

実解析解の semi-local な存在について

東京教育大 理 鈴木文夫

§1. 序. P を実解析多様体 M で定義された解析的係数の線形偏微分作用素とする. A を実解析函数の層, A_x を x における A の stalk とすれば, Cauchy-Kowalewski の定理により, P の principal symbol $p(x, \xi)$ が $\neq 0$ であるときの点 $x \in M$ において

$$PA_x = A_x$$

である. しかし, 一般には, これから x の任意の近傍 U に対して, x の近傍 $V \subset U$ が存在して

$$PA(V) \subset A(U)$$

となるとは言えない. 実際, Hörmander は [2, Th. 6.1.4] において次の事を証明した. P を $M \subset \mathbb{R}^n$ で定義された解析的係数の 1 階作用素とする. p と \bar{p} の commutator を $[p, \bar{p}]$ とし, $c_i = i[p, \bar{p}]$ とおく.

$$p(x, \xi) = 0 \quad \text{かつ} \quad c_i(x, \xi) < 0$$

となる $(x, \xi) \in M \times \mathbb{R}^n$ が存在すると仮定する. このとき,

$\varepsilon > 0$ が存在して

$$P\mathcal{D}'(M) \not\supset H_{\xi, \varepsilon}$$

となる. ここで $H_{\xi, \varepsilon}$ は $\{z; z \in \mathbb{C}^n, \langle Im z, \xi \rangle < \varepsilon\}$ で holomorphic な函数の空间である. 後に, P. Schapira [4] は, 解析的係数の 1 階作用素 P について, 次の 2 条件が同値であることを証明した.

(a) $x \in M$ の近傍 V で, すべての $\varepsilon > 0$ に対して,

$$PB(V) \subset H_\varepsilon$$

となるものが存在する. ここで H_ε は $\{z; z \in \mathbb{C}^n, |Im z| < \varepsilon\}$ で holomorphic な函数の空間である.

(b) P は x の近傍で Nirenberg-Treves の条件 (§2 を見よ) をみたす.

さて, M の点 a の任意の近傍 U に対して, a の近傍 $V \subset U$ が存在して

$$PA(V) \subset A(U)$$

となるとき, a の近傍で実解析解が semi-local に存在するということにしよう. ここでは semi-local 存在について, 次の定理を証明する.

定理. M の次元が 2, P の階数が 1 のとき, M の各点の近傍で実解析解が semi-local に存在するための必要十分条件は, M において Nirenberg-Treves の条件が成り立つ.

とである。

§2. 準備. P は 2 次元実解析多様体 M で定義された解析的係数の 1 階偏微分作用素とする. \tilde{M} を M の複素近傍とし, P を \tilde{M} まで解析的に延長した作用素を P で表わす. A は M の上の実解析函数の層, \mathcal{O} は \tilde{M} の上の holomorphic 函数の層とする.

命題 2.1. $a \in M$ の近傍において実解析解が semi-local に存在するための必要十分条件は, a の任意の実近傍 U に対して, a の実近傍 $V \subset U$ が存在し, U の任意の複素近傍 \tilde{U} に対して, V の複素近傍 $\tilde{V} \subset \tilde{U}$ で

$$P\mathcal{O}(\tilde{V}) \supset \mathcal{O}(\tilde{U})$$

となるものが存在することである.

証明. 十分性は明らか. 必要性を証明する.

$$PA(V') \supset A(U)$$

となる a の実近傍 $V' \subset U$ が存在する. $V \subset V'$ となる a の実近傍 V を取る.

$$\tilde{V}_\varepsilon = \{x \in \mathbb{C}^n; \operatorname{Re} x \in V, |\operatorname{Im} x| < \varepsilon\}$$

とすれば, V' の任意の複素近傍 \tilde{V}' に対して, $\tilde{V}_\varepsilon \subset \tilde{V}'$ となる $\varepsilon > 0$ が存在する. 従って, U の任意の複素近傍 \tilde{U} に対して,

$$\bigcup_{\varepsilon} P\mathcal{O}(\tilde{V}_\varepsilon) \subset A(U) \subset \mathcal{O}(\tilde{U}).$$

Grothendieck ([1], p.16) により, ある $\varepsilon > 0$ に対して,
 $P\mathcal{O}(\tilde{V}_\varepsilon) \subset \mathcal{O}(\tilde{U})$ となる.

