

Stieltjes 変換による分布の特徴づけ
—特に单峰分布とモーメント問題について—

阪大 教養 石井 恵一

1. 序

Stieltjes 変換はモーメント問題の解析的研究において Nevanlinna 等により用いられ古典的な道具であるが、分布とモーメントの関係を調べるのに便利である。

筆者はだいぶ以前に [2]において、この変換を单峰分布 (unimodal distribution) の特徴づけに応用し、特に单峰分布のモーメント問題がそれを用いて容易に扱われるこことを示した。ここでは、まずその結果の概要を引用した上で、さらに单峰分布の構造を Stieltjes 変換を用いて考察することにしたい。

定義 F を実数空間上の確率分布とするとき、

$$I(z; F) = \int_{-\infty}^z \frac{dF(t)}{z-t} \quad (z: \text{複素数})$$

$\in F$ の Stieltjes 変換という。

定理1 (cf. Shohat-Tamarkin [1], Chap. II).

$I(z; F)$ は複素平面上の $\Im z = y > 0$ において analytic, $\Im I(z; F) \leq 0$, かつ, 任意の ε ($0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$) に対して扇形領域

$$(1) \quad \varepsilon \leq \arg z \leq \pi - \varepsilon$$

において $z \rightarrow \infty$ とするととき

$$(2) \quad z I(z; F) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dF(t) = 1.$$

逆に, 関数 $f(z)$ が " $y > 0$ " analytic, $y > 0$ で $\Im f(z) \leq 0$, かつ, 扇形領域 (1) で $z \rightarrow \infty$ のとき $z f(z) \rightarrow 1$ をみたすならば, $f(z)$ は $y > 0$ においてある分布関数 F の Stieltjes 変換であり, F は一意的である。

[注] とくに, F が開区間 J 上の分布である必要条件は, $I(z; F)$ が複素平面上実軸上の区间 J を除いて analytic となる (cf. Isii [2]).

定理2 (cf. [1]). F が $2n$ 次までのモーメント μ_r ($r = 1, 2, \dots, 2n$) をもつとき,

$$(3) \quad I(z; F) = \frac{1}{z} + \frac{\mu_1}{z^2} + \dots + \frac{\mu_{2n}}{z^{2n+1}} + R_{2n+1}(z),$$

ただし, 扇形領域 (1) で $z \rightarrow \infty$ のとき $R_{2n+1}(z) = o(z^{-2n-1})$ と表わされる。

逆に, 分布 $F \rightarrow$ Stieltjes 変換 $I(z; F)$ が (3) の形に表わされるならば F は $2n$ 次までのモーメントをもち, それらは

(3) の右辺における $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{2n}$ は等しい。

逆変換 (cf. Stone [3]). $t_1 < t_2$ に対して

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [F(t_2+0) + F(t_2-0)] - \frac{1}{2} [F(t_1+0) + F(t_1-0)] \\ = \lim_{\delta \rightarrow +0} -\frac{1}{\pi} \int_{t_1}^{t_2} I_m \bar{I}(t+i\delta; F) dt \end{aligned}$$

2. 单峰分布

定義. 分布 F が mode β において 单峰であるとは,
 $x_1 < x_2 < \beta < x_3 < x_4$ を満たす任意の x_1, x_2, x_3, x_4
 に対して

$$\begin{aligned} F\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) &\leq \frac{1}{2} \{ F(x_1) + F(x_2) \} \\ F\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right) &\geq \frac{1}{2} \{ F(x_3) + F(x_4) \} \end{aligned}$$

が成り立つこと。

この定義は次の二こと同値である:

上のようす x_1, x_2, x_3, x_4 と任意の $h > 0$ に対して

$$F(x_1) - F(x_1-h) \leq F(x_2) - F(x_2-h)$$

$$F(x_3+h) - F(x_3) \geq F(x_4+h) - F(x_4)$$

定理3 (cf. [2]). F が β において 单峰であるための必
 ず条件は、任意の θ ($0 < \theta < \pi$) に対して、半直線 $\arg(z-\beta) = \theta$ に沿って z が β から遠ざかるとき $I_m \bar{I}(z; F)$ が 単調
 非減少なること。

- 系 1 F が β において单峰であるための必要十分条件は、
 - $(z-\beta) I'(z; F)$ がある分布の Stieltjes 变換であること。

証明 $\beta = 0$ として一般性を失わない。

必要) F が 0 において单峰とする。 $f(z) = I(z; F)$ と
 おき、 $z = r e^{i\theta}$ とかくと、

$$\frac{\partial}{\partial r} f(z) = f'(z) \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{z}{r} f'(z)$$

