

スペクトラム解析のある一般化

阪大 基礎工 谷口 正信

§0. 序

通常の + operation によって時間 parameter の translation で k 次の moments が不变である random process は k 次の弱定常過程とよばれる。これは Morettin [5] は dyadic translation によって k 次の moments が不变である process を dyadic stationary process of order k と呼んだ。

通常の k 次の弱定常過程に対して、 k 次の spectrum of order k は k th order moments の Fourier 变換として定義された。これら統計的解析は (Brillinger-Rosenblatt [1], Rosenblatt-Van Ness [8]) 等にある。一方 dyadic stationary process of order k に対して Morettin [5] は二の k th order moments を Walsh-Fourier 变換して Walsh spectrum of order k を定義した。ここでは二の Walsh spectrum of order k の consistent estimate を与える。しかし二のことは、更に一般的な立場から議論が行

なはれる。すなはちある適当な translation operation \oplus による“ずらし”で R 次の moments が不変である process を定義する。これを \oplus -stationary process と呼ぶ。

一方この process に対して、 R 次の moments をその character group の上で Fourier 変換を行って、二つを \equiv で一般化した spectrum (generalized spectrum of order k) と呼ぶ。そしてこの spectrum の consistent is the ~~推定量~~ をつくる。

3.1. Weakly \oplus -stationary process.

R を $(-\infty, \infty)$ もしくは $[0, \infty)$ とする。そして R を通常の real line の topology をもつ topological space とする。ここで R に operation \oplus を定義する。任意の $x, y \in R$ に対して, operation \oplus は次の条件をみたすとする。

(1.1) - (1.8)

(1.1) for any $x, y \in R$, $x \oplus y \in R$;

(1.2) for any $x, y \in R$, $x \oplus y = y \oplus x$;

(1.3) for any $x, y, z \in R$, $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$;

(1. 4) for any $x \in R$ and for $0 \in R$, $x \oplus 0 = x$;

(1. 5) for each $x \in R$, \exists_1 unique inverse element $\tilde{x} \in R$ such that $x \oplus \tilde{x} = 0$;

(1. 6) for any $x, y \in R$, the mapping $(x, y) \mapsto x \oplus \tilde{y}$ is R の topology にて 連続;

(1. 7) for any $x \in R$, for any Borel set A on R . $|A| = |A_x|$,

すなはち $A_x = \{z \mid z = x \oplus y, y \in A\}$, 又 $| \cdot |$ は Lebesgue Measure を表す;

(1. 8) for any $x, y \in R$, \exists sequence $\{B_T\}$ such that $B_T \rightarrow 0$ as $T \rightarrow \infty$ and

$$B_T^{-1}(x \oplus y) = (B_T^{-1}x) \oplus (B_T^{-1}y), \text{ for all } x, y \in R.$$

注意) (1.8) では, 一般の分配律 $c(x \oplus y) = cx \oplus cy$.

$\forall c, x, y \in R$ は成立しないので, 分配律が適当な数列

に対しては成立する二とを要請している。すなはち integer T はすべての non-negative integers $\geq m$ と n と T に限らない)

すなはち, sequence $\{T\}$ は適当な subsequence of all non-negative integers を表すとする。

Example 1. Ordinary-plus case. もし $\oplus = +$ (通常のプラス) とし, $R = (-\infty, \infty)$ とすれば (1.1)-(1.8) はみだせまる。

Example 2. Dyadic case. $x, y \in$ non-negative real numbers で 次の dyadic expansion をもつとする。

$$x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k 2^k, \quad x_k = 0 \text{ or } 1,$$

$$y = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k 2^k, \quad y_k = 0 \text{ or } 1.$$

\equiv \equiv dyadic translation \oplus on R は, 次の式の右辺で定義する。 $x \oplus y = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (x_k \oplus y_k) 2^k$,

\equiv $x_k \oplus y_k \not\equiv \text{mod. } 2$ of $\{0, 1\}$ の addition,

すなはち $0 \oplus 0 = 0, 0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1, 1 \oplus 1 = 0$.

