

既約な概均質ベクトル空間の 分類について

東大 理 木村達雄

§1. 序

既約な概均質ベクトル空間の分類は 10 年程前に佐藤幹夫先生によってはじめられて かなりの結果が得られ いくつかの(有限個)未決定のものを残すのみとなった。

その後 1970 年に新谷卓郎先生によって スピン群 $\text{Spin}(n)$ ($n=11, 12, 14$) と scalar 倍の合成が その(半)スピン表現の表現空間に概均質に作用している事が 証明され、翌 71 年には $n=13$ のとき 概均質にならない事が示された。

結局、未決定の空間としてスピン表現が関係するもの 5つ(スピン型とよぶ)、例外群が関係するもの 6つ(例外型とよぶ。そのうちの二つは色々な事情から概均質に直いないと思われていた)が残っていたが 1972 年 3 月にスピン型、同年 5 月に例外型の空間がすべて決定し、これによって既約な場合の概均質ベクトル空間の分類が完成した。

定義 $V \otimes \mathbb{C}$ ($=$ 複素数体) 上有限次元のベクトル空間とし
 $G \subset GL(V)$ を \mathbb{C} 上定義された連結線型代数群とする。 G の V
 への作用を $g \cdot x$ ($g \in G$, $x \in V$) と書き, $x \in V$ における G の isotropy
 subgroup を G_x と記す, : $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$
 $\dim G_x = \dim G - \dim V$ なる $x \in V$ が存在するとき対 (G, V) を
概均質ベクトル空間 (Prehomogeneous vector space) という。これは
 V の algebraic set S があって G が $V - S$ に homogeneous に作用し
 ている事と同値である。このとき $S = \{x \in V \mid \dim G_x > \dim G - \dim V\}$
 更に V が G -module として既約であるとき (G, V) を 既約な
概均質ベクトル空間 という。

我々の目標は「既約な概均質ベクトル空間」をすべて求める
 事である。

さて一般に概均質ベクトル空間 (G, V) が一つ与えられると
 Grassmann構成(裏返し変換ともい)によって無限に新しい概均
 質ベクトル空間を得る事ができる。(裏返し変換については P. 6 を
 参照) 裏返し変換によってより次元の小さい概均質ベクト
 ル空間に帰着できないとき, その概均質ベクトル空間は基本的
 であるとい。但し $G; \wedge^n$ 半单純線型代数群, $V(n)$ をその忠実
 な n 次元既約表現空間とするとき $(G \times GL(n), V(n) \otimes \wedge^n)$ は G の
 ゼロ表現から得られた概均質ベクトル空間であるが便宜上これ
 も基本的概均質ベクトル空間と考える。但し $\otimes =$ 恒等表現

以下 $\boxed{\text{作用する群}}$ // $\boxed{\begin{array}{l} \text{genericな表における} \\ \text{isotropy subgroupの} \\ \text{連結成分} \end{array}}$ と記す事にする。

既約な概均質ベクトル空間が正則 (= regular) とは generic な表における isotropy subgroup が reductive な事である。

概均質ベクトル空間の理論については [1] を参照のこと。

基本的な既約概均質ベクトル空間は 正則なものでは 5 つの系列とそれに属さない 24 個の空間、正則でないものでは 5 つの系列とそれに属さない 1 つの空間がある。

5

① 基本的既約概均質ベクトル空間

I) regular (正則) の場合

① $G \times GL(n) / \begin{matrix} G \\ V(n) \otimes \square \end{matrix}$ 但し G は任意の半单純型代数群、 $V(n)$ はその忠実な n 次元既約表現空間

② $GL(n) / \begin{matrix} \square \\ O(n) \end{matrix}$ ($n \geq 2$) 但し \square は Young diagram
(例えば Weyl: Classical groups 参照) を表す
以下でも同様である。

③ $GL(2n) / \begin{matrix} \square \\ Sp(n) \end{matrix}$ ($n \geq 2$)

④ $O(m) \times GL(n) / \begin{matrix} \square \otimes \square \\ O(n) \times O(m-n)$ 但し $m > n \geq 1$, $m < 2n$
のとき、及び $m=2, 4$, $n=1$ の
ときは更に $m=3, 6$ の場合も
省いてよい。

⑤ $Sp(m) \times GL(2n) / \begin{matrix} \square \otimes \square \\ Sp(n) \times Sp(m-n)$, $m > n \geq 1$
($m < 2n$ のとき省いて
よい)

以上の5つの系列に属さないものとして

1) $GL(2)/\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix}_1$ (isotropy subgroupは位数18の)
有限群である。

2) $GL(6)/\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix}_{SL(3)\times SL(3)}$

3) $GL(7)/\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix}_{(G_2)}$

4) $GL(8)/\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix}_{SL(3)}$

5) $Sp(3)/\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix}_{SL(3)}$

6) $GO(7)/\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix}_{(G_2)}$ (以下 $O(n)$ は正確には $Spin(n)$ だが
スピン表現(8次) いつも断めろない。)

7) $GO(9)/\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix}_{O(7)}$
スピン表現(16次)

8) $GO(11)/\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix}_{SL(5)}$
スピン表現(32次)

9) $GO(12)/\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix}_{SL(6)}$
半スピン表現(32次)

10) $GO(14)/\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix}_{(G_2)\times(G_2)}$
半スピン表現(64次)

11) $GL(1)\times(G_2)/\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix}_{SL(3)}$
1次表現

12) $GL(1)\times E_6/\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix}_{F_4}$
27次表現

- 13) $GL(1) \times E_7 / E_6$
56次表現
- 14) $SL(3) \times GL(2) / \begin{matrix} \square \\ \otimes \\ \square \end{matrix}_1$ (isotropy subgroup は 位数 144 の有限群)
- 15) $SL(5) \times GL(3) / SL(2)$
 $\begin{matrix} \square \\ \otimes \\ \square \end{matrix}$
- 16) $SL(5) \times GL(4) / \begin{matrix} \square \\ \otimes \\ \square \end{matrix}_1$
- 17) $SL(6) \times GL(2) / SL(2) \times SL(2) \times SL(2)$
 $\begin{matrix} \square \\ \otimes \\ \square \end{matrix}$
- 18) $O(7) \times GL(2) / SL(3) \times O(2)$
スピニ表现 $\otimes \square$ (8次)
- 19) $O(7) \times GL(3) / SL(2) \times O(3)$
スピニ表现 $\otimes \square$ (8次)
- 20) $O(10) \times GL(2) / (G_2) \times SL(2)$
半スピニ表现 $\otimes \square$ (16次)
- 21) $O(10) \times GL(3) / SL(2) \times O(3)$
半スピニ表现 $\otimes \square$ (16次)
- 22) $(G_2) \times GL(2) / GL(2)$
7次表現 $\otimes \square$
- 23) $E_6 \times GL(2) / O(8)$
27次表現 $\otimes \square$
- 24) $SL(3) \times SL(3) \times GL(2) / GL(1) \times GL(1)$
 $\square \otimes \square \otimes \square$

II) regularでない場合

$$1) \quad GL(2n+1) / \begin{array}{|c|c|} \hline S_p(n) & * \\ \hline c & * \\ \hline \end{array} \quad (n \geq 2)$$

$$2) \quad S_p(m) \times GL(2n+1) / \begin{array}{|c|c|} \hline \text{口} \otimes \text{口} & (\text{not reductive}) \\ \hline \end{array} \quad m > n \geq 0, \text{ 但し } m < 2n+1 \text{ のときは省いて可}$$

$$3) \quad G \times GL(m) / \begin{array}{|c|c|} \hline G & * \\ \hline V(n) \otimes \text{口} & \\ \hline 0 & * \\ \hline \end{array} \quad \text{但し } G \text{ は半单純型代数群}, \\ V(n) \text{ はその } n \text{ 次元忠実既約表現空間} \\ m > n \geq 0 \text{ とする.}$$

注). $GL(m)$ の恒等表現は 3) に帰着する事に注意.

$$4) \quad S_p(n) \times GO(3) / \begin{array}{|c|c|} \hline \text{口} \otimes \text{口} & (\text{not reductive}) \\ \hline \end{array} \quad 5) \quad SL(2n+1) \times GL(2) / \begin{array}{|c|c|} \hline \text{口} \otimes \text{口} & \\ \hline \end{array}$$

$$6) \quad GO(10) / \begin{array}{|c|c|} \hline (\text{not reductive}) & \\ \hline \text{半スピン表現} & \\ \hline (16次) & \\ \hline \end{array} \quad (n \geq 2) //$$

さて 裏返し変換について述べよう。群 G の忠実既約表現空間を V , $\dim V = m$ とする。 $GL(n)$ の恒等表現の表現空間を $V(n)$ と記す。 $m \leq n$ ならば $(G \times GL(n), V \otimes V(n))$ は常に概均質 $\vee m \geq n$ とする。 V の n 次元部分空間全体のなす Grassmann 多様体を $M_n(V)$ と書くことにすれば、これは自然な方法で $M_{m-n}(V^*)$ と同一視できる。このとき次の事が成り立つ。

$(G \times GL(n), V \otimes V(n))$ が概均質 \leftrightarrow G が $M_n(V)$ に概均質に作用

$(G \times GL(m-n), V^* \otimes V(m-n))$ が概均質 \leftrightarrow G が $M_{m-n}(V^*)$ に概均質に作用

しかも、この二つの空間の generic pt. における isotropy subgroup

は一致する。さて概均質ベクトル空間 (G, V) が与えられたとき G を $G \times GL(1)$, V を $V \otimes V(1)$ と考えて裏返し変換を行なうと $(G \times GL(n-1), V^* \otimes V(n-1))$ なる概均質ベクトル空間が得られる。但し $n = \dim V$ 。これをくりかえす事によて新しい空間がいくらでも得られる。

佐藤幹夫先生によって行なわれた分類についての方針と結果を簡単に紹介する。(詳しくは[2]をみよ。)

Cartanの定理: V が代数閉体 K 上のベクトル空間で \mathfrak{g} を $g\ell(V)$ の部分リー環とする。 V が \mathfrak{g} -既約ならば $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{l}$, 但し \mathfrak{g}_1 は \mathfrak{g} の半单纯イデアル, \mathfrak{l} は \mathfrak{g} の中心で $\dim \mathfrak{l} = 0$, or $\dim \mathfrak{l} = 1$ である。 $\dim \mathfrak{l} = 1$ の場合は \mathfrak{l} は $\lambda \cdot 1 (\lambda \in K)$ なる形の V の一次変換と一致する。但し 1 は V の恒等変換を表す。これによて既約な概均質ベクトル空間 (G, V) を求めるために (modulo isogeny で考えて) 次のように仮定してよい。

$$G = GL(1) \times G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_k, \\ V = V(d_1) \otimes \cdots \otimes V(d_k) \quad d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_k$$

但し G_1, \dots, G_k は単純群, $V(d_i)$ は群 G_i の忠実な d_i 次既約表現空間。以下 $\dim G_i = g_i (i=1, \dots, k)$ と書く。

さて (G, V) が概均質ならば $\dim G_i = \dim G - \dim V \geq 0$ ゆえ $\dim G \geq \dim V$, すなまち $1 + g_1 + g_2 + \cdots + g_k \geq d_1 d_2 \cdots d_k$ でなければならぬ。

