

指數性の検定、分布型の検定

日本アイ・ビー・エム 萩谷政昭

1. まえがき

「確率分布の特徴づけ」の研究では、個々の分布の個性を
如何ぞとすか、本報告ではこれに反し、諸分布型
を单一の規準に従じ比較するべく、「管理社会型接近」
について述べる。この比較では、個々の確率分布と分布
型を、その裾の軽さ（重さ）によじ比べる。

分布型を比較しようとすると、まず「分布範囲または支持
域(support)が重きのものをどう扱うか」、という問題が
生じる。実数軸全体の上の分布と、正の部分の上の分布とを
比較するにはあまり意味がないのである。連續分布と離
散的分布をいはうに扱うから云ふは議論の分かれ点と
は云ふ。いはうに扱つて云ふのが難い、これが実情である。
離散的分布を、たゞえば自然数上の分布では「分布型とは
何ぞ」、云々とも問題とする。

$\Xi = \Xi^*$ は支持域が $(0, \infty)$ に含まれる分布の族で、 Γ を取
り上げ、分布型検定問題を目標として議論する。 $(-\infty,$
 $\infty)$ 上の、既知の某の関数 φ の分布の族も、 Ξ^* の議
論で覆うことができる。

2. 分布の橋の比較

分布関数 $G(y)$ をもつ確率変数 Y を想定する。またより
も橋の軽い分布関数 $F(x)$ をもつ確率変数 X を定義する。次
の制限をおく。

$$(A) \quad F(0) = G(0) = 0; \quad F(x), G(y) \text{ は連続}; \\ G(y) > 0, \quad y > 0.$$

すなはち X , Y は確率密度 $f(x), g(y)$ をもつて
おりとする。

定義 1

$$(1) \quad X \prec Y \quad (\mathcal{T}_4)$$

$$\frac{d}{du} f(F^{-1}(u)) / \frac{d}{du} g(G^{-1}(u)), \quad 0 < u < 1,$$

が存在して非減少。ただし(分子、導関数は連続であり),

$$\lim_{u \rightarrow 1^-} f(F^{-1}(u)) = \lim_{u \rightarrow 1^-} g(G^{-1}(u)) = 0.$$

$$(2) \quad X \prec Y \quad (\mathcal{T}_3)$$

$$G^{-1}F(x) \text{ が } 0 < F(x) < 1 \text{ で凸}.$$

(3) $X \prec Y (\mathcal{I}_2)$ $G^{-1}F(x) \rightsquigarrow 0 < F(x) < 1$ 二星型。(4) $X \prec Y (\mathcal{I}_1)$ $G^{-1}F(x) \rightsquigarrow 0 < F(x) < 1$ 增加函数。(5) $X \prec Y (\mathcal{I}_{II})$

$$(1-F(x)) / \int_x^{\infty} g(G^{-1}F(x)) dx, \quad 0 < F(x) < 1$$

かくはん \mathcal{I}_{II} は非減少。(6) $X \prec Y (\mathcal{I}_I)$

$$\int_x^{\infty} g(G^{-1}F(x)) dx \leq (1-F(x)) \int_0^{\infty} g(G^{-1}F(x)) dx, \quad 0 < F(x) < 1.$$

定義 $\mathcal{I}_I \Rightarrow \mathcal{I}_2$ の説明。a. (2) は $f(F'(u)) / f(G'(u)) \rightsquigarrow$ が正直な \mathcal{I}_2 である, これが非減少 \mathcal{I}_2 と同等である。

b. 関数 $h(x)$ が一星型 (starshaped) であると, $h(\lambda x) \geq \lambda h(x)$, $0 < \lambda < 1$, すなわち $h(x)/x$ が非減少 \mathcal{I}_2 であることを。また関数 $h(x)$ が増加函数 (superadditive) であると $h(x+y) \geq h(x)+h(y)$ であることを。