\equiv $\oplus = \oplus$ on R とみなす $R = [0, \infty)$ とすれば, (1.1)-(1.8) はみだせまる。ただし (1.8) では

$$B_T = 2^{-h(T)}, \quad h(T) \text{ は } h(T) \rightarrow \infty \text{ as } T \rightarrow \infty$$

である様に positive integer とすればみだせまる。

N is set of all integers or all non-negative integers (according as R is $(-\infty, \infty)$ or $[0, \infty)$)

とする。 G is group of the elements of R by mod. 1. とする。 $\widehat{G} = \{ P(n, x) : n \in N, x \in G \}$ として, G 上の complex function $P(n, x)$ は次の (1.9)–(1.14) を満たすとする。

$$(1.9) \text{ for all } n \in N, |P(n, x)| = 1, \text{ a.e. } x \in G;$$

$$(1.10) \text{ for every } n \in N \text{ and for each } y \in G,$$

$$P(n, x) P(n, y) = P(n, x \oplus y), \text{ a.e. } x \in G;$$

$$(1.11) \text{ for every } m, n \in N,$$

$$P(m, x) P(n, x) = P(m \oplus n, x), \text{ a.e. } x \in G;$$

$$(1.12) P(n, x) \text{ is } \oplus\text{-continuous at } x \in G, \text{ i.e.}$$

for any $\eta > 0$, $\exists \delta > 0$. $|h| < \delta \Rightarrow$

$$|P(n, x \oplus h) - P(n, x)| < \eta.$$

$$(1.13) \text{ the set } M_T = \{ 0, 1, \dots, T-1 \} \text{ generates } N,$$

$$\text{i.e. } N_T = \{ t : t = m \oplus \widehat{n}; m, n \in M_T \} \rightarrow N$$

as $T \rightarrow \infty$;

(1.14)

$$D_T(x_j) = \begin{cases} T & \text{if } j=1 \\ 0 & \text{if } j=2, \dots, T, \end{cases}$$

z = 1 =

$$D_T(x) = \sum_{k=0}^{T-1} P(k, x) \text{ and } x_j = \frac{j-1}{T}.$$

Example 1. Ordinary-plus case, $P(n, x) = \exp(2\pi i n x)$ とすれば (1.9) - (1.14) は成り立つ。

Example 2. Dyadic case. まず Walsh functions $\{W(n, x) : n=0, 1, \dots\}$ を次の様に定義す。

$$(1.17) \quad W(0, x) \equiv 1, \quad x \in G;$$

$$(1.18) \quad W(n, x) = RD(n_1, x) \cdots RD(n_r, x), \text{ for}$$

$n = 2^{n_1} + \dots + 2^{n_r}$, ($n_{i+1} < n_i$), where $RD(j, x) = Rd(2^j x)$

$$Rd(x+1) = Rd(x), \text{ and } Rd(x) = \begin{cases} 1 & , 0 \leq x < 1/2 \\ -1 & , 1/2 \leq x < 1. \end{cases}$$

$$z = 2: P(n, x) = W(n, x), \oplus = + \text{ となる条件 (1.9)}$$

- (1.14) は成り立つ。また (1.13) (1.14) は $T = 2^n$

(n は positive integer) は成り立つ。

参考 [2].

例題 1. r -vector valued process $X(t) = (X_1(t), \dots, X_r(t))'$

$x \in N$, を扱う。そして $X_a(t)$, $a=1, \dots, r$ はすべてすべての order のすべての moment が存在するとする。

定義 $\{X(t) : t \in N\}$ が k -th order weakly \oplus -stationary $\Leftrightarrow \sum X(t) = 0$,

$$\sum \{ X_{a_1}(u_1 \oplus t) \cdots X_{a_{k-1}}(u_{k-1} \oplus t) X_{a_k}(t) \} = R_{a_1 \dots a_k}(u_1, \dots, u_{k-1}) \quad (\text{say})$$

は、 t は無関係, for all $u_1, \dots, u_{k-1}, t \in N$,
 $a_j \in \{1, \dots, r\}$.

