数理解析研究所講究録
374巻 1980年 157-163



# Z-transforms と noetherian pairs

広島大 理学部 伊藤史朗

J. R. Matijevic は A が reduced ネーター環のとき $(A, A^g)$ がネーター pair となることを証明した([3])。又、最近 D. D. Anderson によって、一般のネーター環に対して $(A, A^g)$ がネーター pair となる1つの十分条件が得られた。ここではさらに一歩進んで、$(A, A^g)$ がネーター pair となる必要十分条件について考えてみたい。

注意 ネーター環 A に対し、$A^g = \{x \in Q(A) \mid x \in A$ 又は $\dim A/A:_A x = 0\}$ とおき、$A^g$ を A の global transform という。又、$A \subseteq B$ であって、A と B の中間の環が全てネーターであるとき、(A, B) はネーター pair であるという。

設定を少し一般化しておく。A をネーター環、Z を Spec(A) の部分集合で特殊化で閉じているものとする。さらに Z の元は全て regular prime ideal (即ち、A の非零因子を含む prime ideal) とする。$Ass_A(M) \subseteq Ass_A(A)$ となる A-加群

$M$に対し,

$$T(Z,M)=\{x\in M\otimes_A Q(A)\mid V(M:_A x)\subseteq Z\}$$

とおき，これを$M$の$Z$-transformと呼ぶことにする。（$A$のイデアル$I$を含む素イデアル全体の集合を$V(I)$で表わす。）$T(Z,A)$は$A$を含む$Q(A)$の部分環であって，$T(Z,M)$は自然に$T(Z,A)$-加群となっている。$Z$として$A$のregular極大イデアル全体の集合をとれば$T(Z,A)=A^g$である。

定理を述べる前に$Z$-transformsについていくつかの注意をしておく。$A$及び$Z$は上で用いたものと同じとする。$A$のイデアル$I$で$Ass_A(A/I)\subseteq Ass_A(A)$となるものを考える。$Z'=\{\mathfrak{z}/I\mid \mathfrak{z}\in Z,\ \mathfrak{z}\supseteq I\}$とおくと$Z'$に含まれる素イデアルは全て$B=A/I$の非零因子を含む素イデアルであるが，定義から容易に分るように$T(Z,B)=T(Z',B)$である。又，自然な環準同型$T(Z,A)\to T(Z,B)$が存在して，その$Kernel$は$T(Z,I)=T(Z,A)\cap I\cdot Q(A)$となっている。

<u>定理</u>　$A$をネーター環，$Z$を$Spec(A)$の部分集合で特殊化で閉じているものとする。さらに$Z$に含まれる素イデアルは全てregularであるとする。このとき次の条件(1)(2)は同値である。

(1)　$(A,T(Z,A)$はネーターpair

(2)　(a) 任意の$\mathfrak{z}\in Ass_A(A)$について$(A/\mathfrak{z},T(Z,A/\mathfrak{z}))$は

ネーター pair であって，さらに

(b) $Ass_A(A)$ の元 $\mathfrak{z}$ で $A_{\mathfrak{z}}$ が reduced でないものについては，$T(Z, A/\mathfrak{z})$ は有限生成 $A/\mathfrak{z}$-加群。

もし任意の $\mathfrak{z} \in Ass_A(A)$ に対し $A_{\mathfrak{z}}$ が reduced でないなら，上の(1)(2)は次の(3)と同値。

(3) $T(Z, A)$ は有限生成 $A$-加群。

もし任意の $\mathfrak{z} \in Spec(A)$ に対し $(A/\mathfrak{z})'$ ($= A/\mathfrak{z}$ の $Q(A/\mathfrak{z})$ における整閉包) が有限生成 $A/\mathfrak{z}$-加群であれば上の(1)(2)は次の(4)と同値。

(4) (a) 任意の $\mathfrak{z} \in Ass_A(A)$ について $(A/\mathfrak{z}, T(Z, A/\mathfrak{z}))$ はネーター pair であって，さらに

(b) $Ass_A(A)$ の元 $\mathfrak{z}$ で $A_{\mathfrak{z}}$ が reduced でないものについて，$(A/\mathfrak{z})'$ の高さ 1 の極大イデアル $\mathfrak{m}$ で $\mathfrak{m} \cap A/\mathfrak{z} \in Z$ となるものは存在しない。