命題 1 a. $X \prec Y (\mathcal{I}_i) \Rightarrow X \prec Y (\mathcal{I}_j)$ と命題を簡単化 $\mathcal{I}_i \Rightarrow \mathcal{I}_j$ を表わすと, 次の圖形的解釈がある。

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_4 &\Rightarrow \mathcal{I}_3 \Rightarrow \mathcal{I}_2 \Rightarrow \mathcal{I}_1 \\ &\Rightarrow \mathcal{I}_{II} \Rightarrow \mathcal{I}_I \end{aligned}$$

しかし, これが以外の関係は一般, $G = \pi_{\alpha}, \beta$ は成立しない。

b. 関係 $X \prec Y$ (J_i ; $i = 1, 2, 3, 4$) は推進的である。

c. 関係 $X \prec Y$ (J_i ; i は任意) は X の尺度の変化 χ , $F(0) = 0$ について; 規則 χ の位置の変化に依存しない。すなわち

$$X \prec Y (J_i) \Rightarrow \frac{X-\mu}{\rho} \prec Y (J_i) \quad (\forall \mu, \forall \rho > 0)$$

($X \prec Y$, 関係は相手の尺度を除く, $Y_{1=}, \dots$ に相当。変換 χ も同様である。)

証明 a. $J_4 \Rightarrow J_3$. 次の補助定理による。

補助定理 A. $p(x)/q(x) \rightarrow -\infty \leq a < x < b \leq \infty$ かつ $p(x), q(x)$ が非減少であるとき

$$P(x) = \int_a^x p(x) dx + C_p, \quad Q(x) = \int_a^x q(x) dx + C_q$$

とするとき, 次の条件を満たす下で $P(x)/Q(x), a < x < b$, $\rightarrow -\infty$ である。

1. 非減少である: $q(x) \rightarrow \text{連続}$

$$\lim_{x \rightarrow b^-} P(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} Q(x) = 0,$$

$$P(x), Q(x) \geq 0, \quad a < x < b.$$

$J_3 \Rightarrow J_{II}$. 上の補助定理の变形によつて証明する。

$J_{II} \Rightarrow J_I$. J_{II} は $x \rightarrow 0$ の場合と比較すれば。

$J_3 \Rightarrow J_2 \Rightarrow J_1$. F, G は関数 $A \rightarrow F$ かつ, $G'F = 1$ である。星型ならば凸である。

$\mathcal{I}_2 \neq \mathcal{I}_1$ の反例。 $G(y) = y^2$ とする。 $G'F(x) = \sqrt{F(x)}$
 $= K(x)$ 五次のよろ引型関数とする。

$$K(x) = \begin{cases} ax^2, & 0 < x < c, \\ bx^2 + (1-b)x, & c < x < 1, \end{cases} \quad \begin{array}{|l} 1 < a, 1 > ac \\ b = \frac{1-ac}{1-c} \end{array}$$

1° $x - t$ を適当に選ぶ ($\pi_1 \approx 2.17$, $a=9$, $c=0.1$) とする
 $\times \mathcal{I}_1$ の成立を示す。

他の関係の式も同様にして G が一様分布, 指数分布の場合について述べる。

b. \mathcal{I}_4 は比1より定義される, $\mathcal{I}_3, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_1$ は, 凸, 引型, 増加法, \times ; 拾復の関数の合成 \rightarrow \times が可能, \rightarrow \times , \rightarrow \times , π_1 で凸関数の凸関数は凸関数である, \times が成り立つ。

c. 定義。各式は \exists , $\exists F(x) \in F((x-\mu)/\sigma)$ と定めると
 \times は弱い。原点 \times 不満, 変換 $t=x-\mu$ が適する。 \times で弱められると
 \times .