仮定

$$(1.19) \sum_{u_1 \in N} \cdots \sum_{u_{k-1} \in N} |R_{a_1 \dots a_k}(u_1, \dots, u_{k-1})| < \infty.$$

定義 $f_{a_1 \dots a_k}(x_1, \dots, x_{k-1})$

$$= \sum_{u_1 \in N} \cdots \sum_{u_{k-1} \in N} R_{a_1 \dots a_k}(u_1, \dots, u_{k-1}) \prod_{j=1}^{k-1} P(u_j, x_j).$$

を generalized spectrum of order k と呼ぶ。

2. Estimation. $\{X(t) = (X_{a_1}(t), \dots, X_{a_k}(t))'$,
 $t=0, \dots, T-1\}$ を \oplus -stationary process of order k
 の observation とする。次の statistic を定義する。

$$I_{a_1 \dots a_k}^{(T)}(x_1, \dots, x_k) = T^{-1} \prod_{j=1}^k \sum_{t=0}^{T-1} X_{a_j}(t) P(t, x_j).$$

$K(u_1, \dots, u_k)$ は \oplus -continuous function で

$$|K(u_1, \dots, u_k)| \leq A, \text{ if } |u_j| \leq 1, j=1, \dots, k,$$

$$= 0, \text{ otherwise,}$$

$$K(u_1, \dots, u_k) = K(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_k),$$

$$\& \int \dots \int K(u_1, \dots, u_k) H(u_1, \dots, u_k) du_1 \dots du_k = 1,$$

$\equiv 1 = A$ は positive constant で

$$H(u_1, \dots, u_k) = 1, \text{ if } u_1 \oplus \dots \oplus u_k = 0 \& u_{k_i} \oplus \dots \oplus u_{k_j} \neq 0$$

$$\{k_1, \dots, k_j\} \subsetneq \{1, \dots, k\},$$

$$= 0, \text{ otherwise}.$$

$\{B_T\}$ は (1.8) の $\forall T \in \mathbb{N}$ real number の sequence

で $T B_T \rightarrow \infty, \dots, T B_T^{k-1} \rightarrow \infty$ として $T \rightarrow \infty$ とする。

$$K_T(u_1, \dots, u_k) = B_T^{-k+1} K(B_T^{-1} u_1, \dots, B_T^{-1} u_k)$$
 とおく。

ここで $f_{a_1 \dots a_k}(x_1, \dots, x_{k-1})$ の 推定量として、

$$\hat{f}_{a_1 \dots a_k}(x_1, \dots, x_{k-1}) = T^{-k+1} \sum_{m_1 \in N_T} \dots \sum_{m_k \in N_T} I_{a_1 \dots a_k}^{(T)} (x_1 \oplus \frac{m_1}{T},$$

$$\dots, x_k \oplus \frac{m_k}{T}) K_T(m_1/T, \dots, m_k/T) H(m_1/T, \dots, m_k/T),$$

$T \in \mathbb{N}$ で $x_i \oplus \dots \oplus x_k = 0$ を 提案する。

$C_{a_1 \dots a_m}(u_1, \dots, u_{m-1})$ = cumulant of $X_{a_1}(u_1 \oplus t), \dots, X_{a_{m-1}}(u_{m-1} \oplus t),$

$$X_{a_m}(t)\},$$

とおく。

integer $u_1 = \text{defte}$,

$$\|u\|_T = T - \#\{t : 0 \leq t \leq T-1, 0 \leq u_t \leq T-1, \\ t \text{ being an integer}\},$$

$\#\{\cdot\}$ は $\{\cdot\}$ の中の element の個数を表す。

仮定

$$(2.1) \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{u_1 \in N_T} \dots \sum_{u_{m-1} \in N_T} \|u_j\|_T |c_{a_1 \dots a_m}(u_1, \dots, u_{m-1})| < \infty,$$

for any j , $1 \leq j \leq k$, and any $1 \leq m \leq k$.

定理 1.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E(\hat{f}_{a_1 \dots a_k}(x_1, \dots, x_{k-1})) = f_{a_1 \dots a_k}(x_1, \dots, x_{k-1}).$$

定理 2.

$$\begin{aligned} & \lim_{T \rightarrow \infty} B_T^{k-1} \cdot T \operatorname{Var}(\hat{f}_{a_1 \dots a_k}(x_1, \dots, x_{k-1})) \\ &= \sum_P \int \dots \int K(y_1, \dots, y_k) K(y_{P(1)}, \dots, y_{P(k)}) H(y_1, \dots, y_k) dy_1 \dots dy_k \\ & \times \prod_{j=1}^k f_{a_j a_{P(j)}}(x_j), \quad (x_1 + \dots + x_k = 0), \end{aligned}$$

ここで P は $(1, \dots, k)$ のすべての permutation を意味す。

$f_{a_j a_{P(j)}}$ は generalized spectrum of order 2.