Semi-local 在問題においては, P は 0 階の項を持たない
 と仮定しても一般性を失わない. 以下 $P = \mathbb{P}$ とする.

M の局所座標系を複素近傍まで解析的に延長したものと
 \tilde{M} における実座標系と呼ぶことにする. 複素曲線 C と
 M との $a \in M$ における接触次数を次のように定義する:
 C が $y = g(x)$ の形に表されるような任意の a を中心とする
 実座標系 (x, y) について,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} g^{(j)}(0) &= 0, \quad j = 0, \dots, k, \\ &\neq 0, \quad j = k+1 \end{aligned}$$

であるとき, C は点 $a \in M$ において M と次の接触をするといふ. すべての j について, $\operatorname{Im} g^{(j)}(0) = 0$ のときは, 接触次数は ∞ とする. このとき C は実曲線である.

点 $a \in M$ を中心として実座標系 (x, y) を $Px \neq 0, Py \neq 0$
 かつ $\operatorname{Re}(Py/Px) \neq 0$ となるように取る. t を $Pt = 0$
 の解析的解で, $t(a) = 0$ かつ $dt(a) \neq 0$ となるものとす
 る. 複素曲線 $C_t: t = \text{const}$ は P の特性曲線である.

dx と dt は独立であるから, (x, t) は a を中心とする一
 つの複素座標系である. この座標系においては $P = (Px)\partial/\partial x$

である。座標系 (x, y) における C_t の方程式を $y = \psi(x, t)$ とする。 x の実部を x' , 虚部を x'' とする。

$$\frac{\partial}{\partial x''} \operatorname{Im} \psi = \operatorname{Re} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \operatorname{Re} \frac{Py}{Px} \neq 0$$

であるから、 $\operatorname{Im} \psi(x' + ix'', t) = 0$ を x'' について解いて、 $x'' = \xi(x', t)$ とすることができる。以上をまとめて

命題 2.2. M の各点 a において、 a の複素近傍 \tilde{W} と、 \tilde{W} で定義された a を中心とする実座標系 (x, y) と複素座標系 (x, t) を次のように取ることができます。

$$(i) \quad Pt = 0,$$

(ii) 座標系 (x, t) により \tilde{W} に対応する \mathbb{C}^2 の領域は、
 $X \times T$, $X = X' \times iX''$, X', X'' は \mathbb{R} の開区間, T は
 \mathbb{C} の開集合、という形である。

(iii) $X' \times T$ で定義され、 X'' の値を取る函数 $\xi(x', t)$ が存
 在し、 \tilde{W} においては

$$\operatorname{Im} y = 0 \iff x'' = \xi(x', t).$$

このようなく \tilde{W} は任意に小さく取ることができある。

$C_t \times M$ が交わるととき、接触次数を長とすれば、交点
 において、

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \frac{\partial^j \psi}{\partial x^j} &= 0, \quad j = 0, \dots, k, \\ &\neq 0, \quad j = k+1, \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} (2.1) \quad \frac{\partial^j \xi}{\partial x'^j} &= 0, \quad j = 0, \dots, k, \\ &\neq 0, \quad j = k+1, \end{aligned}$$

である。

さて、 M が 2 次元のとき、Nirenberg-Treves の条件 [3] は次の条件と同値である：

“ M の各点において、 P の複素特性曲線と M との接觸次数は偶数、或は ∞ である。”

更に [5] において、次の事が証明されている。

命題 2.3. M において Nirenberg-Treves の条件が成り立つための必要十分条件は、 M の各点の近傍で、特性曲線はその上に高々一つの零点しか持たないか、或は実曲線になることである。

命題 2.2 の $\xi(x', t)$ について言えば、上の条件は次のようにも表わせよ。

(iv) 各 $t \in T$ について、 x' の函数として $\xi(x', t)$ は高々 1 つの零点しか持たないか、或は $\equiv 0$ となる。

§3. 十分性の証明.