31 定義 1: 基本的確率の分布型の関連を調べる次の通りとする。

a. 正規(正部分) \times ロジスティック(正部分) \times 指数 \times ハーレー (\mathcal{I}_4)

b. ロジスティック(正部分) \times コニー (\mathcal{I}_4)

コニーは指數より弱い。分布とみなされることは、実際 $\times \mathcal{I}_2$ や \mathcal{I}_3 の意味で全く断言していいこと、誤り、かかわらずの定義では \mathcal{I}_1 の意味で比較不能である。それは、中

心部分飞少し隙けばコーナーは弱めに弱がる。これをかく、
定義 1 で $(0, \infty)$ 全域での比較とすらべてある。

c. ハルト $F_\alpha(x) = 1 - 1/(1+x)^\alpha$, $0 < x < \infty$. $\alpha \rightarrow \infty$

いはく \mathcal{I}_4 の意味で弱がる。

d. ワイル $F_\alpha(x) = 1 - \exp(-x^\alpha)$, $0 < x < \infty$. $\alpha \rightarrow \infty$

いはく \mathcal{I}_3 の意味で弱がる。 \mathcal{I}_4 の意味で $x^{\alpha_1} > x^{\alpha_2}$
 $= \alpha_1, \alpha = \alpha_2$ のとき $x^{\alpha_1} > x^{\alpha_2}$ が比較不可能である。

e. ハー $F_\alpha(x) = 1 - 1/(1+x^\alpha)$, $0 < x < \infty$, $\alpha \rightarrow \infty$

いはく \mathcal{I}_4 の意味で弱がる。

3. 一様分布, 指数分布との弱の比較

基準とする分布関数 $G(y)$ と(2)一様分布, 指数分布を選ぶことは興味深い。まず一様分布をとりあげる。記号 U は一様分布, 分布関数 G は弱がる変数を表すとする。

命題2 a. 一様分布 $\sim \mathcal{I}_4$ の意味で比較可能である。
すなはし $\mathcal{I}_{\text{II}}, \mathcal{I}_{\text{I}}$ の意味で比較可能である。 $a = F'(1) < \infty$ のとき $\mathcal{I}_{\text{II}} > \mathcal{I}_{\text{I}}$ である。定義 1 は次のようである。

(2) $X \sim U(\mathcal{I}_{\text{I}})$ $F(x)$ が凸. $f(x) = \frac{1}{b-a}$ ならば非減少。

(3) $X \sim U(\mathcal{I}_{\text{I}})$ $F(x)$ が星型。

(4) $X \sim U(\mathcal{I}_{\text{I}})$ $F(x)$ が弱がる。

(5) $X \sim U(\mathcal{I}_{\text{II}})$ $(1-F(x))/(a-x)$ が非減少。

(6) $X \in u(\mathcal{J}_x)$ $F(x) = x/a$.

$\exists \beta: X \in u(\mathcal{J}_\beta) \Leftrightarrow F'(1) < \infty$ すなはち $\beta = 1$.

b. 次に、固式の関係が成り立つ、 $=$ 以外は成り立たない。

$$\begin{array}{c} \mathcal{J}_3 \Rightarrow \mathcal{J}_2 \Rightarrow \mathcal{J}_1 \\ \Downarrow \\ \Downarrow \mathcal{J}_2 \Rightarrow \mathcal{J}_1 \end{array}$$

証明 a. 比較可能 \Rightarrow 条件は定義より明らか。 $F(x)$
 $\in u(\mathcal{J}_1) \Leftrightarrow \exists \beta \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} |x| < \delta \Rightarrow F(x) \geq \beta - \varepsilon$
 $\exists x_0 \in \mathbb{R} \text{ で } F(x_0) = 1 \Rightarrow F(x_0/\varepsilon) \geq \beta - \varepsilon \Rightarrow F(x_0) \geq 1 - \varepsilon$. $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3$
 \Rightarrow 意味する。確率論上では「分布」 P_x が $x = x_0$ で
 β .