を表す。

定理 3.

$$(B_T^{k-1} T)^{1/2} \left\{ \hat{f}_{a_1 \dots a_{k-1}}(x_1, \dots, x_{k-1}) - E \hat{f}_{a_1 \dots a_{k-1}}(x_1, \dots, x_{k-1}) \right\}$$

は漸近的に平均 0 で分散は定理 2 で与えられる正規分布に従う。

結論 通常の及次の stationary process に対しては定理 1-3 の結果は, Brillinger-Rosenblatt [1] に reduce される。また dyadic stationary process of order k に対しては, $T = 2^n$, $B_T = 2^{-h(T)}$ の型にとることによって $\hat{f}_{a_1 \dots a_k}$ に対する定理 1-3 の結果を得る: ただし仮定 (2.1) は $\|u_j\|_T \equiv 0$, for $T = 2^n$ であるので自動的に満たされる。

3. Dyadic Stationary Process の AR 表現と MA 表現

Dyadic stationary な有限 AR process は有限 MA 表現が可能であることは, 永井(1976) で報告されているが, 二つは explicit に次の形で表わせることがわかる。

有限 AR dyadic stationary process, $\sum_{k=0}^p a_k X(n+k) = u(n)$, $u(n) \sim i.i.d. (0, \sigma^2)$. ($p = 2^m - 1$ の型とする) において,

$$a_0 + a_1 W(1, x) + \dots + a_p W(p, x) \neq 0, \text{ a.e. } x \in G,$$

であるとき 二の process $X(n)$ は 正則条件をみたすと言うことにする。

命題1.

$$\det \left\{ \begin{matrix} a_{i+j} \\ i,j=0,\dots,p \end{matrix} \right\} = \prod_{j=0}^p \left(\sum_{k=0}^p a_k W(k, x_j) \right)$$

$$= \prod_{j=0}^p X_k = \frac{k}{p+1}, \quad k=0,\dots,p.$$

よって Walsh 函数の性質より、

$$\text{正則条件} \Leftrightarrow \det \{ a_{i+j} \} \neq 0$$

を得る。

命題2. 有限 AR dyadic stationary process $X(n)$ は、正則条件のもとで $X(n) = \sum_{k=0}^p b_k u(n+k)$ と表わせ3。

ただし (b_0, \dots, b_p) は

$$\left(\begin{array}{c} \vdots \\ \cdots \\ a_{i+j} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} b_0 \\ \vdots \\ b_p \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right),$$

の unique な解。

REFERENCES

- [1] BRILLINGER, D.R., and ROSENBLATT, M. (1967).

Asymptotic theory of estimates of k -th order spectra.

Advanced Seminar on Spectral Analysis of Time Series

(Harris, ed.). Wiley, New York. 153-188.

- [2] FINE, N.J. (1949). On the Walsh functions.

Trans. Am. Math. Soc. 65. 372-414.

- [3] HALMOS, P.R. (1950). Measure Theory.

D. Van. Nostrand Co., New York.

- [4] LEONOV, V.P., and SHIRYAEV, A.N. (1959). On a method of calculation of semi-invariant.

Theor. Prob. Appl. 4. 319-329.

- [5] MORETTIN, P.A. (1974). Walsh-Function analysis of certain class of time series. *Stochastic Processes and their Applications.*
2. 183-193.
- [6] NAGAI, T. (1976). Dyadic stationary processes and their spectral representations. *Bull. Math. Statist.* 17. (to appear).
- [7] PONTRJAGIN, L.S. (1939). *Topological Groups.*
Princeton Univ. Press.
- [8] ROSENBLATT, M., and VAN NESS, J.W. (1965).
Estimation of the bispectrum. *Ann. Math. Statist.* 36. 1120-1136.
- [9] RUDIN, W. (1962). *Fourier Analysis on Groups.*
Interscience Publishers. New York and London.
- [10] CHRESTENSON, H.E. (1955). A class of generalized Walsh functions, *Pacific J. Math.* 5. 17-31.
- [11] 永井武昭 (1976). Dyadic 定常過程のスペクトル表示と
その線形模型について. 日本数学会予稿集. (東工大).