このとき

Prop 1. (Sato) (G, V) が概均質で、かつ $2^{k-2}d_1 - 2 \geq d_2$

$$\text{ならば } 1 + g_1 \geq 2^{k-1}d_1 - 3(k-1)$$

Cor. $(GL(1) \times G_1 \times \cdots \times G_k, V(d_1) \otimes \cdots \otimes V(d_k))$, $k \geq k_0 \geq 3$ なら

$$\text{概均質ならば } 1 + g_1 \geq 2^{k-1}d_1 - 3(k_0-1)$$

Proof) Prop 1 を認めれば Cor は自明であるから Prop 1 のみ証明する。

その為にまず次の lemma を証明する。

lemma; $x_1^2 + \cdots + x_n^2 - cx_1 \cdot x_n \leq n\alpha^2 - c\alpha^n$, 但し

$$\alpha \leq x_\nu \leq c\alpha^{n-1} - \alpha, (\nu = 1, \dots, n)$$
 とする。

lemma の証明) 各変数について 2 次式で 2 次の項は正ゆえ
最大値は区間の端点でとる。 $\ell = c\alpha^{n-1} - \alpha$ とおく。 ($\alpha \leq \ell$)

x_1, \dots, x_n のうち μ 個が α , 残りの $(n-\mu)$ 個が ℓ とすれば 与式
の左辺の値は $M_\mu = \mu\alpha^2 + (n-\mu)\ell^2 - c\alpha^\mu \ell^{n-\mu}$ であるから 特に
 $M_n = n\alpha^2 - c\alpha^n$ である。従って

$$\frac{M_n - M_\mu}{\ell - \alpha} = -(n-\mu)(\ell + \alpha) + c\alpha^\mu(\ell^{n-\mu-1} + \ell^{n-\mu-2}\alpha + \cdots + \alpha^{n-\mu-1})$$

$$\geq -(n-\mu)(\ell + \alpha) + (n-\mu)c\alpha^{n-1} = 0 \quad \therefore M_n \geq M_\mu$$

よって $M_n = n\alpha^2 - c\alpha^n$ が 最大値である。 / lem の証)

さて Prop 1 の証明にもどる。 (G, V) が概均質ならば

$$1 + g_1 + \cdots + g_k \geq d_1 - d_k$$
 であるが $G_i \subset SL(d_i)$ ゆえ $d_i^2 - 1 \geq g_i$

$$(i=2, \dots, k) \quad \therefore 1 + g_1 \geq (k-1) - (d_2^2 + \cdots + d_k^2 - d_1 d_2 \cdots d_k) *$$

ここで lemma より ($x_1 = d_2, \dots, x_n = d_k, n = (k-1), c = d_1, a = 2$
 とおけば) $d_2^2 + \dots + d_k^2 - d_1 d_2 \cdots d_k \leq (k-1) 2^2 - d_1 \cdot 2^{k-1}$ 但し
 $2 \leq d_i \leq 2^{k-2} d_1 - 2$ さて
 $\star \geq (k-1) - (k-1) 2^2 + d_1 \cdot 2^{k-1} = 2^{k-1} d_1 - 3(k-1)$ // Prop. 1.

次に

Prop 2. G ; 単純群, $g = \dim G$, $d = G$ の既約表現の次数
 とするとき, $G = SL(n)$, $d = n$ (恒等表現) の場合を除けば
 $g \leq \frac{1}{2} d(d+1)$ である。

Proof) $G = SL(n)$ ($n \geq 2$) のとき 恒等表現以外では

$$d \geq \begin{cases} \frac{1}{2}n(n-1) & (n \geq 4) \\ \frac{1}{2}n(n+1) & (n=2,3) \end{cases} \quad \text{従って } d \geq 2(n-1) \quad (n \geq 2)$$

$$n \geq 2 \rightarrow n+1 \leq 2n-1 \rightarrow (n-1)(2n-1) = \left(\frac{1}{2}d(d+1)\right)_{d=2(n-1)}$$

$$\geq (n+1)(n-1) = g \quad \therefore SL(n) \text{ の場合は O.K.}$$

$G = Sp(n)$ ($n \geq 1$) のとき $g = n(2n+1)$, $d \geq 2n$ ゆえ

$$\frac{1}{2}d(d+1) \geq \left(\frac{1}{2}d(d+1)\right)_{d=2n} = n(2n+1) = g$$

$\therefore Sp(n)$ の場合は O.K.

$G = SO(n)$ ($n \geq 7$) のとき $g = \frac{1}{2}n(n-1)$, $d \geq n$ で 証明すべき式は

$$\frac{1}{2}n(n-1) \leq \frac{1}{2}n(n+1) \text{ で自明. } \therefore SO(n) \text{ } (n \geq 7) \text{ のとき O.K.}$$

$G = \text{例外群}$ の場合, G_2 のとき $g = 14$, $d \geq 7$, F_4 のとき $g = 52$,

$d \geq 26$, E_6 のとき $g = 78$, $d \geq 27$, E_7 のとき $g = 133$, $d \geq 56$, E_8 の

とき $g = 248$, $d \geq 248$ ゆえ すべて O.K. // Q.E.D.

P.7において G_1 として順次 $SL(n)$, $S_p(n)$, $SO(n)$ (または $Spin(n)$), G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 をとて Prop 1 とその Cor. および Prop 2 を使って 有限個の空間 (または系列) に帰着させるのである。オニ段階として、そこで得られた空間が実際に概均質になるかどうかを各自について考察するのである。

Prop 1 や Prop 2 が実際にはどのように使われているかをいくつかの例 ($\S 2, \S 3$ に関係のあるところ) によって示そう。

例えば $G_1 = SO(n)$ (または $Spin(n)$) $n \geq 7$ の場合でしか G_1 の表現が恒等表現と異なる場合を考えよう。このとき

$$\boxed{\text{lemma: } d_{\lambda} \geq \frac{1}{2}n(n-1) \quad (n \geq 15), \quad d_{\lambda} \geq 2^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil} \quad (14 \geq n \geq 7)}$$

\therefore 基本的な既約表現の次数は

$$d(\lambda_v) = \begin{cases} \binom{n}{v}, & v=1, 2, \dots, \lceil \frac{n-3}{2} \rceil \\ 2^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil}, & v = \begin{cases} \frac{n-1}{2} & (n=\text{odd}) \\ \frac{n}{2}-1, \frac{n}{2} & (n=\text{even}) \end{cases} \end{cases}$$

であり $d(\lambda_2) = \frac{1}{2}n(n-1)$ ($n \geq 7$) に関して

$$2^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil} < \frac{1}{2}n(n-1) \text{ if } 3 \leq n \leq 14, \quad 2^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil} > \frac{1}{2}n(n-1) \text{ if } n \geq 15$$

であり、かつ $d(2\lambda_1) = \frac{1}{2}(n-1)(n+2) > d(\lambda_2) = \frac{1}{2}(n-1)n$

\Rightarrow lemma が証明された。/

さて $n=8$ のときは リー環の Dynkin diagram が  であるから G_1 の半スピン表現は G_1 内の自己同型で恒等表現に帰着できるから省いてよい。さて $k \geq 3$ のとき Prop 1 の Cor. によ

→ $1 + \frac{1}{2}n(n-1) \geq 2^2 \cdot \frac{1}{2}n(n-1) - 32$.これを整理して
 $n(n-1) \leq \frac{14}{3}$ でこれは $n \geq 15$ で解なし。 (半)スピン表現に
ついては ($7 \leq n \leq 14, n \neq 8$) $1 + \frac{1}{2}n(n-1) \geq 2^2 \cdot d_1 - 32$
より $d_1 \leq \frac{1}{4}(7 + \frac{1}{2}n(n-1))$ * .

| n | 7 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|-----------------|---|----|----|----|----|----|----|
| より $d_1 \leq$ | 7 | 10 | 13 | 15 | 18 | 21 | 24 |
| (半)スピン表現の d_1 | 8 | 16 | 16 | 32 | 32 | 64 | 64 |

ゆえ解なし。

よって $k=1$, または $k=2$ である。

$k=2$ の場合 Prop.1 により $2 \leq d_2 \leq d_1 - 2$ ならば

$$1 + \frac{1}{2}n(n-1) \geq 2d_1 - 3 \geq 2 \cdot \frac{1}{2}n(n-1) - 3 \quad \therefore n(n-1) \leq 8$$

これは $n \geq 15$ で解なし。 (半)スピン表現 ($7 \leq n \leq 14, n \neq 8$) に

| n | 7 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|------------|----|----|----|----|----|----|----|
| $d_1 \leq$ | 12 | 20 | 24 | 29 | 35 | 41 | 47 |
| d_1 | 8 | 16 | 16 | X | 32 | X | X |

即ち

$n=7, 9$ (スピン表現) $n=10, 12$ (半スピン表現) が条件をみたす。

このとき

$$\begin{cases} n=7; \quad 1+21+g_2 \geq 8d_2, \quad 2 \leq d_2 \leq 7 \\ n=9; \quad 1+36+g_2 \geq 16d_2, \quad 2 \leq d_2 \leq 14 \\ n=10; \quad 1+45+g_2 \geq 16d_2, \quad 2 \leq d_2 \leq 14 \\ n=12; \quad 1+66+g_2 \geq 32d_2, \quad 2 \leq d_2 \leq 30 \end{cases}$$

まず $g_2 = d_2^2 - 1$ のとき、上記の d_2 に関する二次不等式を解けば (裏返し変換によって $d_2 \leq \frac{1}{2}d_1$ に限ってよい事に注意せよ)

$n=7$; $2 \leq d_2 \leq 4$ i.e. $O(7) \times GL(2)$, $O(7) \times GL(3)$, $O(7) \times GL(4)$
 スピン表現 \otimes 口 スピン表現 \otimes 口 スpin表現 \otimes 口

$n=9$; $d_2=2$ i.e. $O(9) \times GL(2)$
 スpin表現 \otimes 口

$n=10$; $2 \leq d_2 \leq 3$ i.e. $O(10) \times GL(2)$, $O(10) \times GL(3)$
 半スピン表現 \otimes 口 半スpin表現 \otimes 口

$n=12$; $d_2=2$ i.e. $O(12) \times GL(2)$
 半スpin表現 \otimes 口

$g_2 \neq d_2^2 - 1$ のとき Prop 2 により $g_2 \leq \frac{1}{2}d_2(d_2+1)$, ($d_2 \geq 3$) で

上記の結果から $n=7, 10$ の場合に限るが 再び不等式を解いて
 $n=7$ のとき $d_2=3, 4$ i.e. $O(7) \times GL(2)$, $O(7) \times GSp(2)$
 スpin表現 \otimes 口 半スpin表現 \otimes 口
 ($d_2=3$) ($d_2=4$)

$n=10$ のとき $d_2=3$, i.e. $O(10) \times GL(2)$
 半スpin表現 \otimes 口

次に $2 \leq d_2 = d_1$, または $d_2 = d_1 - 1$ のとき, $g_2 \neq d_2^2 - 1$ ならば
 Prop 2 によて $g_2 \leq \frac{1}{2}d_2(d_2+1)$, これを $1 + g_1 + g_2 \geq d_1 d_2$ に代入
 すれば $d_2 = d_1$ で $d_2 = d_1 - 1$ でもともに $1 + g_1 \geq \frac{1}{2}d_1(d_1-1)$.
 $g_1 = \frac{1}{2}n(n-1)$ やえ $2 + n(n-1) \geq d_1(d_1-1)$ $\therefore n \geq d_1$ すなまち
 $d_1 = n$ (恒等表現) でなければ ならないが, 現在の場合は 恒等表現
 以外の場合を考えているから不可。よって $g_2 = d_2^2 - 1$, よって

$O(n) \times GL(d_1)$ $O(n) \times GL(d_1-1)$ となるが 前者は P.3 の ①
 スpin表現 \otimes 口 半スpin表現 \otimes 口
 (d_1 次) (d_1 次)

(i.e. $O(n)$ のゼロ表現の裏返し変換) の特殊な場合, 後者は 裏返し変換に

より $k=1$ の場合に帰着する。

$k=1$ の場合 $d_1 \neq n$, $n \geq 7$ のとき $G_0(n)$ および

随伴表現

$G_0(n)$ ($7 \leq n \leq 14$, $n \neq 8$) である。

(半)スピン表現 随伴表現のときは概均質ではない。(P. 16)

結局 $G_1 = SO(n)$ (半) $Sp_m(n)$, 簡単の為 $O(n)$ と書く事は前に注意した。リ-環はすべて同じ), $n \geq 7$ の場合で, しかも G_1 の表現が恒等表現と異なる場合は, 次に挙げる空間に帰着する事がわかった, すなわち

$G_0(7)$, $G_0(9)$, $G_0(10)$, $G_0(11)$, $G_0(12)$, $G_0(13)$, $G_0(14)$
 スピニ表現 (8次) スピニ表現 (16次) 半スピニ表現 (16次) スピニ表現 (32次) 半スピニ表現 (32次) スピニ表現 (64次) 半スピニ表現 (64次)

$O(7) \times GL(2)$, $O(7) \times GL(2)$, $O(7) \times GL(3)$, $O(7) \times GL(4)$
 スピニ表現の口 スピニ表現の四 スピニ表現の口 スピニ表現の口

$O(7) \times GSp(2)$, $O(9) \times GL(2)$, $O(10) \times GL(2)$, $O(10) \times GL(2)$
 スピニ表現の口 スピニ表現の口 半スピニ表現の口 半スピニ表現の四

$O(10) \times GL(3)$, $O(12) \times GL(2)$
 半スピニ表現の口 半スピニ表現の口

次にこれ等の各々について実際には概均質ベクトル空間になっているか, どうかを判定しなければならないが, 空間の次元が高くなるとそれはかなり難しい。(例えば $G_0(14)$, $O(12) \times GL(2)$ などは半スピニ表現 (64次元である。))

$G_0(n)$ ($n=7, 9, 10$), $O(7) \times G_2 \times GL(1)$ (5つある)

(半)スピニ表現

スピニ表現のV(d.)