M において Nirenberg-Treves の条件がみたされていると仮定する. M の点, a の任意の実近傍 U に対して, a の複素近傍 \tilde{W} を命題 2.2 と 2.3 の条件をみたし, かつ $V = \tilde{W} \cap M \subset U$ となるように取る.

\tilde{W} の上で不等式

$$|x''| < \varepsilon, \quad |x'' - \xi(x', t)| < \varepsilon$$

にみたすものの集合を \tilde{V}_ε とする. \tilde{V}_ε は V の複素近傍であり, かつ U の任意の複素近傍 \tilde{U} に対して, $\varepsilon > 0$ を十分小さく取れば, $\tilde{V}_\varepsilon \subset \tilde{U}$ となる. 従って, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, V の複素近傍 $\tilde{V} \subset \tilde{V}_\varepsilon$ で, $P\Omega(\tilde{V}) = \Omega(\tilde{V})$ なるものが存在することを証明すれば, a の近傍における semi-local 存在が言える. これを証明するには, 任意の $t \in T$ について, $\tilde{V} \cap C_t$ が单連結であることを示せば十分である [5], [6].

V の各点 β において, 次の 2 つの場合が考えられる:

(I) β を通る特性曲線 $C_{t(\beta)}$ は唯一つの実点, β を持つ.

即ち, $\xi(x', t(\beta))$ は唯一つの零点, $x'(t)$ を持つ.

(II) β を通る特性曲線 $C_{t(\beta)}$ は実曲線である.

即ち, $\xi(x', t(\beta)) \equiv 0$.

(I) の場合, $\delta(x', t(\beta))$ の零点の次数が有限かつ奇数であることに注意すれば, $t(\beta)$ の開近傍 $N_\beta \subset T$ と $\delta(\beta)$, $0 < \delta(\beta) \leq \varepsilon$, が存在して, $t \in N_\beta$ のとき, $\tilde{V}_{\delta(\beta)} \cap C_t$ は单連結である. (II) の場合も同様に N_β , $\delta(\beta)$ が存在する.

$$\tilde{V}_\beta = \bigcup \{\tilde{V}_{\delta(\beta)} \cap C_t ; t \in N_\beta\}, \quad \tilde{V} = \{\tilde{V}_\beta ; \beta \in V\}$$

とおけば, \tilde{V}_β は β の開近傍, 従って, \tilde{V} は V の複素近傍で, $\tilde{V} \subset \tilde{V}_\varepsilon$ である. $\tilde{V} \cap C_t = \{\tilde{V}_{\delta(\beta)} \cap C_t ; N_\beta \ni t\}$ であるから, $\tilde{V} \cap C_t$ は单連結である.

§ 4. § 5における必要性の証明のための準備として, 次の問題を考察する. $X_0 \subset \mathbb{C}^n$ は正則領域, X は X_0 の開部分集合, $P = \partial/\partial x_i$ とし, $P\Omega(X) \subset \Omega(X_0)$ となるための必要条件を求める.

$x \in X$ に対して, $X \cap \{y \in \mathbb{C}^n ; y_i = x_i, i=2, \dots, n\}$ の連結成分で x を含むものを L_x とする. 同値関係 " $L_x = L_y$ " に関する X の商空間を X/P , 写像 $x \mapsto L_x : X \rightarrow X/P$ を π と書くことにする. X/P には π が submersion となるような複素多様体の構造が一意的に存在する. 但し X/P の位相は一般にはハウスドルフでない. $L_{0,x}$, X_0/P , π_0 も同様に定義する.

$c : X/P \rightarrow X_0/P$ を $c(L_x) = L_{0,x}$, $x \in X$, と定義する.

c は local isomorphism である.

命題 4.1. X_0 が正則領域のとき, $P\mathcal{O}(X) \supset \mathcal{O}(X_0)$ なら
は, $c^* : H^1(X_0/P, \mathcal{O}_{X_0/P}) \rightarrow H^1(X/P, \mathcal{O}_{X/P})$ は零写像
である.

証明は [6] の Prop. 2.2 と同様である.