定理の証明には次の 4 つの補題が必要である。証明は全て容易であるから省略する。補題 1, 2, 3 については EGA IV (5.11) を参考にせよ。

補題 1. $A$ をネーター環，$\{\mathfrak{z}_1, \cdots, \mathfrak{z}_r\}$ を $A$ の極小素イデアル $\mathfrak{z}$ で $A_{\mathfrak{z}}$ が reduced とならないもの全体のなす集合とする。このとき次の(1)(2)が成立する。

(1) Aの巾零イデアルからなる列 $M_n \supset \cdots \supset M_0 = 0$ で次の性質をもつものが存在する。

(a) 各 $j$ $(0 \leq j < n)$ に対し素イデアル $\mathfrak{z}_i$ $(1 \leq i \leq r)$ が存在して，$\mathfrak{z}_i M_{j+1} \subseteq M_j$ かつ $M_{j+1}/M_j$ は $A/\mathfrak{z}_i$ のイデアルにA-加群として同型。

(b) $\mathrm{Ass}_A(A/M_j) = \mathrm{Ass}_A(A)$ $j = 0, \cdots, n$。

(c) Aの任意の極小素イデアル $\mathfrak{z}$ に対し，$(A/M_n)_{\mathfrak{z}}$ は reduced。

(2) 各 $\mathfrak{z}_i$ $(1 \leq i \leq r)$ に対し，Aの巾零イデアル $N_i (\neq 0)$ が存在して，$\mathrm{Ass}_A(A/N_i) = \mathrm{Ass}_A(A)$，$\mathfrak{z}_i N_i = 0$ かつ $N_i$ は $A/\mathfrak{z}_i$ のイデアルにA-加群として同型。

補題 2. Aをネーター環で，Zは定理のそれと同じものとする。$\mathfrak{z}$ をAの極小素イデアルで $A_{\mathfrak{z}}$ が reduced でないものとすると補題1より，Aの巾零イデアル $N (\neq 0)$ が存在して $\mathrm{Ass}_A(A/N) = \mathrm{Ass}_A(A)$，$\mathfrak{z}N = 0$ かつ $N$ は $A/\mathfrak{z}$ のイデアルにA-加群として同型である。このとき $T(Z, N)$ は $T(Z, A/\mathfrak{z})$ のイデアルに $T(Z, A)$-加群として同型である。

補題 3. Aをネーター整域で $A'$ (= Aの $Q(A)$ における整閉包) はA-加群として有限生成とする。Zは定理のそれと同

じものとする。このとき次の(1)(2)は同値である。

(1) $T(Z,A)$ は有限生成 $A$-加群。

(2) $P$ を $A'$ の素イデアルで $P\cap A\in Z$ とすると $htP\geqq 2$。

補題4. $A\subseteq B\subseteq C$ を整域で同じ商体をもつとする。もし $(A,B)$ がネーター pair で $C$ が有限生成 $B$-加群であれば、$(A,C)$ もネーター pair である。

さて、定理の証明は次のようにする。

まず、$A$ のイデアル $(0)$ の準素イデアル分解 $(0)=\mathfrak{q}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_m$ を考える。$Min(A)=\{\sqrt{\mathfrak{q}_1},\cdots,\sqrt{\mathfrak{q}_s}\}$ としてよい。$I=\mathfrak{q}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_s$, $J=T(Z,A)\cap IQ(A)$ とおく。$J$ は準同型 $T(Z,A)\longrightarrow T(Z,A/I)$ の kernel でもある。最初に、条件(1)は次の(2′)と同値であることを証明しよう。

(2′) $J$ は有限生成 $A$-加群で、$\mathfrak{z}\in Ass_A(A)$ であれば $(A/\mathfrak{z},T(Z,A/\mathfrak{z}))$ はネーター pair。さらに $\mathfrak{z}$ が $A$ の極小素イデアルで $A_{\mathfrak{z}}$ が reduced でなければ $T(Z,A/\mathfrak{z})$ は有限生成 $A$-加群。

(1)⇒(2′): $\mathfrak{z}\in Ass_A(A)$ とすると $A/\mathfrak{z}$ は $A$ のイデアルに同型である。従って $T(Z,A/\mathfrak{z})$ は $T(Z,A)$ のイデアルに同型。これより自然な準同型 $\varphi: T(Z,A)\longrightarrow T(Z,A/\mathfrak{z})$ は有限。故に(1)の