b. $\mathcal{J}_1 \Rightarrow \mathcal{J}_2$ は (6) の条件が成り立つ。

$\mathcal{J}_2 \not\Rightarrow \mathcal{J}_1$ は

$$F(x) = \begin{cases} a_1 x & 0 < x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} a_1 + a_2 (x - \frac{1}{3}) & \frac{1}{3} < x \leq \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} a_1 + \frac{1}{3} a_2 + a_3 (x - \frac{2}{3}) & \frac{2}{3} < x \leq 1 \end{cases}$$
 $0 < a_2 < a_1 < 1 < a_3, a_1 + a_2 + a_3 = 1$

これが成り立つ。反対に $\mathcal{J}_2 \not\Rightarrow \mathcal{J}_1$ は上と反対に $1 < a_1 \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} a_2$ である。

注意 $u \in X(\mathcal{J}_3, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_1)$ \Leftrightarrow 上と成る関係が成り立つ。つまり $F(x)$ が凸 ($f(x)$ が非増加), $F(x)/x$ が非増加, $F(x)$ が減加法的, である。 $(\exists u \in X(\mathcal{J}_2)) \Leftrightarrow$
 $(1-x) / \int_{g(x)}^{\infty} g^2(y) dy$ が非増加, である。

指數分布との比較のため、その分布関数と生存関数を
 e^{-x} とおこう。 $G(x) = 1 - e^{-x}$, $G^{-1}(u) = -\log(1-u)$, $g(G^{-1}(u)) =$
 $1 - u$ は注意する。

命題3 a. 指數分布と比較するとき定義 1 のように \leq とする。

3.

(1) $X \leq e (\mathcal{I}_4)$ Polya type Frequency \leq . $-\log f(x)$ が凸,
 すなはち $(X-a | X>a) \leq (X-a' | X>a')$ (R_3),
 $\forall a > a' > 0$.

(2) $X \leq e (\mathcal{I}_3)$ Increasing Hazard (or Failure) Rate.

$-\log(1-F(x))$ が凸, すなはち
 $(X-a | X>a) \leq (X-a' | X>a')$ (R_1), $\forall a > a' > 0$.

(3) $X \leq e (\mathcal{I}_2)$ Increasing Hazard (or Failure) Rate Average.

$-\log(1-F(x))$ が单調増加。

(4) $X \leq e (\mathcal{I}_1)$ New Better than Used. $-\log(1-F(x))$ が
 单調増加的, すなはち $(X-a | X>a) \leq X$ (R_1), $\forall a > 0$.

(5) $X \leq e (\mathcal{I}_{II})$ $-\log \int_x^\infty \{1-F(t)\} dt$ が凸。すなはち
 $(X-a | X>a) \leq (X-a' | X>a')$ (R_E), $\forall a > a' > 0$.

(6) $X \leq e (\mathcal{I}_I)$ $1-F(x) \geq \int_x^\infty (1-F(t)) dt / \int_x^\infty (1-F(t)) dt$
 すなはち $(X-a | X>a) \geq X$ (R_E), $\forall a > 0$.

ここで R_3, R_1, R_E は確率的大小関係で, X の分布密度が単調
 かつ非減少, 分布関数が単調減少, 期待値がより大, を意味する。

b. 次の包含関係が成立し、二つ以外は成り立たない。

$$\begin{array}{c} \mathcal{I}_4 \Rightarrow \mathcal{I}_3 \Rightarrow \mathcal{I}_2 \Rightarrow \mathcal{I}_1 \\ \Downarrow \\ \mathcal{I}_2 \Rightarrow \mathcal{I}_1 \end{array}$$

証明 a. 破壊的大小の関係を導くために示す。

b. $\mathcal{I}_1 \Rightarrow \mathcal{I}_2$ かつ $\mathcal{I}_1 \Rightarrow \mathcal{I}_E$ だから \mathcal{I}_1 が最も大きい。

$\mathcal{I}_2 \not\Rightarrow \mathcal{I}_1$. $1 - F(x) = \alpha x^{\alpha-1} e^{-x^\alpha}$, $\alpha > 1$, $x \geq 0$

$$\psi(x) = -\log(1 - F(x)) = x^\alpha - (\alpha-1)\log x - \log \alpha \quad \text{とすると} \quad \psi'(x) = \alpha x^{\alpha-1} - \frac{\alpha-1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{x^\alpha - (\alpha-1)}{x} + \frac{1}{x} = \frac{x^{\alpha-1}(x - (\alpha-1)) + 1}{x} \geq 0$$

u. 実際. $\psi(2x) - 2\psi(x) < 0$, $x \rightarrow 0+$.