については 佐藤先生が, $G_0(n)$ ($n=11, 12, 13, 14$) については 新谷
 (半)スピニ表現

先生が解决了。残りは 1972年3月に解決。(木村・佐藤) それについては §2 に詳しく書いてある。

次に $G_1 = \text{例外群}$ の場合を述べよう。(これは §3 と関係がある。)

二番目の群 G_2 と例外群 G_2 (14 次元, rank 2) を区別する為, 後者を (G_2) と記す。 $k \geq 3$ のとき Prop 1 の Cor 1において $k_c = 3$ とおくと
 $1 + g_1 \geq 2^2 \cdot d_1 - 3 \cdot 2$ i.e. $g_1 \geq 4d_1 - 7$. しかるに

| | (G_i) | F_4 | E_6 | E_7 | E_8 |
|------------|---------|-------|-------|-------|-------|
| g_1 | 14 | 52 | 78 | 133 | 248 |
| $d_1 \geq$ | 7 | 26 | 27 | 56 | 248 |

ゆえ不成立。

従って $k=1$, または $k=2$ である。

$k=2$ のとき) $1 + g_1 + g_2 \geq d_1 d_2$, $d_1 \geq d_2 \geq 2$ であるが
 $d_1 \geq g_1 (\geq 14)$ ならば ($d_2 = d_1$, または $d_2 = d_1 - 1$) $\rightarrow G_2 = \text{SL}(d_2)$
 となる事を示す。(そのとき前者は P.3 の①, 後者は裏返し変換により $k=1$ へ帰着する.) $g_2 \leq d_2^2 - 1$, $g_1 \leq d_1$ より $1 + d_1 + (d_2^2 - 1) \geq d_1 d_2$
 より $d_2 \geq \frac{d_1 + \sqrt{d_1^2 - 4d_1}}{2}$, or $d_2 \leq \frac{d_1 - \sqrt{d_1^2 - 4d_1}}{2} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{d_1}}} < 2$
 $d_2 \geq 2$ より $d_2 \geq \frac{d_1 + \sqrt{d_1^2 - 4d_1}}{2}$

簡単な計算により $d_1 > 4$ ならば $\frac{d_1 + \sqrt{d_1^2 - 4d_1}}{2} > d_1 - 2$ 従って
 $(d_1 \geq 14 \text{ ゆえ}) d_1 \geq d_2 \geq d_1 - 1 \quad \therefore d_2 = d_1$ または $d_2 = d_1 - 1$.

さて $g_2 \neq d_2^2 - 1$ とするとき Prop 2 によると $g_2 \leq \frac{1}{2} d_2(d_2 + 1)$, まず
 $d_2 = d_1$ のとき $1 + d_1 + \frac{1}{2} d_1(d_1 + 1) \geq d_1^2$ i.e. $d_1(d_1 - 3) \leq 2$ であるが $d_1 \geq 14$ ゆえ不成立。 $d_2 = d_1 - 1$ のときも $d_1(d_1 - 3) \leq 2$ となり
 同様、よって $g_2 = d_2^2 - 1$, i.e. $G_2 = \text{SL}(d_2)$.

以上により $d_1 < g_1$ としてよい。とくに $G_1 = E_8$ の場合
 上記の表より概均質にならない事がわかる。

$G_1 = (G_2)$ の場合 $d_1 = 7, 14, \dots$ で $g_1 = 14$ は $d_1 = 7$ となる。

このとき $g_2 = d_2^2 - 1$ ($2 \leq d_2 \leq 7$) となる事を示す。 $g_2 \neq d_2^2 - 1$ なら

Prop 2により $g_2 \leq \frac{1}{2}d_2(d_2+1)$, ($3 \leq d_2 \leq 7$) これより $1+14+g_2 \geq 7d_2$

に代入して整理すると $d_2(13-d_2) \leq 30 \quad \therefore d_2 = 3$

$1+14+g_2 \geq 7 \times 3$ より $g_2 \geq 6$, $\frac{1}{2} \times 3 \times (3+1) \geq g_2$ より $6 \geq g_2$

$\therefore g_2 = 6$ 他方 $d_2 = 3$ のときは $g_2 = 3$ or 8 に限るから不成立。

$\therefore g_2 = d_2^2 - 1$, $G_2 = SL(d_2)$ 裏返し変換により $d_2 = 4, 5; 6, 7$ は

不要ゆえ $\boxed{(G_2) \times GL(2)}$, $\boxed{(G_2) \times GL(3)}$ に帰する。
7次表現の□

次に $G_1 = F_4, E_6, E_7$ (E_8 は不可 P.14) の場合 $\exists g_2 \neq d_2^2 - 1$ なら Prop 2より $g_2 \leq \frac{1}{2}d_2(d_2+1)$ ($d_2 \geq 3$) $\therefore 1+g_1 + \frac{1}{2}d_2(d_2+1) \geq d_1d_2$
 $\therefore 1+g_1 \geq \frac{1}{2}d_2(2d_1-1-d_2) \geq \frac{1}{2} \cdot 3(2d_1-1-3) = 3(d_1-2)$

$\therefore 1+g_1 \geq 3(d_1-2)$ これが成立するのは

右の表より E_6 に限る。 そのとき

$1+78 + \frac{1}{2}d_2(d_2+1) \geq 27d_2$, ($3 \leq d_2 \leq d_1 = 27$)

| | g_1 | d_2 |
|-------|-------|-------------|
| F_4 | 52 | 26, 52 |
| E_6 | 78 | 27, 78 |
| E_7 | 133 | 56, 133, .. |

$\therefore d_2 = 3$ 他方 $g_2 \leq \frac{1}{2}d_2(d_2+1) = 6$, $d_2 = 3$ より $g_2 = 3$ or 8

$\therefore g_2 = 3$ よって $\boxed{E_6 \times GL(2)}$,
27次表現の□

$g_2 = d_2^2 - 1$ のとき $1+g_1 + (d_2^2 - 1) \geq d_1d_2$ より $g_1 \geq d_2(d_1 - d_2)$

裏返し変換により $2 \leq d_2 \leq \frac{1}{2}d_1$ なる d_2 のみを考えれば十分。

($d_1 < g_1$ に注意) F_4, E_6, E_7 の各々について調べる。

$$G_1 = F_4 \text{ のとき) } \quad 52 \geq d_2(26-d_2), \quad 2 \leq d_2 \leq 13 \quad \therefore d_2 = 2$$

よって $F_4 \times GL(2)$
26次表現の口

$$G_1 = E_6 \text{ のとき) } \quad 78 \geq d_2(27-d_2), \quad 2 \leq d_2 \leq 13 \quad \therefore d_2 = 2, 3$$

よって $E_6 \times GL(2)$
27次表現の口, $E_6 \times GL(3)$
27次表現の口

$$G_1 = E_7 \text{ のとき) } \quad 133 \geq d_2(56-d_2), \quad 2 \leq d_2 \leq 28 \quad \therefore d_2 = 2$$

よって $E_7 \times GL(2)$
56次表現の口

$k=1$ の場合) 次の事が成り立つ

lemma. 単純群 G_1 のリー環を \mathfrak{g} とする。 G_1 の隨伴表現は

既約であるが $\text{rank } G_1 > 1$ ならば G_1 (の隨伴表現) と scalar
倍の合成は \mathfrak{g} に概均質に作用しない。

これは \mathfrak{g} の generic 点 (Cartan の意味の正則元) における
isotropy subgroup が G_1 の Cartan subgroup である事から明るかである。

例外群の rank は 2 以上ゆえ $k=1$ の場合は

| | | | |
|--------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| $(G_2) \times GL(1)$, 7次表現 | $F_4 \times GL(1)$, 26次表現 | $E_6 \times GL(1)$, 27次表現 | $E_7 \times GL(1)$, 56次表現 |
|--------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|

に限る事がわかった。

$(G_2) \times GL(n)$ ($n=1, 2, 3$) および $F_4 \times GL(1)$ は佐藤先生
 7 次表現の口 26 次表現

によりめかっていたが 他は 1972 年 5 月にすべて解決した。(木村)

それについては §3 を参照のこと。

§2. スピニ型既約概均質ベクトル空間について

この § の主な目標は 次の 5 つの空間 (P. 13 参照)

$$O(10) \times GL(2), O(9) \times GL(2), O(10) \times GL(3), O(10) \times GL(2), O(12) \times GL(2)$$

半スピン表現 \otimes 口 スピン表現 \otimes 口 半スピン表現の口 スpin表現の口 半スpin表現の口

が 概均質ベクトル空間か否かを 判定する事である。

そのためには リー環で 計算する。

スピン表現の一般論は [7] を参照して もらう事にして、ここで
は $O(10)$ の (i.e. Spin(10) の) リー環の 半スピン表現について具体的に、
必要な事のみを記す。

$O(10)$ の リー環を \mathfrak{o}_1 とし、その 半スピン表現の 表現空間を V_1 と
すれば $\dim V_1 = 16$ で その base は $1, e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, \dots, e_4 \wedge e_5,$
 $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4, \dots, e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_5$ である。 (なぜ この形かでてくるかは 一般論
が 必要なのでやめる。^{今は} 16 個あるという事のみが 本質的)

$$\mathfrak{o}_1 \ni X =$$

$$\begin{array}{|ccccc|ccccc|} \hline & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & 0 & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ \hline & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & -b_{12} & 0 & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & -b_{13} & -b_{23} & 0 & b_{34} & b_{35} \\ & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & -b_{14} & -b_{24} & -b_{34} & 0 & b_{45} \\ & a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & -b_{15} & -b_{25} & -b_{35} & -b_{45} & 0 \\ \hline & 0 & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & -a_{11} & -a_{21} & -a_{31} & -a_{41} & -a_{51} \\ & -c_{12} & 0 & c_{23} & c_{24} & c_{25} & -a_{12} & -a_{22} & -a_{32} & -a_{42} & -a_{52} \\ & -c_{13} & -c_{23} & 0 & c_{34} & c_{35} & -a_{13} & -a_{23} & -a_{33} & -a_{43} & -a_{53} \\ & -c_{14} & -c_{24} & -c_{34} & 0 & c_{45} & -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & -a_{44} & -a_{54} \\ & -c_{15} & -c_{25} & -c_{35} & -c_{45} & 0 & -a_{15} & -a_{25} & -a_{35} & -a_{45} & -a_{55} \\ \hline \end{array}$$