条件及び補題4より $(A/\mathfrak{z}, T(Z, A/\mathfrak{z}))$ はネーター pair。次に $(A, T(Z,A))$ がネーター pair であることから $A[J]$ はネーター環であって $J$ は $A[J]$ の中零イデアルである。よって適当に $x_1, \cdots, x_\ell \in J$ を選べば $J = \sum A[J]x_i = \sum Ax_i + J \cdot \sum Ax_i$。これより $J$ は有限生成 $A$-加群。さて，$\mathfrak{z}$ を $A$ の極小素イデアルで $A_\mathfrak{z}$ は reduced でないとする。補題1より，$A$ の中零イデアル $K(\neq 0)$ が存在して，$\mathrm{Ass}_A(A/K) = \mathrm{Ass}_A(A)$，$\mathfrak{z}K = 0$，$K$ は $A_\mathfrak{z}$ のイデアルに同型。$K' = T(Z,A) \cap KQ(A)\ (= T(Z,K))$ とおくと，補題2より $K'$ は $T(Z, A/\mathfrak{z})$ のイデアルに同型である。$J$ と同じく $K'$ も又 $A$-加群として有限生成。従って $T(Z, A/\mathfrak{z})$ は $A$-加群として有限生成となる。

(2′)⇒(1)：$A/\mathfrak{a} \subseteq T(Z,A)/J \subseteq T(Z, A/\mathfrak{a})$ となることは明らかであろう。$J$ が有限生成 $A$-加群，かつ $T(Z,A)$ の中零イデアルであることから $(A/\mathfrak{a}, T(Z, A/\mathfrak{a}))$ がネーター pair であれば $(A, T(Z,A))$ もネーター pair であることが分る。よって $(A/\mathfrak{a}, T(Z, A/\mathfrak{a}))$ がネーター pair であることを示せばよい。従って最初から $\mathrm{Min}(A) = \mathrm{Ass}_A(A)$ としてよい。$A_{red}$ は $A/\mathfrak{z}_1 \times \cdots \times A/\mathfrak{z}_s$ の，$T(Z, A_{red})$ は $T(Z, A/\mathfrak{z}_1) \times \cdots \times T(Z, A/\mathfrak{z}_s)$ の部分環と考えられる（ここで $\sqrt{\mathfrak{a}_i} = \mathfrak{z}_i \quad i = 1, \cdots, s$）。今 $(A/\mathfrak{z}_i, T(Z, A/\mathfrak{z}_i))$ $(i = 1, \cdots, s)$ はネーター pair であるから $(A_{red}, T(Z, A_{red}))$ も又ネーター pair となる。ここで補題1 (1) の中零イデアルの

列 $M_n \supset \cdots \supset M_0 = 0$ を考える。今証明したことより $(A/M_n, T(Z, A/M_n))$ はネーター pair である。次に $n \geq 1$ とし、$(A/M_1, T(Z, A/M_1))$ はネーター pair であると仮定しよう。$N = T(Z, A) \cap M_1 Q(A)$ $(= T(Z, M_1))$ とおく。A の極小素イデアル $\mathfrak{p}$ を、$\mathfrak{p} M_1 = 0$, $M_1$ は $A/\mathfrak{p}$ のイデアルに同型となるようにとる。補題2より N は $T(Z, A/\mathfrak{p})$ のイデアルに同型であるから N は有限生成 A-加群である。又、N は $T(Z, A)$ の中間イデアルでもある。この事実と $(A/M_1, T(Z, A/M_1))$ がネーター pair であるとの仮定より $(A, T(Z, A))$ がネーター pair となることが容易に示される。

参考文献

[1] D.D. Anderson, Global transforms and noetherian pairs, Hiroshima Math. J. 9 (1979)

[2] A. Grothendieck., Elements de Geometrie Algebrique IV Pubi. Math. IHES. 28 (1966)

[3] J.R. Matijevic, Maximal ideal transforms of noetherian rings, Proc. Amer. Math. Soc. 54 (1976)

[4] A. Wadsworth, Pairs of domains where all intermediate domains are noetherian, Trans. AMS 195 (1974)