$\mathcal{I}_2 \not\Rightarrow \mathcal{I}_E$. $1 - F(x) = e^{-\varphi(x)}$, $\varphi(x) = \begin{cases} x^\alpha, & \alpha > 1, \quad x \leq 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$

$x \rightarrow 0+$,

$$\{1 - F(1-\varepsilon)\} / \int_{1-\varepsilon}^{\infty} (1 - F(t)) dt = \alpha \varepsilon / (e^{-1} + \varepsilon) \downarrow (\varepsilon \rightarrow 0)$$

4. 確率統計の検定 (\mathcal{I}_3 , \mathcal{I}_2)

X_1, X_2, \dots, X_n を $F(x)$ から破壊標本とするとき、検定問題

$$H_0: F = G \quad (\mathcal{I}_3) \quad (\text{すなはち } F \succ G \Leftrightarrow F \not\sim G \quad (\mathcal{I}_3)).$$

$$H_1: F \not\sim G \quad (\mathcal{I}_2)$$

正考査. 検定統計量を導くために $F(x) < G(x)$ の二乗誤差を考査する。

$$H_F^{-1}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{F^{-1}(t)} g[G^{-1}F(x)] dx = \int_0^t \frac{g(G^{-1}(u))}{f(F^{-1}(u))} du$$

二項式分布の検定問題は

$$H_0: H_F(x) \text{ が } 0 < H(x) < 1 \text{ の確率}.$$

$$H_1: H_F(x) \text{ が } 0 < H(x) < 1 \text{ の凸}.$$

この問題は実現される。しかし、この実現が到達する確率は、

$K \prec F \prec G$ (\mathcal{T}_3) といふ関係があるとき、これが

$$\frac{H_K'(t)}{H_K'(1)} \geq \frac{H_F'(t)}{H_F'(1)} \geq t, \quad 0 \leq t \leq 1$$

(分子は有限であることに注目), といふ確率的不等式が成り立つことである。この $H_F'(t)$ を実験分布関数を用いて近似すれば

$$H_{F_m}'(t) = \int_0^{F_m^{-1}(t)} g[G^{-1}F_m(u)] du$$

$$\begin{aligned} H_{F_m}'\left(\frac{i}{n}\right) &= \sum_{j=1}^i g[G^{-1}\left(\frac{j-1}{n}\right)] (X_{ij} - X_{ij-1}) \\ &= n^{-1} \sum_{j=1}^i (n-j+1) (X_{ij} - X_{ij-1}) \quad (G(y) = 1 - e^{-y}) \end{aligned}$$

これは、寿命試験の言葉では、 X_{ij} が死ぬまでの寿命の累和 (total time on test) である。

命題4 (Barlow + Doksum) $K \prec F \prec G$ (\mathcal{T}_3) とき

$$\frac{H_{K_m}'(i/n)}{H_{K_m}'(1)} > \frac{H_{F_m}'(i/n)}{H_{F_m}'(1)} > \frac{H_{G_m}'(i/n)}{H_{G_m}'(1)} \quad (\mathcal{R}_1)$$

すなはち ($W_i \equiv H_{F_m}'(i/n) / H_{F_m}'(1)$, $i = 1, \dots, n$) の非減少関数を検定統計量とする検定 ϕ の検出力は $\beta_\phi(K) \geq \beta_\phi(F) \geq \beta_\phi(G)$.