命題 4.2. Z, Z_0 は(必ずしもハウスドルフでない)
1 次元複素多様体, $c : Z \rightarrow Z_0$ は local isomorphism と
する. $c^* : H^1(Z_0, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(Z, \mathcal{O})$ が零写像ならば,
 Z の中には次のような条件をみたす道 α, β は存在しない.

$$(a) \quad \alpha(0) = \beta(0),$$

$$(b) \quad c(\alpha(s)) = c(\beta(s)), \quad 0 \leq s < 1,$$

$$(c) \quad c(\alpha(s)) \neq c(\alpha(1)), \quad c(\beta(s)) \neq c(\beta(1)), \quad 0 \leq s < 1,$$

$$(d) \quad c(\alpha(1)) \neq c(\beta(1)).$$

証明. 条件 (a) ~ (d) をみたす Z の中の道 α, β が存在
したとする. $a = \alpha(1), b = \beta(1), a_0 = c(a), b_0 = c(b)$
とおく. t を a_0 を中心とする局所座標, U_0 その座標
近傍とする. $V_0 = Z_0 - \{a_0\}$ とおけば, V_0 は開集合であ
り, (d) より, b_0 は V_0 に属する. さらに, $U_0 \cup V_0 =$
 Z_0 かつ $U_0 \cap V_0 = U_0 - \{a_0\}$ である. $U = c^{-1}(U_0)$,
 $V = c^{-1}(V_0)$ とおく. 次の可換な図式において, 行は exact

である (Mayer-Vietoris).

$$\mathcal{O}(U_0) \oplus \mathcal{O}(V_0) \rightarrow \mathcal{O}(U_0 \cap V_0) \rightarrow H^1(Z_0, \mathcal{O})$$

$$\downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow c^*$$

$$\mathcal{O}(U) \oplus \mathcal{O}(V) \rightarrow \mathcal{O}(U \cap V) \rightarrow H^1(Z, \mathcal{O})$$

$h_0 = 1/t$ とおけば, $h_0 \in \mathcal{O}(U_0 \cap V_0)$. 従つて, c^* が零写像ならば, $f \in \mathcal{O}(U)$, $g \in \mathcal{O}(V)$ が存在して, $U \cap V$ において, $f - g = c^* h_0$.

函数 μ の点 z における芽を μ_z と書くことにする.

$c : Z \rightarrow Z_0$ は local isomorphism であるから,

$$\tilde{c}(\mu_z) = (\mu \circ c^{-1})_{c(z)}$$

により, 写像 $\tilde{c} : \mathcal{O}_z \rightarrow \mathcal{O}_{z_0}$ を定義することができます.

\mathcal{O}_{z_0} の中の道 $\tilde{\alpha}$ と $\tilde{\beta}$ を

$$\tilde{\alpha}(s) = \tilde{c}(g_{\alpha(s)}), \quad \tilde{\beta}(s) = \tilde{c}(g_{\beta(s)}), \quad 0 \leq s < 1,$$

と定義する. (b) により, $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ は Z_0 の中の同じ道の上にある. さらに, (a) より, $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0)$. 解析接続の一意性

により, $\tilde{\alpha}(s) = \tilde{\beta}(s)$, $0 \leq s < 1$, となる. 従つて,

$$g(\alpha(s)) = g(\beta(s)), \quad 0 \leq s < 1. \quad s が 1 に十分近いとき,$$

$$\alpha(s) \in U \cap V, \text{ かつ } f(\alpha(s)) \rightarrow f(a), \quad g(\alpha(s)) = g(\beta(s)) \rightarrow g(b).$$

従つて, $\mu(c(\alpha(s))) = f(\alpha(s)) - g(\alpha(s)) \rightarrow f(a) - g(b)$.

他方, $c(\alpha(s)) \rightarrow a_0$ だから, $\mu(c(\alpha(s))) \rightarrow \infty$. 矛盾.

§5. 必要性の証明.

