_0^\infty f(x) dx = \int_0^\infty x f(x) dx = 1$ は $f(x) = ce^{-cx}$ となる。

$$f(x) = \frac{c}{P(c)} x^{c-1} e^{-cx}$$

が得られる。(かうして $t_n < T$ のときにば、この $f(x)$ は)

$$(x, n=T, x=T-t_n)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \log L_T(\frac{n}{T}) = ct + \frac{-f(t)}{1-F(t)} = 0$$

とゆって定数Cは $C=1$ となる。よって証明終り。

References

- [1] Kabanov, Yu. M. & Liptser, R. Sh. & Shiryaev, A. N., (1975), Martingale Method in the theory of Point Processes, Proceeding of Vilnius Symposium U.S.S.R. (in Russian).
- [2] Hawkes, A. G. & Oakes, D., (1974), A Cluster Process Representation of a Self-exiting Point Process, J. Appl. Prob., 11, 493-503.
- [3] Meyer, P. A., (1972), Martingale and Stochastic Integrals I, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag.
- [4] Ogata, Y. (1977), The Asymptotic Behavior of Maximum Likelihood Estimator of Stationary Point Processes, submitted to Annals of Institute of Statistical Mathematics.
- [5] Ozaki, T. (1977), The Maximum Likelihood Estimator of the Hawkes' Self-exciting Point Processes, This Volume.
- [6] Vere-Jones, D., (1975), Lectures on Point Processes, Department of Statistics, University of California, Berkeley.