に対し

その 半スピン表現 (infinitesimal) は 次のような V_1 の 一次変換
である。それを $d\rho_1(X)$ と記す。

| | | |
|-----------------------|--|-------------------|
| 1 | $A_1 b_{12} b_{13} b_{14} b_{15} b_{23} b_{24} b_{25} b_{34} b_{35} b_{45}$ | 1 |
| $e_1 e_2$ | $-C_{12} A_2 a_{32} a_{42} a_{52} -a_{31} -a_{41} -a_{51} b_{34} b_{35} b_{45}$ | $e_1 e_2$ |
| $e_1 e_3$ | $-C_{13} a_{23} A_3 a_{43} a_{53} a_{21} -a_{41} -a_{51} -b_{24} -b_{25} b_{45}$ | $e_1 e_3$ |
| $e_1 e_4$ | $-C_{14} a_{24} a_{34} A_4 a_{54} a_{21} a_{31} -a_{51} b_{23} -b_{25} -b_{35}$ | $e_1 e_4$ |
| $e_1 e_5$ | $-C_{15} a_{25} a_{35} a_{45} A_5 a_{21} a_{31} a_{41} b_{23} b_{24} b_{34}$ | $e_1 e_5$ |
| $e_2 e_3$ | $-C_{23} -a_{13} a_{12} A_6 a_{43} a_{53} -a_{42} -a_{52} b_{14} b_{15} b_{45}$ | $e_2 e_3$ |
| $e_2 e_4$ | $-C_{24} -a_{14} a_{12} a_{34} A_7 a_{54} a_{32} -a_{52} -b_{13} b_{15} -b_{35}$ | $e_2 e_4$ |
| $e_2 e_5 \Rightarrow$ | $-C_{25} -a_{15} a_{12} a_{35} a_{45} A_8 a_{32} a_{42} -b_{13} -b_{14} b_{34}$ | $e_2 e_5$ |
| $e_3 e_4$ | $-C_{34} -a_{14} a_{13} -a_{64} a_{23} A_9 a_{54} -a_{53} b_{12} b_{15} b_{25}$ | $e_3 e_4$ |
| $e_3 e_5$ | $-C_{35} -a_{15} a_{13} -a_{25} a_{23} -a_{45} A_{10} a_{43} b_{12} -b_{16} -b_{24}$ | $e_3 e_5$ |
| $e_4 e_5$ | $-C_{45} -a_{15} a_{14} -a_{25} a_{24} -a_{35} a_{34} A_{11} b_{12} b_{13} b_{23}$ | $e_4 e_5$ |
| $e_1 e_2 e_3 e_4$ | $-C_{34} C_{24} -C_{23} -C_{14} C_{13} -C_{12} A_{12} a_{54} -a_{53} a_{52} -a_{51}$ | $e_1 e_2 e_3 e_4$ |
| $e_1 e_2 e_3 e_5$ | $-C_{35} C_{25} -C_{23} -C_{15} C_{13} -C_{12} a_{45} A_{13} a_{43} -a_{42} a_{41}$ | $e_1 e_2 e_3 e_5$ |
| $e_1 e_3 e_4 e_5$ | $-C_{45} C_{25} -C_{24} -C_{15} C_{14} -C_{12} -a_{35} a_{34} A_{14} a_{32} -a_{31}$ | $e_1 e_2 e_4 e_5$ |
| $e_2 e_3 e_4 e_5$ | $-C_{45} C_{35} -C_{34} -C_{15} C_{14} -C_{13} a_{25} -a_{24} a_{23} A_{15} a_{21}$ | $e_1 e_3 e_4 e_5$ |
| $e_2 e_3 e_4 e_6$ | $-C_{45} C_{35} -C_{34} -C_{25} C_{24} -C_{23} -a_{15} a_{14} -a_{13} a_{12} A_{16}$ | $e_2 e_3 e_4 e_5$ |

但し

$$\begin{aligned}
 A_1 &= -\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{2}, & A_2 &= \frac{a_1 + a_2 - a_3 - a_4 - a_5}{2}, & A_3 &= \frac{a_1 - a_2 + a_3 - a_4 - a_5}{2} \\
 A_4 &= \frac{a_1 - a_2 - a_3 + a_4 - a_5}{2}, & A_5 &= \frac{a_1 - a_2 - a_3 - a_4 + a_5}{2}, & A_6 &= \frac{-a_1 + a_2 + a_3 - a_4 - a_5}{2} \\
 A_7 &= \frac{-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5}{2}, & A_8 &= \frac{-a_1 + a_2 - a_3 - a_4 + a_5}{2}, & A_9 &= \frac{-a_1 - a_2 + a_3 + a_4 - a_5}{2} \\
 A_{10} &= \frac{-a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5}{2}, & A_{11} &= \frac{-a_1 - a_2 - a_3 + a_4 + a_5}{2}, & A_{12} &= \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - a_5}{2} \\
 A_{13} &= \frac{a_1 + a_2 + a_3 - a_4 + a_5}{2}, & A_{14} &= \frac{a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + a_5}{2}, & A_{15} &= \frac{a_1 - a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{2} \\
 A_{16} &= \frac{-a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{2} & \text{とおく。}
 \end{aligned}$$

次に $\mathcal{J}_2 = \text{gl}(2)$ ($= \text{GL}(2)$ の \mathbb{R} -環) の恒等表現の表現空間

を V_2 とする。 $\mathcal{J}_2 \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = X$ に対し $dP_2(X)$ は

dP_2

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} au+bv \\ cu+dv \end{pmatrix} \text{ は } V_2 \text{ の 1 次変換である。}$$

$G = O(10) \times GL(2)$ のリ-環 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ の $V = V_1 \otimes V_2$ における表現 $d\rho = d\rho_1 \oplus d\rho_2$ を考えよ。 $\mathfrak{g} \ni X \oplus \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \lambda \in V_1, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in V_2$ に付し $d\rho(X \oplus \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix})(\lambda \otimes \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}) = (d\rho_1(\lambda)\lambda) \otimes \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \lambda \otimes d\rho_2(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ である。 $V = V_1 \otimes V_2 \ni v$ における \mathfrak{g} の isotropy subalgebra \mathfrak{g}_v とは $\mathfrak{g}_v = \{X \in \mathfrak{g} \mid d\rho(X)v = 0\}$ の事である。

Prop 1. (KIMURA) $O(10) \times GL(2)$ は正則な概均質ベクトル空間
スピニ表现 \oplus

で generic な実における isotropy subgroup の連結成分は $(G_2) \times SL(2)$

Proof)

$$V \ni v = (1 + e_1 e_2 e_3 e_4) \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (e_1 e_5 + e_2 e_3 e_4 e_5) \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

における isotropy subalgebra を計算してみると

$$\begin{array}{|c c c c c|} \hline 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & C \\ \hline \alpha_1 & \lambda_1 & M_1 & M_2 & 0 \\ \hline \alpha_2 & \nu_1 & \lambda_2 & M_3 & 0 \\ \hline \alpha_3 & \nu_2 & \nu_3 & \lambda_3 & 0 \\ \hline b & 0 & 0 & 2a & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c c c c c|} \hline 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & -b \\ \hline -\alpha_1 & 0 & -\beta_3 & \beta_2 & 0 \\ \hline -\alpha_2 & \beta_3 & 0 & -\beta_1 & 0 \\ \hline -\alpha_3 & -\beta_2 & \beta_1 & 0 & 0 \\ \hline b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \oplus \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{|c c c c c|} \hline 0 & -\beta_1 & -\beta_2 & -\beta_3 & C \\ \hline \beta_1 & 0 & \alpha_3 & -\alpha_2 & 0 \\ \hline \beta_2 & -\alpha_3 & 0 & \alpha_1 & 0 \\ \hline \beta_3 & \alpha_2 & -\alpha_1 & 0 & 0 \\ \hline -C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c c c c c|} \hline 0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -b \\ \hline -\beta_1 & -\lambda_1 & -\nu_1 & -\nu_2 & 0 \\ \hline -\beta_2 & -M_1 & -\lambda_2 & -\nu_3 & 0 \\ \hline -\beta_3 & -M_2 & -M_3 & -\lambda_3 & 0 \\ \hline -C & 0 & 0 & 0 & -2a \\ \hline \end{array}$$

with $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$

これは 17 次元である。 群が 49 次元、表現空間が 32 次元

$49 - 32 = 17$ ゆえ これは 概均質ベクトル空間である。

さて isotropy subalgebra の 10×10 行列の部分を A とおく。

$$S = \begin{vmatrix} & & & 1 & 1 \\ 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & 1 \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & 1 \end{vmatrix}$$

に対し $S^{-1}AS =$

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & M_1 & M_2 & 0 & -B_3 & \beta_2 & 2d_1 & 0 & 0 & 0 \\ V_1 & \lambda_2 & M_3 & B_3 & 0 & -\beta_1 & 2d_2 & 0 & 0 & 0 \\ V_2 & V_3 & \lambda_3 & -B_2 & \beta_1 & 0 & 2d_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & -\alpha_2 & -\lambda_1 - \gamma_1 & -V_2 & 2\beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_3 & 0 & \alpha_1 & -M_1 - \lambda_2 & -V_3 & 2\beta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & 0 & -M_2 - M_3 & -\lambda_3 & 2B_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a & 2b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2c & -2a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (G_2) \text{ の} & & 0 \\ 7 \text{ 次表現} & & \\ \hline & 0 & \\ & & sl(2) \text{ の} \\ & & \text{随伴表現} \end{vmatrix}$$

従って \mathfrak{o}_1 における isotropy subgr. の連結成分は

$(G_2) \times SL(2)$ である事がわかる。これは reductive であるから この概均質ベクトル空間は正則である。 // Prop. 1.

さて $(G_2) \times SL(2) \hookrightarrow O(10)$ がわかるたから $O(10) \xrightarrow{\text{スピン表現}} SL(16)$ を $(G_2) \times SL(2)$ へ制限したときの様子を weight の計算によつて調べてみると $V(1) = V(16)$ は次のように分解する事がわかる。

$$V(16) = (V(1) \oplus V(7)) \otimes V(2) \quad \text{ここで}$$

$V(7)$ は (G_2) の最小次元(7次元)既約表現の表現空間

$V(1)$ には (G_2) が trivial に作用し、 $V(2)$ は $SL(2)$ の恒等表現の表現空間である。

そして $(1 + e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4)$, $(e_1 \wedge e_5 + e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_5)$ はともに $V(1) \otimes V(2)$ ($< V(16)$) の元、すなまち (G_2) が trivial に作用している。

Prop.1において isotropy subgroup が $(G_2) \times SL(2)$ である事から
 $SL(2)$ の作用がなくても概均質であると思われるが 実際に計算すれば 確かに $(GO(10), V(16) \oplus V(16))$ は概均質である。但しこれは既約ではない。

Cor. (Sato-Kimura) $O(9) \times GL(2)$ は概均質ではない。
 スピン表現 \otimes 口

Proof) $O(9)$ のスピン表現は $O(10)$ の半スピン表現を $O(9)$ へ制限したものである事に注意する。 $O(9) \hookrightarrow O(10)$ を適当にとれば (i.e. $V(10)$ の non-isotropic な元を適当にとれば)
 $(G_2) \times SL(2) \cap O(9)$ の次元が $40 - 32 = 8$ となる事である。

$$\text{リーベー環でいえば } \left(\begin{array}{c|c} G_2 & 0 \\ \hline 0 & \frac{SL(2)}{\mathbb{R}} \end{array} \right) \cap O(9) = \left(\begin{array}{c|c} G_2 & 0 \\ \hline 0 & \frac{SL(2)}{\mathbb{R}} \end{array} \right) \cap \{ A \in O(10) \mid Ax_i = 0 \}$$

の次元が 8 になる。

$$\text{しかし } \dim \left(\begin{array}{c|c} G_2 & 0 \\ \hline 0 & \frac{SL(2)}{\mathbb{R}} \end{array} \right) = 17, \det(G_2) = 0, \det\left(\frac{SL(2)}{\mathbb{R}}\right) = 0$$

ゆえどのようす x_i をとってきてても

$$\dim \left(\begin{array}{c|c} G_2 & 0 \\ \hline 0 & \frac{SL(2)}{\mathbb{R}} \end{array} \right) \cap O(9) \geq 17 - (7-1) - (3-1) = 9$$

従ってこれは概均質ではあり得ない。 // Cor.