M において Nirenberg-Treves の条件が成り立たないとする。 M の或る点 a において、特性曲線の接触次数 k は有限かつ奇数である。 a の複素近傍 \tilde{W} と座標系 (x, y) , (x', t) を命題 2.2 におけるように取る。 $U = \tilde{W} \cap M$, $\tilde{U}_\varepsilon = \{ |x''| < \varepsilon, |x'' - \xi(x', t)| < \varepsilon \}$ とおく。 \tilde{U}_ε は U の複素近傍である。命題によれば、 a の任意の実近傍 $V \subset U$ に対して、 $\varepsilon > 0$ が存在し、 V の任意の複素近傍 $\tilde{V} \subset \tilde{U}_\varepsilon$ に対して、 $P\mathcal{O}(\tilde{V}) \neq \mathcal{O}(\tilde{U}_\varepsilon)$ となることを証明すればよい。写像 $\tilde{V}/P \rightarrow \tilde{U}_\varepsilon/P$ を \sim と書く。命題 4.1, 4.2 によれば、 \tilde{V}/P の中に命題 4.2 の条件 (a) ~ (d) を満たす道 α, β が存在することを言えればよい。

(2.1) より

$$\xi(x', t' + it'') = at' + bt'' + cx'^{k+1}.$$

ここで、係数 a, b, c は (x', t', t'') の解析函数で、
 $(a_0, b_0) = (a(0, 0, 0), b(0, 0, 0)) \neq (0, 0)$, $c_0 = c(0, 0, 0) \neq 0$.
 $c_0 > 0$ としよう。 $k+1$ は偶数であるから、 \tilde{W} を十分小さく取つておけば、各 $t \in T$ に対して、 $\xi(x', t)$ は X' において最小値を取る。 $t(s) = -(a_0 + ib_0)s$ とおけば、
 $\min \{ \xi(x', t(s)) ; x' \in X' \}$ は s の単調減少函数である。十分小さく s に対して、 $\xi(x', t(s))$ は X' において 2 つの零

点 $x_1(s), x_2(s)$ ($x_1(s) < x_2(s)$) を持つ。 $x_1(0) = x_2(0) = 0$ とする。 (x, t) 座標が $(x_1(s), t(s)), (x_2(s), t(s))$ の点を $\alpha'(s), \beta'(s)$ とすれば、 α', β' は U の中の道である。

$\alpha'(0) = \beta'(0) = 0$ だから、十分小さい δ に対して、 $\alpha'(s), \beta'(s) \in V, 0 \leq s \leq \delta$, である。 $2\varepsilon = \min \{ \Im(x', t(\delta)) ; x' \in X' \}$ とおく。 V の任意の複素近傍 $\tilde{V} \subset \tilde{U}_\varepsilon$ に対して、射影 $\tilde{V} \rightarrow \tilde{V}/P$ を π , $\alpha(s) = \pi(\alpha'(s)), \beta(s) = \pi(\beta'(s))$ とおく。 $\alpha(0) = \beta(0)$ である。 $c(\alpha(s)), c(\beta(s))$ は $\tilde{U}_\varepsilon \cap C_{t(s)}$ の $\alpha'(s), \beta'(s)$ を含む連結成分であるから、 $c(\alpha(s)) = c(\beta(s)), 0 \leq s < \delta$, かつ $c(\alpha(\delta)) \neq c(\beta(\delta))$ である。 $0 \leq s < \delta$ のとき, $t(s) \neq t(\delta)$ だから, $c(\alpha(s)) \neq c(\alpha(\delta)), c(\beta(s)) \neq c(\alpha(\delta))$. QED.

参考文献

[1] Grothendieck, A.; Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires.

Memoirs Amer. Math. Soc., No. 16, 1955.

[2] Hörmander, L.; Linear partial differential operators.

Grundl. d. Math. Wiss., 116, Springer, 1963.

- [3] Nirenberg, L. and F. Treves ; Solvability of a first order linear partial differential equation.
Comm. Pure Appl. Math. 14 (1963), 331-351.
- [4] Schapira, P. ; Solutions hyperfonctions des équations aux dérivées partielles du premier ordre.
Bull. Soc. Math. France 97 (1969), 243-255.
- [5] Suzuki, H. ; Local existence and analyticity of hyperfunction solutions of partial differential equations of first order in two independent variables.
J. Math. Soc. Japan 23 (1971), 18-26.
- [6] Suzuki, H. ; On the global existence of holomorphic solutions of the equation $\frac{\partial u}{\partial x_1} = f$.
to appear in *Sci. Rep. Tokyo Kyoriku Daigaku*.