(このようす検出力, 一存する母数を假定して被るは isotonic と呼ぶ
こと。)

具体的な検定統計量として, 次のように定められる。

$$(1) \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m-1} J(W_j) \quad J(\cdot) \text{ は } [0, 1] \text{ 上の増加関数.}$$

特に $J(x) = x \rightarrow x \geq 0$, $\sum_{j=1}^{m-1} \sum_{j=1}^i (n-j+1)(X(j) - X_{(j-1)}) / \sum_{j=1}^m (n-j+1)(X_{(j)} - X_{(j-1)})$ は, cumulative total time on test statistic と呼ばれる, これはこの統計量が常に 0 以上であることを示す規則性の条件, J が J の範囲内である, 渐近的では $= \rightarrow \chi^2$ である。

$$(2) \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m-1} L\left(\frac{j}{m}\right) W_j, \quad L(u) \geq 0.$$

$$(3) \sup |W_j - j/m|.$$

$\chi = 3 \bar{x}$, 上記の (1), (2) は和を書き直せば $X_{(j)} / \sum X(j)$ の 1 次結合 $\chi \sim \bar{x}$ がわかる。このよしで統計量を用いては, 実は, より強い命題が成立する。

命題 5 $K \prec F \prec G$ (J_2) $\Leftrightarrow \exists \chi, \quad G, F, K$ が χ が χ の確率標本の順序統計量 $X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(m)}, Y_{(1)} \leq \dots \leq Y_{(m)}, Z_{(1)} \leq \dots \leq Z_{(m)}$ に従う。

$$\frac{\sum_{j=1}^i c_j Z_{(j)}}{\sum_{j=1}^m c_j Z_{(j)}} \succ \frac{\sum_{j=1}^i c_j Y_{(j)}}{\sum_{j=1}^m c_j Y_{(j)}} \succ \frac{\sum_{j=1}^i c_j X_{(j)}}{\sum_{j=1}^m c_j X_{(j)}} \quad (\mathcal{R}_1)$$

とする。 $c_1, \dots, c_m > 0$ は任意の数。

証明 今 T_2 の命題 4 と証明は同じ。 X, Y, Z の順序 T は

証明すれば十分である。 $V_i = G^{-1}F(Y_{(i)})$ とすると、 $G^{-1}F$ が零型であるから、 $V_i / Y_{(i)}$ が $i=1$ の場合非減少である。分子子 $i = C_i$ を乗じて、補助定理 A は類似、定理 E を用いたれば、 $\sum_{j=1}^n C_j V_j / \sum_{j=1}^n C_j Y_{(j)}$ が $i=1$ の場合非減少となる。

$$\frac{\sum_{j=1}^n C_j V_j}{\sum_{j=1}^n C_j Y_{(j)}} \leq \frac{\sum_{j=1}^n C_j V_j}{\sum_{j=1}^n C_j Y_{(j)}} \text{ と } \frac{\sum_{j=1}^n C_j Y_{(j)}}{\sum_{j=1}^n C_j Y_{(j)}} \geq \frac{\sum_{j=1}^n C_j V_j}{\sum_{j=1}^n C_j V_j}$$

(V_1, \dots, V_n) は $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$ と同様に分布の従事より上記の結論が得られる。

$C_1 = \dots = C_n = 1$ とし、上の統計量を 1 次結合を作れば、式記す。由り (1), (2) の統計量が得られる。

5. 確率密度の検定 (J_i)

X_1, X_2, \dots, X_n が $F(x)$ 以下の研究標本とするとき、検定問題

$$H_0: F = G(J_i) \quad (F > G \Leftrightarrow F \prec G(J_i))$$

$$H_1: F \not\sim G(J_i)$$

を考える。より確か J_2, J_3 の統計量で立つことは前節の検定を用いる方法より大きな検出力を期待できるが、一方で立てる方法より下の方法の検定法を参考にしてよい。