次に $O(10) \times GL(3)$ を調べるのだが、その為に再び $O(10) \times GL(2)$
 *スピン表現 \otimes 口

について その構造を調べよう。

$x_0 = 1 + e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$, $x'_0 = e_1 \wedge e_5 + e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_5$ とすれば (x_0, x'_0) の isotropy subgroup $(G_2) \times \mathrm{SL}(2)$ において (G_2) は x_0, x'_0 に trivial に作用している事は述べたが, $\mathrm{SL}(2)$ は左右から作用して打ち消しあって (x_0, x'_0) を fix している。その様子をリ-環でみてみよう。

$$X = A \oplus B, \quad A = \left(\begin{array}{c|c} c & -b \\ b & 2a \\ \hline c & -b \\ \hline -c & -c-2a \end{array} \right) \text{, } B = \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & -a \end{array} \right) \text{ とおくと}$$

$$Ax_0 = -ax_0 - bx'_0, \quad Ax'_0 = -cx_0 + ax'_0, \quad \text{一方 } B \text{ は列を動かし}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline \text{列} & \text{列} \end{array} \right) B = \left(a \begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline \text{列} & \text{列} \end{array} + b \begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline \text{列} & \text{列} \end{array}, c \begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline \text{列} & \text{列} \end{array} - a \begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline \text{列} & \text{列} \end{array} \right) \text{ となるから}$$

$$(x_0, x'_0)B = (ax_0 + bx'_0, cx_0 - ax'_0) \quad \therefore A(x_0, x'_0) + (x_0, x'_0)B = 0$$

これは $\mathrm{SL}(2)$ の左右からの作用が打ち消しあっている事を示している。

さて $O(10) \times GL(3)$ において, $x_0, x'_0 \in V(1) \otimes V(2) (\subset V(16))$ ゆえ
オミの 16 次元ベクトルは $V(7) \otimes V(2)$ の元をとるべきだという事が予想される。

Prop 2. (Kimura-Sato) $O(10) \times GL(3)$ は正則な概均質ベクトル
半スピン表現の口
空間で generic な点における isotropy subgroup の連結成分は
 $SL(2) \times O(3)$ である。

Proof) x_0, x'_0 を上記のベクトルとし x''_0 を新しい 16 次元ベクトルとする。このとり方が大切なのであるが、今 $O(10) \times GL(3)$ の reductive でない部分群 $O(10) \times \left(\begin{array}{c|c} GL(2) & * \\ * & * \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$ を考える。今 $O(10)$ を左から半スピン表現で, $\left(\begin{array}{c|c} GL(2) & * \\ * & * \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$ を右から列の交換として作用させる。

$$O(10) \begin{array}{|c|c|c|} \hline & x_0 & x'_0 & x''_0 \\ \hline & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ \hline \end{array} \left(\begin{array}{|c|c|} \hline GL(2) & * \\ \hline 0 & 0 & * \\ \hline \end{array} \right)$$

(V(16)の base を適当にとれば x_0, x'_0
はこのような 16 次元 線ベクトルとして
表めす事ができます) が 証明される。

ここで右から的作用は x_0, x'_0 間の作用を引き起こす。よって
この中で x_0, x'_0 を fix するものは Prop. 1. によって

$$(G_2) \times SL(2) \begin{array}{|c|c|c|} \hline & x_0 & x'_0 & x''_0 \\ \hline & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ \hline \end{array} \left(\begin{array}{|c|c|} \hline SL(2) & h_1 & h_2 \\ \hline 0 & 0 & * \\ \hline \end{array} \right)$$

ここで 左右の $SL(2)$ は同じもの。

既述のように (G_2) は $\{\begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 1 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}\} \leftarrow$ に作用し (i.e. trivial な作用。 x'_0
 $\{\begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 1 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}\} \leftarrow$

でも同様) 左の $SL(2)$ は $\{\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}\} \leftarrow$ ここでの交換 etc. として作用
する。 右の $SL(2)$ は x_0, x'_0 の
列の交換 etc. として作用し 互に打ち消しあって全体として x_0, x'_0
を fix する。

さて h_1, h_2 を適当にとる事によって x''_0 の形を $\{\begin{array}{|c|} \hline * \\ \hline 0 \\ \hline * \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}\} \leftarrow$ とする事
ができる。以下 h_1, h_2 をそのように fix する。そして $*$ ($\neq 0$) を
任意にとれるから x''_0 を scalar 倍する事ができる。すなわち

$(G_2) \times GL(2)$ が $\{\begin{array}{|c|} \hline * \\ \hline 0 \\ \hline * \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}\} \leftarrow$ に作用する。 G_2 は $\rightarrow \{\begin{array}{|c|} \hline * \\ \hline 0 \\ \hline * \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}\}$ の各々に

作用し $GL(2)$ は $\{\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}\} \leftarrow$ の交換 etc. として作用する。

結局 $(G_2) \times GL(2)$ が $V(7) \oplus V(7)$ に作用しているのであるが、
これは概均質で isotropy subgroup は $GL(2)$ である。

すなまち $O(10) \times \begin{pmatrix} GL(2) & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} / GL(2)$ は概均質である。
 半スピン表現 \otimes 口

群を大きくしても勿論、概均質や $O(10) \times GL(3)$ も概均質である。

x_0'' をとるには $(G_2) \times GL(2)$ の genericな点をとればよい。

例えば $V(7) \oplus V(7) \ni \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{1} \\ \boxed{1} & \boxed{1} \end{pmatrix}$ は genericな点である。

これに対応するのは $x_0'' = e_1 \wedge e_2 + e_1 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_5$ である。

(x_0, x_0', x_0'') における isotropy subalgebra を計算すると次の通り。

$$\left(\begin{array}{c|cc|cc|c} & -3e & & -3f & & \\ \hline -f & a & & -2e & 3f & \\ & \lambda & \mu & & & e \\ & \nu & -\lambda a & & & \\ \hline -2f & & & 2a & & \\ e & & & f & & \\ -e & & & 3e - a & & 2f \\ \hline f & & -f & & -\lambda - \nu & \\ & & & & -\mu & \lambda + a \\ & & & 2e & & -2a \end{array} \right) \oplus \begin{pmatrix} a & 2f \\ -a & 2e \\ e & f \end{pmatrix}$$

これは 6 次元。 群の次元 = 54, 表現空間の次元 = 48

このリーベー環の Killing form を計算すると non-degenerate である事がわかるから Cartan の判定条件により semi-simple。よってこの空間は正則である。 実は isotropy subgroup の連結成分は $SL(2) \times O(3)$ である事がわかる。

Prop 2.

Cor. $O(10) \times GL(2)$ は概均質ではない
半スピン表現の口

Proof) $SL(2)$ の随伴表現は $O(3)$ の基本表現を考える事ができる。すなめち $O(10) \times GL(2)$ を $O(10) \times GO(3)$ と考える。
 $\text{半スピン表現の口} \quad \text{半スピン表現の口}$

そのとき $O(10) \times GO(3) \xhookrightarrow{\text{半スピン表現の口}} O(10) \times GL(3)$ と考えられる。

もしこれが概均質ならば generic な実の isotropy subalgebra の次元 = $49 - 48 = 1$ である筈。しかしに $O(10) \times GL(3)$ の isotropy subalgebra は Prop 1 の証明中にありますから との実の isotropy subalg. の次元 ≥ 3 //

Prop 3 $O(12) \times GL(2)$ は概均質ではない (Satohimura)
半スピン表現の口

Proof) $GO(12)/SL(6)$ が概均質である事は知られている。
(1970; 新谷)

表現空間 $V(32)$ は $SL(6)$ の表現空間としては 次のように分解している事が weight の計算により 確かめられる。

$$V(32) = V(1) \oplus V(1) \oplus V(15) \oplus V(15)$$

日 日の dual

$GL(2)$ の元は一般に $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}$ と分解できる。(分解ではない行列全体は 3 次元, i.e. $\text{codim } 1$)

$O(12) \times GL(2)$ のかめりに $O(12) \times \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ なる群を考へる。

$$32 \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} O(12) \text{ の} \\ \text{半スピン} \\ \text{表現} \end{pmatrix}}_{32} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\}$$

に於いて x_0 を fix するのは $SL(6)$

ゆえ $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & 1 & 0 & a & m & h \\ \hline A & | & | & | & | & | \\ \hline & 0 & 0 & y_1 & 0 & k \\ \hline & 0 & 0 & y_2 & 0 & k \\ \hline cA^{-1} & | & | & | & | & | \\ \hline & 1 & 0 & y_1 & m & h \\ \hline \end{array}$, 但し A は $SL(6)$ の日なる表現。
(m : fixed)

ここで A と k の作用によって y_1 は $GL(6)$ 日の表現空間の元を考える事ができる。

$GL(6)/Sp(3)$ 日は正則概均質であるから y_1 はその generic を表す。 $Sp(3)$ 日とその contragredient は同じゆえ

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & 1 & 0 & a & m & h \\ \hline Sp(3) \text{ 日} & | & | & | & | & | \\ \hline & 0 & 0 & y_1 & 0 & k \\ \hline Sp(3) \text{ 日} & | & | & y_2 & 0 & k \\ \hline & 1 & 0 & y_1 & m & h \\ \hline \end{array}$$

正確には $GL(6)$ を $Sp(3)$ に制限すれば既約ではなく、その 15 次元表現空間は 14 次元表現空間と 1 次元の空間とに分解する。

$$V = \{ X \in M(6) \mid {}^t X = -X \} \ni X, Sp(3) \ni A \text{ に対して }$$

$$X \mapsto {}^t A X A \text{ と作用するが generic を表す } \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_4 & a_5 \\ a_3 & a_5 & a_6 \end{pmatrix} \text{ という形へ}$$

うつせる。(それは a_1, a_2, a_3 の置換を除いて unique)

それを不変にする $Sp(3)$ の部分群は $3 Sp(1)$ である事

が計算により確かめられる。ie. isotropy subgroup の次元は 9.

従て $O(12) \times \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ による generic を表す orbit は $69 - 9 = 60$ 次元。

そのあと $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}$ を作用させても orbit の次元は高々 1 つふえるだけゆえ

(表現空間の次元は 64 だから) これは概均質ではない。 //

§3. 例外型既約概均質ベクトル空間について

この § の目標は次の空間の概均質性を調べる事である。

$E_6 \times GL(2)$, $E_6 \times GL(3)$, $E_6 \times GL(2)$, $F_4 \times GL(2)$, $E_7 \times GL(1)$
27次表現の口 27次表現の口 27次表現の口 26次表現の口 56次表現

$E_7 \times GL(2)$
56次表現の口

まず F_4 の 26 次表現, E_6 の 27 次表現について簡単に述べる。

$C =$ 複素数体, $Q = C \cdot 1 + C \cdot e_1 + C \cdot e_2 + C \cdot e_1 e_2$ ($e_1^2 = 1, e_2^2 = 1, e_1 e_2 = -e_2 e_1$)

を C 上の四元数環とし Q 上の二乗加群 $\mathcal{L} = Q \cdot 1 + Q \cdot e$ に乗法を

$(\bar{s}+re)(\bar{t}+te) = (\bar{s}\bar{t}-\bar{r}r) + (\bar{t}\bar{s}+r\bar{s})e$ ($s, r, t \in Q, \bar{s}, \bar{t}$ は s, t の共役四元数) と定義して得られる C 上 8 次元の non-associative Jordan algebra

Cayley algebra という。 $\mathcal{L} \ni x = s+re$ ($s, r \in Q$) に対して その共役を

$\bar{x} = \bar{s} - re$ と定める。 $\overline{xy} = \bar{y} \cdot \bar{x}$ である。
J or the exceptional simple Jordan algebra over C とは

$$\mathcal{J} = \left\{ X = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in C \\ x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{L} \end{array} \right\} \text{ に 乗法 } \circ X \circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX) \\ (\text{XY, YX は普通の行列の積})$$

と定義したものという。 $\dim \mathcal{J} = 27$. $S_p X \stackrel{\text{def}}{=} \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ とする。

① \mathcal{J} が \mathcal{J} の derivation algebra とは \mathcal{J} の 1 次変換 D で $D(X \circ Y) = DX \circ Y + X \circ DY$ をみたすもの全体のなす Lie algebra のこと。

② R_Y ($Y \in \mathcal{J}$) が右乗法とは $X \mapsto X \circ Y$ (for $\forall X \in \mathcal{J}$) なる \mathcal{J} の 1 次変換の事である。そのとき 次の事が成り立つ。

* \mathfrak{f} の derivation algebra は \mathbb{C} 上 52 次元, rank 4 の 例外単純リ-環 F_4 である。 \mathbb{C} 上 78 次元, rank 6 の 例外単純リ-環 E_6 は trace 0 の元による右乗法と \mathfrak{f} の derivation 全体の生成するリ-環である。

$$E_6 = \mathcal{D} + \{R_i\}, S_p x = 0, F_4 = \mathcal{D}$$

これが E_6 の 27 次既約表現, \mathfrak{f} は F_4 の作用で既約ではないが, それで $\mathfrak{f}_0 = \{X \in \mathfrak{f} \mid S_p X = 0\}$ へ制限したものが F_4 の 26 次既約表現である。