だから、定理 3 により $\operatorname{Im} z = y > 0$ において

$$(4) \quad \operatorname{Im}[z f'(z)] \geq 0.$$

$g(z) = -z f'(z)$ とおくと、 $\operatorname{Im} z > 0$ において $g(z)$ は analytic で (4) により

$$(5) \quad \operatorname{Im} g(z) \leq 0.$$

また、(2) により $f(z) = \frac{1}{z} + R(z)$ 、ただし、扇形領域
 (1) で $z \rightarrow \infty$ とするとき $R(z) = o\left(\frac{1}{z}\right)$ 、とかけろ。

したがって、 $g(z) = \frac{1}{z} - z R'(z)$ 。

$\varepsilon > 0$ を任意に固定すると、(1) を満たす各 z に対して z を
 中心とする円 $C = \{z \mid |z-z_0| = |z_0| \sin \frac{\varepsilon}{2}\}$ は扇形領域

$\frac{\varepsilon}{2} \leq \arg z \leq \pi - \frac{\varepsilon}{2}$ に含まれるから

$$(6) \quad R'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{R(\zeta)}{(\zeta-z)^2} d\zeta$$

と積分表示できて、(1) において $R'(z) = O\left(\frac{R(z)}{z}\right) = o\left(\frac{1}{z^2}\right)$
 を得る。ゆえに (1) において $z \rightarrow \infty$ のとき

$$(7) \quad \sum g(z) \longrightarrow 1$$

となり、定理1によると $g(z)$ はある分布の Stieltjes 変換である。

十分) $-\sum I'(z; F) = I(z; G)$ とする。 $f(z) = I(z; F)$, $g(z) = I(z; G)$ とおくと、 g が (5) を満たすことをから f は (4) を満たし、定理3によつて F が 0 において単峰であることがわかつ。

[注] さらに強い結果といつて、任意の分布 G に対し、
 $-\sum I'(z; F) = I(z; G)$ となる単峰分布 F が(一意的)に
 存在する。実際、 L を z を始点とし、(ある ε に対する)扇形領域 (1) の中を ζ へ行く任意の path をとするとき、各の実数 $f(z) = \int_L^z \frac{I(\zeta; G)}{\zeta} d\zeta$ は定理1の条件を満たすと、
 L のえらび方によらないこと、および $-\sum f'(z) = I(z; G)$
 となることが簡単な計算で確かめられ、 $f(z) = I(z; F)$ となる分布 F の存在がわかつ。このことと、上の系1から
系2、閉区间 β 上の β における単峰分布全体の族 $\mathcal{F}_\beta(\beta)$ と、
 β 上の分布全体の族 $\mathcal{F}(\beta)$ との間に
 $(8) \quad -(z-\beta) I'(z; F) = I(z; G) \quad (F \in \mathcal{F}_\beta(\beta), G \in \mathcal{F}(\beta))$
 により 1 対 1 の対応が成り立つ。

3. モーメント問題

$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ を実数とする。区间 S 上の確率分布 F が
 $\int_S x^k dF(x) = \mu_k$ ($k=1, 2, \dots, m$) をみたすとき, F は
モーメント問題 $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m | S\}$ の解であるといふ。

前節の系2を用いると、

定理4. (8)により $F \in \mathcal{F}_\beta(S)$ かつ $G \in \mathcal{F}(S)$ に対してい
 るとき, F がモーメント問題 $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{2n} | S\}$ の解な
 らば, G はモーメント問題 $\{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{2n} | S\}$ の解であ
 る。ただし, $\nu_r = (r+1)\mu_r - \beta r \mu_{r-1}$, ($\mu_0 = 1$).

証明. 定理2により $I(z; F)$ は(3)の形に表現されるか
 ら, (8)により

$$I(z; G) = \frac{1}{z} + \frac{\nu_1}{z^2} + \frac{\nu_2}{z^3} + \dots + \frac{\nu_{2n}}{z^{2n+1}} - (z-\beta) R'_{2n+1}(z)$$

の形になる。しかも ν_1, \dots, ν_{2n} は定理2で与えたものになる。

(6)と同様の論法で $R'_{2n+1}(z) = o(z^{-2n-1})$ ((1) $z \rightarrow \infty$)
 が示されるから、再び定理2により, G のモーメントは $\nu_1,$
 ν_2, \dots, ν_{2n} と一致する。

系. モーメント問題 $\{\mu_1, \dots, \mu_{2n} | (-\infty, \infty)\}$ が $\beta \in \text{mode}$
 とする单峰な解をもつための既存条件は、

$$\Delta_r(\beta) = \begin{vmatrix} 1 & \beta & \beta^2 & \cdots & \beta^{r+1} \\ 0 & \mu_0 & 2\mu_1 & \cdots & (r+1)\mu_r \\ \mu_0 & 2\mu_1 & 3\mu_2 & \cdots & (r+2)\mu_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r\mu_{r-1} & \cdots & \cdots & \cdots & (2r+1)\mu_{2r} \end{vmatrix} \quad (\mu_0 = 1)$$