検定統計量を導く過程として、 G が指数分布の場合を示す。

$$3. F \prec e (\mathcal{I}_1) \Leftrightarrow \bar{F}(x)\bar{F}(y) \geq \bar{F}(x+y), \bar{F}(x) = 1 - F(x)$$

$$\Rightarrow \iint \{ \bar{F}(x)\bar{F}(y) - \bar{F}(x+y) \} dF(x) dF(y) \\ = \frac{1}{4} - \iint \bar{F}(x+y) dF(x) dF(y) \geq 0$$

(左=右, 右= $\iint \bar{F}_m(x+y) d\bar{F}_m(x) d\bar{F}_m(y) \approx 1$ と見えていたが、実際

$\bar{F}_m = x^m$ に近づくので、二点と三点近似は同等である。)

L2

$$J_n(X_1, \dots, X_m) = \frac{2}{n(n-1)(n-2)} \sum' \phi(X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2} + X_{\alpha_3})$$

$$\phi(a, b) = \begin{cases} 1 & a \geq b \\ 0 & a < b \end{cases}$$

$$\Sigma': 1 \leq \alpha_1 \leq m, \alpha_1 \neq \alpha_2, \alpha_1 \neq \alpha_3, \alpha_2 < \alpha_3$$

$$\rightarrow \text{添字 } \sim \text{ が } n(n-1)(n-2)/2 \text{ 個} \rightarrow 3, 4, 5, (1, 2, 3)$$

$$= 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot m.$$

この定理の次の一命題が容易にわかる。

命題6 (Hollander + Proschan) $(X_1, \dots, X_m), (Y_1, \dots, Y_n)$

F, G がともに確率標本である時、 $F \prec G (\mathcal{I}_1)$ ならば

$$J_n(X_1, \dots, X_m) \leq J_n(Y_1, \dots, Y_n). \quad (R_1).$$

左=右の証明から左=右の逆も成り立つ。確率標本である J_n の既定規準を求める左=右を、右=左一般化 $G = G_1 = \text{確率標本}, X = X_1, \dots, X_m$ 小さな順序で並べても容易にわかる。左が少しだけ大きくなると、左= $G(X)$ が簡単で右が少しだけ大きくなると、カルロ計算で左が右を上回るといふ。

6. 方かく 12.

残された問題を列挙しておき。

- (1) 混合分布の確率密度を $f(x)$ と比較する。 x
- (2) $X < Y$ (T_4) の検定を考えよ。 x
- (3) 正規分布の検定 \Rightarrow 2 節 4, 5 節の論述を参考。 x
一般に $x \in (-\infty, \infty)$ の下では中心不知りの分布、
確率密度 $f(x)$ (重み w) 検定を考えよ。 x
- (4) 离散分布の分布型の検定。 $T = \chi^2$ とする幾何分布、 $\text{Po}(\lambda)$
 $\text{Bin}(n, p)$ 分布。
- (5) 確率密度 $f(x)$ の度 χ^2 著しく χ^2 分布より χ^2 分布型の指
標づけ。

JX 上。

参照文献

§§ 2-3 鹤本武美・渋谷政昭, 確率的大小 $\chi^2 = 18.5 \times 10^{-2}$ の推論, 分布, 確率密度と中心化 χ^2 , 日本数

学会秋季総合分科会, 1973年, 統計数学分科会予稿

§ 4 R. E. Barlow and K. A. Doksum, Nonparametric tests for
convex orderings, 6th Berkeley Symposium (1972),
293-323.

二点と同内容, 七つ次の書は参考。

R. E. Barlow, D. J. Bartholomew, J. M. Bremner and
H. D. Brunk; Statistical Inference under Order
Restrictions, John Wiley, 1972.

- § 5 M. Hollander and F. Proschan, Testing whether
new is better than used, Ann. Math. Stat., 43
(1972), 1136-1146.

(上記 稲葉・三谷著, 文部省選定.)