[注] $\mathfrak{f} \ni (1, 1)$ における isotropy subalgebra を計算する事に
より直ちに $\boxed{E_6 \times GL(1) / F_4}$ が得られる。

\mathcal{D} の構造を述べる。 $\Theta(8, \mathbb{C}) = \{X \in M(8, \mathbb{C}) \mid {}^t X + X = 0\}$ を Cayley alg. の一次変換と考える。 $\mathcal{L} \ni x \mapsto S_p x = x + \bar{x}$ とおく。
そのとき $U \in \Theta(8, \mathbb{C})$ に対して $\exists U', U'' \in \Theta(8, \mathbb{C})$ s.t.

$$S_p(Ux) \neq z + S_p x (U'z) + S_p x y (U''z) = 0 \quad \text{いま}$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad a \in \mathcal{L} \text{ に付し}$$

$$(a)_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & \bar{a} & 0 \end{pmatrix}, \quad (a)_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{a} \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (a)_3 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ \bar{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とおく。 E_1, E_2, E_3 を 0 へうつす \mathfrak{f} の derivations 全体を \mathcal{D}_0 とする
とすると $\mathcal{D}_0 = \{D \in \mathcal{D} \mid D \cdot \begin{pmatrix} \bar{x}_1 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \bar{x}_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \bar{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & U''x_3 & U'\bar{x}_2 \\ \bar{U}'x_3 & 0 & Ux_1 \\ U'x_2 & \bar{U}'x_1 & 0 \end{pmatrix}$
for $\exists U \in \Theta(8, \mathbb{C})\}$ である事が知られている。

$\mathcal{D}_0 \cong \Theta(8, \mathbb{C})$, $\dim \mathcal{D}_0 = 28$ である。次に

\mathcal{J} の一次変換 A, B に対し $[A, B] = AB - BA$ と定義すると

$$\mathcal{J}_1 = \{ [R_{E_2}, R(a)_1] \mid a \in \mathcal{L} \}$$

$$\mathcal{J}_2 = \{ [R_{E_1}, R(a)_2] \mid a \in \mathcal{L} \}$$

$\mathcal{J}_3 = \{ [R_{E_1}, R(a)_3] \mid a \in \mathcal{L} \}$ とあれば $\dim \mathcal{J}_i = 8$ ($i = 1, 2, 3$) で $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 \oplus \mathcal{J}_1 \oplus \mathcal{J}_2 \oplus \mathcal{J}_3$ と分解する。以上について詳しくは [5], [6] を参照のこと。

Prop 1. (KIMURA) $E_6 \times GL(2)$ は正則概均質でその
27次表現 \boxtimes

generic な実における isotropy subgroup の連結成分は
 $O(8)$ である。

Proof) $\langle \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \rangle$ における isotropy subalg.
が \mathcal{D}_0 ($\cong O(8, \mathbb{C})$) になる事を示す。まず $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3$ の
作用を具体的に計算してみると 次のようになる。

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathcal{J}_1]{[R_{E_2}, R(a)_1]} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{ax_2}{4} & \frac{x_3a}{4} \\ -\frac{ax_2}{4} & -\frac{x_1\bar{a} + \bar{x}_1}{4} & \frac{a(\xi_2 - \xi_3)}{4} \\ \frac{\bar{x}_3a}{4} & \frac{\bar{a}(\xi_2 - \xi_3)}{4} & \frac{\bar{a}x_1 + x_1\bar{a}}{4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathcal{J}_2]{[R_{E_1}, R(a)_2]} \begin{pmatrix} -\frac{\bar{x}_2a + \bar{a}x_2}{4} & -\frac{\bar{x}_1a}{4} & \frac{\bar{a}(\xi_1 - \xi_3)}{4} \\ -\frac{x_1a}{4} & 0 & \frac{\bar{a}x_3}{4} \\ \frac{a(\xi_1 - \xi_3)}{4} & \frac{ax_3}{4} & \frac{a\bar{x}_2 + x_2\bar{a}}{4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{[R_{E1}, R(a)_3]} \begin{pmatrix} -\frac{ax_3 + x_2\bar{a}}{4} & \frac{a(\xi_1 - \xi_2)}{4} & -\frac{ax_1}{4} \\ \frac{\bar{a}(\xi_1 - \xi_2)}{4} & \frac{\bar{x}_3 a + \bar{a}x_3}{4} & \frac{\bar{x}_2 a}{4} \\ -\frac{ax_1}{4} & \frac{x_2 a}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

さて $\omega = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に對し

$Z = X \oplus \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E_6 \oplus \mathfrak{gl}(2)$ (群 E_6 とリ-環 E_6 を区別しないで書く) で

$$d\rho(Z) \cdot \omega = \left[X \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \right] \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} +$$

$$\left[X \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \right] \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = 0 \text{ となる } Z$$

全体がすなむち \mathfrak{g}_v における isotropy subalgebra \mathfrak{g}_v である。
3. $\mathcal{D}_0 \subseteq \mathfrak{g}_v$ は定義から明らかで、その逆 $\mathfrak{g}_v \subseteq \mathcal{D}_0$ を示す。

$$a \in \mathcal{L} \text{ に對し } (a)'_1 = [R_{E_2}, R(a)_1] \in \mathcal{T}_1$$

$$(a)'_2 = [R_{E_1}, R(a)_2] \in \mathcal{T}_2, \quad (a)'_3 = [R_{E_1}, R(a)_3] \in \mathcal{T}_3 \text{ と書く事にすれば}$$

$$E_6 \ni X = D_0 + (\alpha)'_1 + (\beta)'_2 + (\gamma)'_3 + R_Y \quad (s_p Y = 0)$$

$D_0 \in \mathcal{D}_0, \alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{L}$ と一意的に分解できる。

今 $Z = [D_0 + (\alpha)'_1 + (\beta)'_2 + (\gamma)'_3 + R_Y] \oplus \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_v$ とする

$$\left[Y + \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3b & 2b \\ 2b & b \end{pmatrix} \right] \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{if } Y = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix}$$

とおけば $\begin{pmatrix} \xi_1+a+3b & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \xi_2+a+2b & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi_3+a+b \end{pmatrix} = 0$ with $\xi_1+\xi_2+\xi_3=0$

$$\therefore x_1=x_2=x_3=0, \xi_1=-b, \xi_2=0, \xi_3=b$$

従って $Y = \begin{pmatrix} -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, a=-2b$ でなければならぬ。

次に

$$\left[(\alpha)_1' \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + (\beta)_2' \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + (\gamma)_3' \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \right.$$

$$\left. + \begin{pmatrix} c & c \\ c & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3d & 2d \\ 2d & d \end{pmatrix} \right] \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{であるから}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{4} \\ 0 & \frac{\alpha}{4} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\beta}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{\gamma}{4} & 0 \\ \frac{\gamma}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3b+c+3d & 0 & 0 \\ 0 & 2d+c & 0 \\ 0 & 0 & d+c+b \end{pmatrix}$$

$$= 0 \quad \therefore \alpha=\beta=\gamma=0 \quad \begin{cases} c-3b+3d=0 \\ c+2d=0 \\ c+b+d=0 \end{cases} \rightarrow b=c=d=0 \quad \therefore a=0$$

すなまち $Z = [D_0 + (\alpha)_1' + (\beta)_2' + (\gamma)_3' + R_Y] \oplus \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_u$ ならば

$$Z = D_0 \quad \therefore \mathcal{O}_u \subseteq D_0.$$

従って $\mathcal{O}_u = D_0 \cong \theta(8, C)$ より正則概均質である。//

(群の次元 = 82, 表現空間の次元 = 54)
 $\dim \theta(8) = 28 = 82 - 54$. 正則性は明る。

Prop 2. (KIMURA) $E_6 \times GL(3)$ は概均質ではない。
27次表現の口

Proof) $E_6 \times GL(3)$ がもし概均質ならばその generic 点として $\langle \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$

なる形の点をとる事ができる。まずそれを示そう。

$\langle A, B, C \rangle$ を generic な点とする。 $E_6 \langle A, B, C \rangle \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$
 ~~$= E_6 \langle aA + dB, bA + eB, cA + fB, gA + hB + kC \rangle$~~

Prop 1 により $E_6 \times GL(2)$ は概均質で $\langle \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \rangle$

が generic な点ゆえ E_6 の元 X と a, b, e, d を適当にとれば

$$X(aA + dB) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, X(bA + eB) = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \text{となる}$$

3. よって最初から $A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ としてよい。

$$\begin{aligned} C &= \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} \text{とおく。一般に } (k \neq 0 \text{ なら}) \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \left(a - \frac{cg}{k}, b - \frac{ch}{k}, 0 \right) \\ &\quad \left(d - \frac{cf}{k}, e - \frac{ch}{k}, 0 \right) \text{ と分解できるから} \end{aligned}$$

$$E_6 \langle \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} \rangle \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$$

$$= E_6 \langle \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k\xi_1 + c + 3f & kx_3 & k\bar{x}_2 \\ k\bar{x}_3 & k\xi_2 + c + 2f & kx_1 \\ kx_2 & k\bar{x}_1 & k\xi_3 + c + f \end{pmatrix} \rangle \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma \subset \mathbb{P}^2, f' = f + k(\xi_1 - \xi_2), C' = C + k(3\xi_2 - 2\xi_1), \Xi = \xi_1 + \xi_3 - 2\xi_2$$

とかくと
 $= E_6 < \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c'+3f' & kx_3 & k\bar{x}_2 \\ k\bar{x}_3 & c'+2f' & kx_1 \\ kx_2 & k\bar{x}_1 & k\xi + c'+f' \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & 1 \end{pmatrix}$

$$= E_6 < \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 1 & 0 & c' \\ 0 & 1 & f' \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & 1 \end{pmatrix}$$

$$= E_6 < \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ g' & h' & k \end{pmatrix}$$

さて
 $\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

における $E_6 \oplus gl(3)$ の isotropy subalg を $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ としよう。

今 示した事により $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{L}, \xi \in \mathbb{C}$ を適当にとれば \mathcal{U} は generic な姿になるのであるから、そのとき $\dim \mathcal{O}_{\mathcal{U}} = (78+9) - 27 \times 3 = 6$ でなければ ならない。

さて $\mathcal{O}_{\mathcal{U}} \ni X' = X \oplus \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}, X = D_6 + (\alpha)_1' + (\beta)_2' + (\gamma)_3' + R_Y$
 とする。但し

$$(\alpha)_1' = [R_E, R_{(\alpha)_1}], (\beta)_2' = [R_{E_1}, R_{(\beta)_2}], (\gamma)_3' = [R_{E_1}, R_{(\gamma)_3}]$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} \eta_1 & y_3 & \bar{y}_2 \\ \bar{y}_3 & \eta_2 & y_1 \\ y_2 & \bar{y}_1 & \eta_3 \end{pmatrix} \text{ with } \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0 \quad \text{ます}$$

$$[X \left(\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & & \\ & a & \\ & & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & b & \\ & 2b & \\ & & b \end{pmatrix} \right) \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}] = 0$$

で あとは

$$\begin{pmatrix} \eta_1+a+3b, & y_3+c\bar{x}_3, & \bar{y}_2+c\bar{x}_2 \\ \bar{y}_3+c\bar{x}_3, & \eta_2+a+2b, & y_1+c\bar{x}_1 \\ y_2+c\bar{x}_2, & \bar{y}_1+c\bar{x}_1, & \eta_3+a+b+c\bar{\xi} \end{pmatrix} = 0. \quad \therefore Y = \begin{pmatrix} -a-3b, & -c\bar{x}_3, & -c\bar{x}_2 \\ -c\bar{x}_3, & -a-2b, & -c\bar{x}_1 \\ -c\bar{x}_2, & -c\bar{x}_1, & -a-b-c\bar{\xi} \end{pmatrix}$$

with $3a+6b+c\bar{\xi} = 0$ となる。 次に

$$\left[X \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & & \\ & d & \\ & & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3e & & \\ & 2e & \\ & & e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f\bar{\xi}_1 & f\bar{x}_3 & f\bar{x}_2 \\ f\bar{x}_3 & f\bar{\xi}_2 & f\bar{x}_1 \\ f\bar{x}_2 & f\bar{x}_1 & f\bar{\xi}_3 \end{pmatrix} \right] \otimes \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} = 0$$