とおくとき、次の2つのいずれかが成り立つこと：

$$(i) \Delta_r(\beta) > 0 \quad (r=1, 2, \dots, n).$$

$$(ii) \text{ある } k < n \text{ に対して } \Delta_i(\beta) > 0 \quad (i=1, \dots, k)$$

$$\Delta_i(\beta) = 0 \quad (i=k+1, \dots, n)$$

[注1] (ii) の場合は分布は一意的に定まる。

[注2] $S = [0, \infty)$, $S = [0, 1]$ 等の場合にも、同様にして類似の結果が成り立つ。

[注3] すべてのモーメント μ_r ($r=1, 2, \dots$) が与えられたときは、上記 $r \leq n$ の制限をとり去ればよい。さらに、解が一意的（たとえば Carleman の条件 $\sum \mu_{2n}^{-\frac{1}{2n}} = \infty$ のとき）ならば、单峰分布が上の系により特徴づけられる。

証明. $\Delta'_r = \begin{vmatrix} 1 & v_1 & v_2 & \cdots & v_r \\ v_1 & v_2 & v_3 & \cdots & v_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_r & v_{r+1} & \cdots & \cdots & v_{2r} \end{vmatrix}$ とおくとき、よく知ら

れた Hamburger のモーメント問題 $\{v_1, \dots, v_{2n} | (-\infty, \infty)\}$ が解をもつための条件は、2条件

$$(i) \Delta'_r > 0 \quad (r=1, \dots, n)$$

(ii) \exists ある $k < n$ に対して $\Delta'_i > 0 \quad (i=1, \dots, k)$, $\Delta'_i = 0 \quad (i=k+1, \dots, n)$ のいずれかが成り立つことである。したがって、定理4に注意すれば、 $\Delta'_r = \Delta_r(\beta)$ を示せばよい。実際、 $\Delta_r(\beta)$ の第 $r+1$ 列に β を乗じて第 $r+2$ 列から引き、次に第 r 列に

β を乗じてオ $\gamma + 1$ 式から引き、以下同様にしてゆくと、

$$\Delta_r(\beta) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \nu_1 & \cdots & \nu_r \\ \mu_0 & \nu_1 & \nu_2 & \cdots & \nu_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r\mu_{r-1} & \nu_r & \nu_{r+1} & \cdots & \nu_{2r} \end{vmatrix} = \Delta'_r$$

となる。

4. 単峰分布の族の構造

一般性を失わずに mode β は 0 と仮定する。 $F \in \mathcal{F}_0$ は定理3系2により、Stieltjes 変換が

$$-\star I'(z; F) = I(z; G) \quad (G \text{ はある分布})$$

をみたすものとして特徴づけられる。これから、

$$I'(z; F) = -\frac{1}{z} I(z; G) = -\frac{1}{z} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dG(t)}{z-t} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-1}{z(z-t)} dG(t).$$

ところが、区间 $[0, t]$ ($t < 0$ のときは $[t, 0]$) の一様分布を U_t とすれば

$$I'(z; U_t) = \frac{-1}{z(z-t)}$$

であるから、 $I'(z; F) = \int_{-\infty}^{\infty} I'(z; U_t) dG(t)$.

故に、

$$(9) \quad F = \int_{-\infty}^{\infty} U_t dG(t).$$

これは、任意の $F \in \mathcal{F}_0$ は一様分布族 $\{U_t \mid -\infty < t < \infty\}$ の mixture と (2) (9) のように表現されることを示す。実

際, \mathcal{U} は符号つき測度全体のつくるベクトル空間の凸集合であり, (5) から一様分布 U_t がその extreme point である。

また, 二の二とから直ちに Khintchine の定理: 「 X が 0 を mode とする单峰分布に従うための必ずしも条件は, $X = ZY$ (Z は $[0, 1]$ の一様分布に従う確率変数, Y は Z と独立な任意の確率変数) と表わされる」との別証が得られる。実際, Y の分布を G とすれば, $\Pr\{ZY \leq x\} = \int_{-\infty}^x \Pr\{tZ \leq x\} dG(t)$ $= \int_{-\infty}^x U_t(x) dG(t)$ となり, ZY の分布が (9) の F に相当するからである。

参考文献

- [1] Shohat, J. A. and Tamarkin, J. D., The problem of moments.
Mathematical Surveys, No. 1. American Mathematical Society (1943).
- [2] Isii, K., Note on a characterization of unimodal distributions.
Ann. Inst. Statist. Math. 9 (1958).
- [3] Stone, M. H., Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis. Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, 15 (1932).