であるから

$$\alpha = 2(3c-2f)x_1, \beta = 2(2c-f)x_2, \gamma = 2(5c-2f)x_3, b = \frac{(f-c)\bar{\xi}}{2}$$

$$d = 3(c-f)\bar{\xi}, e = a + \frac{5(f-c)\bar{\xi}}{2} \text{ となる。 結局}$$

$$X = D_0 + [2(3c-2f)x_1]_1' + [2(2c-f)x_2]_2' + [2(5c-2f)x_3]_3' + RY$$

$$Y = \begin{pmatrix} -a-3b, & -c\bar{x}_3, & -c\bar{x}_2 \\ -c\bar{x}_3, & -a-2b, & -c\bar{x}_1 \\ -c\bar{x}_2, & -c\bar{x}_1, & -a-b-c\bar{\xi} \end{pmatrix}, \quad 3(a+2b) = -c\bar{\xi}$$

最後に

$$\langle X \begin{pmatrix} 0 & \bar{x}_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & 0 & \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 & \bar{x}_1 & \bar{\xi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g & & \\ & g & \\ & & g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3h & & \\ & 2h & \\ & & h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k\bar{\xi}_1 & k\bar{x}_3 & k\bar{x}_2 \\ k\bar{x}_3 & k\bar{\xi}_2 & k\bar{x}_1 \\ k\bar{x}_2 & k\bar{x}_1 & k\bar{\xi}_3 \end{pmatrix} \rangle \otimes \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$= 0$. これは 27 個の方程式を表しているが、これが

すべて独立 $\longleftrightarrow E_6 \times GL(3)$ が概均質である。
27次表現の口

実際に計算してみると 27 個の方程式は次のようになる。

$$① (f-3c)x_2\bar{x}_2 + 2(f-3c)x_3\bar{x}_3 + g + 3h = 0$$

$$② 2(f-2c)x_1\bar{x}_1 + 2(2c-f)x_3\bar{x}_3 + g + 2h = 0$$

$$③ 2(c-f)x_1\bar{x}_1 + (c-f)x_2\bar{x}_2 + (2a+5b)\bar{\xi} + g + h + k\bar{\xi} = 0$$

$$④ \sim ⑪ Ux_1 + \frac{(4a+9b)+2k+(2f-3c)\bar{\xi}}{2}x_1 + \frac{(5c-3f)}{2}\bar{x}_2\bar{x}_3 = 0$$

$$\textcircled{12} \sim \textcircled{19} \quad U' \bar{x}_2 - 2c x_3 x_1 + (k+2a+4b + \frac{(f-2c)\xi}{2}) \bar{x}_2 = 0$$

$$\textcircled{20} \sim \textcircled{27} \quad U'' x_3 + \frac{3f-7c}{2} \bar{x}_1 \bar{x}_2 + (k - \frac{2a+5b}{2}) x_3 = 0$$

($U \in \Theta(8, \mathbb{C})$, U', U'' については P.28 参照)

$E_6 \times GL(3)$ が標均質である事と $x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{L}$, $\xi \in \mathbb{C}$ を
27次表現の上

適当にとれば $\textcircled{1} \sim \textcircled{27}$ の方程式が独立になる、という事と同値である。いかなる x_1, x_2, x_3, ξ に対して決して独立にならぬ事を証明する。

$\xi = 0$ のとき) $\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$ が独立なら例えば $f = n_1 c, g = n_2 c, h = n_3 c$ と表めせる。 $(n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{C})$ もし表めせなければ C のかわりに f, g, h のいずれかを使える。 $2b = (f-c)\xi = 0, 3a+6b = -c\xi = 0$ より $a=b=0$ (= 注意) 従って $\textcircled{4} \sim \textcircled{27}$ は次の形をしていき。

$$Ux_1 + kx_1 + nc \bar{x}_2 \bar{x}_3 = 0 \quad (\exists n' \in \mathbb{C}) \quad \dots \quad \text{1)}$$

$$U' \bar{x}_2 + k \bar{x}_2 - 2c x_3 x_1 = 0 \quad \dots \quad \text{2)}$$

$$U'' x_3 + k x_3 + n'' c \bar{x}_1 \bar{x}_2 = 0 \quad (\exists n'' \in \mathbb{C}) \quad \dots \quad \text{3)}$$

ここで U, U', U'' は 8 次の歪対称行列で $Ux_1 = 0$,

$U' \bar{x}_2 = 0, U'' x_3 = 0$ は各々 高々 7 個の独立な方程式を表す。

例えは $Ux_1 = 0$ の表めす 8 個の方程式を $P_1 = 0, \dots, P_8 = 0,$

$P_8 = P_1 + \dots + P_7 = 0$ とし $U' \bar{x}_2 = 0$ の表めす 8 個の方程式を $P'_1 = 0,$

$\dots, P'_7 = 0, P'_8 = P'_1 + \dots + P'_7 = 0$ とする。1) と 2) が独立ならば

$$\begin{cases} P_1 + k + d_1 c = 0 \\ \vdots \\ P_8 + k + d_8 c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} P'_1 + k + d'_1 c = 0 \\ \vdots \\ P'_8 + k + d'_8 c = 0 \end{cases} \quad \text{は独立な 16 個の式を表す。}$$

$P_8 = P_1 + \dots + P_7$ より $n_k + m_C = 0$ ($\exists n, m \in \mathbb{C}$, 独立性より $n=m=0$ という事はない.) よって 例えば $\vec{r} = \alpha C$ ($\alpha \in \mathbb{C}$) と表めせたとすれば $P'_1 + \alpha'' C = 0, \dots, P'_8 + \alpha'' C = 0$ が独立な 8 個の方程式を表めすが $P'_8 = P'_1 + \dots + P'_7$ より $C = 0 \therefore \vec{r} = 0$ 従って 3) は $\cup'' x_3 = 0$ となるがこれは高々 7 個の独立な式しか表めさない.

$\xi \neq 0$ の場合も $\xi = 0$ のときと同じ方法で 27 個の方程式の従属性が証明できる. 従って $E_6 \times GL(3)$ は概均質でなくなり得ない. // Prop.2.

Cor. $E_6 \times GL(2)$ は概均質ではない.
27 次表現の口

Proof) $E_6 \times GL(2)$ は $E_6 \times GO(3)$ と考え事ができる.もし

これが概均質なら $E_6 \times GO(3) \subset E_6 \times GL(3)$ ゆえ勿論

$E_6 \times GL(3)$ も概均質である. これは Prop.2 に反する. //

Prop.3. $F_4 \times GL(2)$ は概均質ではない.
26 次表現の口

略証) F_4 の 26 次元の既約表現空間は

$$J_0 = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} \in J \mid \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0 \right\} \text{であり 群 } F_4 \text{ の}$$

1-環 F_4 (同じ記号を使う) は J_0 の derivations 全体である。

f の元は (generic などとすれば) F_4 の作用で $\begin{pmatrix} a & b \\ & -a-b \end{pmatrix}$ と
P.42 略記)

いう形へうつす事ができる。従って $F_4 \times GL(2)$ の generic な

臭として $v = \begin{pmatrix} \xi_1 & & \\ & \xi_2 & \\ & & -\xi_1 - \xi_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_3 & \bar{y}_2 \\ \bar{y}_3 & \eta_2 & y_1 \\ y_2 & \bar{y}_1 & \eta_3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ なる形の

臭をとる事ができる。

$$F_4 \oplus gl(2) \ni D_0 \oplus (\alpha)_1' \oplus (\beta)_2' \oplus (\gamma)_3' \oplus \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ が } v \text{ を不変に} \\ \text{する元であるとする。ここで } D_0 \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & \bar{a}_2 \\ \bar{a}_3 & a_2 & a_1 \\ a_2 & \bar{a}_1 & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & U''a_3 & \bar{U}'a_2 \\ \bar{U}'a_3 & 0 & U'a_1 \\ U'a_2 & \bar{U}a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

そのとき次の $26 \times 2 = 52$ 個の連立方程式が成り立つか
これが独立になるように $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{C}, y_1, y_2, y_3 \in \mathcal{L}$ を
選べる事が $F_4 \times GL(2)$ が概均質である事と同値である。
P.42 略記

$$a\xi_1 + b\eta_1 = 0 \quad \text{--- (1)}, \quad a\xi_2 + b\eta_2 = 0 \quad \text{--- (2)}, \quad \frac{\gamma(\xi_1 - \xi_2)}{4} + b\bar{y}_3 = 0 \quad \text{--- (3) \sim (10)}$$

$$\frac{\beta(2\xi_1 + \xi_2)}{4} + b\bar{y}_2 = 0 \quad \text{--- (11) \sim (18)}, \quad \frac{\alpha(\xi_1 + 2\xi_2)}{4} + b\bar{y}_1 = 0 \quad \text{--- (19) \sim (26)}$$

まずこれらが独立な事から $a = b = 0, \alpha = \beta = \gamma = 0$ がて。従って

$$c\xi_1 + d\eta_1 = 0 \quad \text{--- (27)}, \quad c\xi_2 + d\eta_2 = 0 \quad \text{--- (28)}, \quad U''y_3 + cx_3 + dy_3 = 0 \quad \text{--- (29) \sim (36)}$$

$$U'y_2 + cx_2 + dy_2 = 0 \quad \text{--- (37) \sim (44)}, \quad Uy_1 + cx_1 + dy_1 = 0 \quad \text{--- (45) \sim (52)}$$

また (27), (28) が独立な事から $c = d = 0$, そのとき 例えば (46) \sim (52) は

8個の方程式 $Uy_1 = 0$ となるが U は 8 次の歪対称行列ゆえ

高々 7 個の独立な式しか表めさない。従ってこの空間は

概均質ではあり得ない。 // P.42.3.

例外リー環 E_7 の 56 次表現について必要な事実を証明をしてまとめておく。詳しくは [6] を参照。

\mathfrak{J} = the exceptional simple Jordan algebra

$\bar{\mathfrak{J}}$ は対応 $x \mapsto \bar{x} \in \bar{\mathfrak{J}}$ により \mathfrak{J} と同型な vector space.

$$\bar{\Sigma}_6 = \mathbb{C} \cdot R_1 \oplus \Sigma_6(\mathfrak{J}), \quad \Sigma_6(\mathfrak{J}) = R(\mathfrak{J}) + [R(\mathfrak{J}), R(\mathfrak{J})] = E_6$$

このとき $E_7 = \mathfrak{J} \oplus \bar{\mathfrak{J}} \oplus \mathbb{C} \cdot R_1 \oplus E_6$ (Tits-Koecher alg.)

$$\mathfrak{J} \ni a = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} \text{ に対し } T(a) = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$$

$T(a, b) = T(a \circ b)$ とすれば $T(a, b)$ は非退化な対称双一次形式であり, $\mathfrak{J} \ni a, b$ に対し その Freudenthal product を $a \times b = a \circ b - \frac{1}{2} T(a)b - \frac{1}{2} T(b)a + \frac{1}{2}[T(a)T(b) - T(a \circ b)] \cdot 1$ によって定義する。

\mathfrak{J} の一次変換 A の trace form $T(a, b)$ に関する adjoint を A^* と記す。: $T(Aa, b) = T(a, A^*b)$

右乗法 $R_a (a \in \mathfrak{J})$ は self-adjoint である。

$\mathcal{M} = \mathbb{C} \cdot 1 \oplus \mathbb{C} \cdot 1 \oplus \mathfrak{J} \oplus \bar{\mathfrak{J}}$ ($\dim \mathcal{M} = 1+1+27+27=56$) に E_7 を次のように作用させる。($\dim E_7 = 27+27+1+78=133$ である。)

$\mathcal{M} \ni X = (\xi, \eta, x, y)$ 但し $\xi, \eta \in \mathbb{C}, x, y \in \mathfrak{J}$ に対して E_7 の \mathcal{M} への作用を次のように定義すると \mathcal{M} では E_7 の 56 次元の既約な表現空間になっている事が知られてる。

$$* \left\{ \begin{array}{l} [X, a] = (T(a, y), 0, \eta a, 2aXx) \quad a \in \mathfrak{g} \\ [X, \bar{a}] = (0, -T(a, x), -2aXy, -\xi a) \\ [X, 2R_1] = (3\xi, -3\eta, -x, y) \\ [X, L] = (0, 0, xL, -yL^*) \quad L \in E_6(\mathfrak{g}) \end{array} \right.$$

これから直ちに次の事がわかる。

Prop 4. $E_7 \times GL(1)$ の 56 次表現は正則概均質で generic
な実における isotropy subgroup の連結成分は E_6 である。

Proof) $\forall C \ni X_0 = (1, 1, 0, 0)$ における $E_7 \times GL(1)$ の isotropy
subalg. を \mathfrak{o}_{X_0} とする。 $\forall X_0 \ni A = a \oplus \bar{b} \oplus 2mR_1 \oplus L \oplus \mathfrak{k}$, 但し
 $m, k \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathfrak{g}$, $L \in E_6$ とするとき

$$[(1, 1, 0, 0), a] = (0, 0, a, 0)$$

$$[(1, 1, 0, 0), \bar{b}] = (0, 0, 0, -b)$$

$$[(1, 1, 0, 0), 2mR_1] = (3m, -3m, 0, 0)$$

$$[(1, 1, 0, 0), k] = (k, k, 0, 0)$$

$$[(1, 1, 0, 0), L] = (0, 0, 0, 0)$$

$$\therefore [X_0, A] = (3m+k, -3m+k, a, -b) = 0 \quad \therefore a=b=0, m=k=0$$

$$\therefore A = L \in E_6, \text{ 逆に } E_6 \subset \mathfrak{o}_{X_0} \text{ は 明らか } \Rightarrow \mathfrak{o}_{X_0} = E_6 //$$

註). $\dim E_7 \times GL(1) = 134$. $\dim E_6 = 78$.

$$\dim V = 56, \quad 78 = 134 - 56 \text{ 正則概均質.}$$

E_6 is reductive \Rightarrow 正則.

Prop.5. (Kimura) $E_7 \times GL(2)$ は概均質ではない。
56次表現の口

Proof) 概均質になるとして、その generic な実を $A \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + B \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とするとき Prop.4により $A = (1, 1, 0, 0)$, $B = (0, \eta, x, y)$
 $\eta \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathfrak{f}$ としても一般性を失わない。さて

$E_7 \ni X = P \oplus \bar{R}_1 \oplus 2mR_1 \oplus L$ ($P, Q \in \mathfrak{f}$, $m \in \mathbb{C}$, $L \in E_6(\mathfrak{f})$) とし
 $X \oplus \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $u = A \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + B \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ における isotropy subalg.
の元であれば

$$[X \oplus \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}] \cdot u = (XA + aA + bB) \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (XB + dB + cA) \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \text{ すなはち}$$

$$XA + aA + bB = 0 \quad \dots 1), \quad XB + dB + cA = 0 \quad \dots 2)$$

1), 2) をあつた $56 \times 2 = 112$ 個の独立な方程式をあらめますように
 B を (i.e. $\eta \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathfrak{f}$ を) とる事ができる $\Leftrightarrow E_7 \times GL(2)$
が概均質である。まず 1) を調べる。

$$XA + aA + bB = (3m + a, b\eta - 3m + a, P + bx, -Q + by) = 0$$

$$\therefore a = -3m, b\eta = 6m, P = -bx, Q = by \quad (x, y \in \mathfrak{f})$$

すなはち 1) は独立な 56 個の方程式を表している。

次に 2) を調べる。

$$\text{このとき 1) により } X = (-bx) \oplus \overline{(by)} \oplus 2mR_1 \oplus L$$

$$(a = -3m, b\eta = 6m) \text{ となっていて}$$

$$[(0, \eta, x, y), (-bx)] = (-bT(x, y), 0, -b\eta x, -2bx \times x)$$

$$[(0, \eta, x, y), \overline{(by)}] = (0, -bT(y, x), -2by \times y, 0)$$

$$[(\sigma, \eta, x, y), zmR_1] = (0, -3m\eta, -mx, my)$$

$$[(\sigma, \eta, x, y), L] = (0, 0, xL, -yL^*)$$

$$dB = (0, d\eta, dx, dy), cA = (c, c, 0, 0) \quad \text{ゆえ}$$

$$XB + dB + cA = (c - bT(x, y), c + (d - 3m)\eta - bT(x, y),$$

$$(d - m - b\eta)x + xL - 2by \cancel{\times} y, (d + m)y - yL^* - 2bx \cancel{\times} x) = 0$$

$$\text{ここで } \eta = 0 \text{ なら } c - bT(x, y) = 0, c + (d - 3m)\eta - bT(x, y) = 0$$

が同値になってしまふから $\eta \neq 0$ である。scalar倍は許される

から $\eta = 1$ として可。 そのとき

$$c = bT(x, y), d = 3m \quad (a = -3m, b = 6m)$$

$$\text{Bで } 27 \times 2 \text{ 個の方程式} \begin{cases} (d - m - b\eta)x + xL - 2by \cancel{\times} y = 0 \\ (d + m)y - yL^* - 2bx \cancel{\times} x = 0 \end{cases}$$

$$\text{が得られるが } d = 3m, b = 6m, \eta = 1 \text{ を 使ふと}$$

$$\begin{cases} -4mx + xL - 12my \cancel{\times} y = 0 & \cdots 3) \\ 4my - yL^* - 12mx \cancel{\times} x = 0 & \cdots 4) \end{cases}$$

3), 4) が $27 \times 2 = 54$ 個の独立な式をあらめすように $x, y \in \mathbb{F}$

$m \in \mathbb{C}$ を適当にとれる事と $\begin{smallmatrix} \text{E}_7 \times GL(2) \\ \text{56 次表現の口} \end{smallmatrix}$ が標均質である事が

同値である。 L^* の定義より $(xL) \circ y = x \circ (yL^*)$ ゆえ

3)に y をかけて 4)に x をかけ 両辺を加えると

$$m[(y \cancel{\times} y) \circ y + (x \cancel{\times} x) \circ x] = 0 \quad \therefore m=0 \text{ or } (y \cancel{\times} y) \circ y + (x \cancel{\times} x) \circ x$$

$$= 0.$$

$m=0$ とすれば 3), 4) はそれが $xL = 0, yL^* = 0$ となる

形になってしまう。しかし $(xL) \circ y = x \circ (yL^*)$ なる関係があり
 $x \neq 0, y \neq 0$ ゆえ 一次独立でなくなるてしまう。実際 例えは

$$YL^* = \begin{pmatrix} p_1 & z_3 & \bar{z}_2 \\ \bar{z}_3 & p_2 & z_1 \\ z_2 & \bar{z}_1 & p_3 \end{pmatrix} \text{とおくと } YL^* = 0 \leftrightarrow p_1 = p_2 = p_3 = 0, z_1 = z_2 = z_3 = 0$$

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} \text{において } \xi_1 \neq 0 \text{ ならば, } xL = 0 \text{ か } 0 = x \circ (YL^*)$$

$$\text{かつて } \xi_1 p_1 + \frac{(\bar{x}_2 x_1 + \bar{x}_2 z_2) + (x_3 \bar{z}_3 + z_3 \bar{x}_3)}{2} = 0 \quad (\text{これは } x \circ (YL^*) \text{ の (1-1) 成分})$$

よって $xL = 0, z_2 = z_3 = 0$ か $p_1 = 0$
 か で 3 か $xL = 0, YL^* = 0$ は 独立に な ま す い、他も同様。

従って $(yXy) \circ y + (xXx) \circ x = 0$ でなければ な ま ぬ。

したがって 3) $\in P = 0, 4) \in Q = 0$ と書くと

$P \circ y + Q \circ x = 0$ ($x \neq 0, y \neq 0$) とい う 関 係 式 が 成り立つ

今も 同様にして $P = 0, Q = 0$ は 独立で ない 事 が 示 さ れる。

よって $E_7 \times GL(2)$ は 极均質で ない。 // Prop 5.
5 次表現の口

補足) f_0 の generic な 命 が F_4 の作用で $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a-b \end{pmatrix}$ へ な ま す

事 に ついて (P.37) (これは 佐藤幹夫先生による 注意)

$F_4 = D_5 \oplus I_1 \oplus I_2 \oplus I_3 \ni X = D_5 \oplus (\alpha)_1' \oplus (\beta)_2' \oplus (\gamma)_3'$ に対し

$$X \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\alpha(\xi_1 - \xi_2)}{4} & \frac{\beta(\xi_1 - \xi_3)}{4} \\ \frac{\bar{\alpha}(\xi_1 - \xi_2)}{4} & 0 & \frac{\bar{\beta}(\xi_2 - \xi_3)}{4} \\ \frac{\beta(\xi_1 - \xi_3)}{4} & \frac{\bar{\alpha}(\xi_2 - \xi_3)}{4} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ゆえ}$$

$a, b, -a-b$ が互に異なるならば

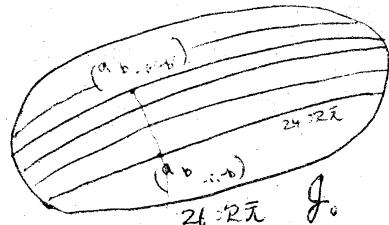
$\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & -a-b \end{pmatrix} \in \mathfrak{f}_0$ における F_4 の isotropy subalg. は \mathcal{D}_0 .

よって この束の F_4 -orbit の次元 = $52 - 28 = 24$ である。

次に F_4 の作用によって $\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & -a-b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a' & & \\ & b' & \\ & & -a'-b' \end{pmatrix}$ な

らば $(a', b', -a'-b')$ は $(a, b, -a-b)$ の permutation である事を示す。そうすれば \mathfrak{f}_0 の generic を実かこの標準形にうつる事が証明された事になる。

$$x = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \bar{x}_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \bar{x}_3 \end{pmatrix} \text{ に対し }$$



$$P(x) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + x_1 (\bar{x}_2 x_3) + \overline{x_1 (x_2 x_3)} - (\bar{x}_1 (x_1 \bar{x}_3) + \bar{x}_2 (x_2 \bar{x}_1) + \bar{x}_3 (x_3 \bar{x}_1))$$

は $E_6 \times GL(1)$ の rel. conn. で F_4 でも不變。
29 次表現

$$x = \begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & -a-b \end{pmatrix} \text{ に対し } P(x - cI) = (a-c)(b-c)(-a-b-c)$$

$I = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ が F_4 で不變な事と $P(x - cI)$ が F_4 で不變な事から
我々の主張は明らかである。 /

文献

- [1] 佐藤幹夫述
新谷卓郎記：概均質ベクトル空間の理論
(数学の歩み 15-1)

- [2] 分類に関する佐藤先生の(個人的)一ト
(東大数学教室に原版がある)
- [3] 木村達雄: 概均質ベクトル空間の分類について(I)
- [4] " " (II)
- [5] Chevalley and Schaefer: The exceptional Lie alg. F_4 and E_6
Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. v36 (1950) p.137~p141
- [6] Jacobson: Exceptional Lie alg. (Dekker, lecture note)
- [7] Chevalley: Algebraic theory of spinors (Columbia Univ.)
- [8] J. Igusa: Classification of spinors up to dimension twelve
American Journal of Math. vol. 92 (1970)
p.997~1028
- 尚 概均質ベクトル空間のセータ関数については
- [9] T. Shintani: On Dirichlet series whose coefficients are class numbers of integral binary cubic forms. (J. of Math Soc. of Japan Vol. 24 No. 1 1972)
- 概均質ベクトル空間と超幾何関数については
の関係
- [10] 佐藤幹夫述
青本和彦記: 概均質空間の特異軌跡と超幾何関数
(1971年6月 東大における講義) 原版が東大数学教室にある。
- セータ関数との関連について 最近の佐藤先生の研究があり
ますが 文献はまだありません。 //