

十分性による分布族の特徴づけ.

早大理工 草間時武

この記事は、ほぼ Kagan-Linnik の Characterization problems in Mathematical Statistics Chap 8. Characterization of Families of Distributions Admitting Sufficient Statistics の一部と Sufficient Subspaces for a space of functions defined on a countable set (Rozental) の紹介である。

§1. Kagan は次の定理を証明した (Kagan [3]).

定理 1.  $F(x-\theta)$   $\theta \in R'$  なる分布族からのランダムサンプル  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  を考える。  $dP_\theta = dF(x_1-\theta) \cdots dF(x_n-\theta)$  とおく。  $dP_\theta$  は Lebesgue 測度に関して絶対連続とする。このとき  $\bar{X}$  が十分であることから、 $F$  が正規分布であることを証明される。

証明の概要  $t$  と  $\theta$  に対して

$$\phi_t(\bar{X}) = E_\theta[\exp(it(X_2 - X_1) | \bar{X})] \quad a.e. [P_\theta] \quad \dots (1)$$

とおく。左辺は  $e^{it\bar{X}}$  をかけた期待値をとれば。

$$E_\theta[\exp[i(t\bar{X} + t(X_2 - X_1))]] = E_\theta[\phi_t(\bar{X}) e^{it\bar{X}}] \quad \dots (2)$$

$X_i \rightarrow X_i + \theta$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) と変換し、 $\theta$ を“Location parameter”であることを用いれば。

$$E_\theta[\exp[i(t\bar{X} + t(X_2 - X_1))]] = E_\theta[\phi_t(\bar{X} + \theta) e^{it\bar{X}}] \quad \dots (3)$$

$$E_\theta[\phi_t(\bar{X} + \theta) \exp(it\bar{X})] = \psi_t(t) \quad \dots (4)$$

とおく。 $\mu \in \Theta = \{0\}$  のときの  $\bar{X}$  の分布、すなはち  $\mu(A) = P_\theta(\bar{X} \in A)$  とする。假定より  $\mu$  は Lebesgue 濃度に関して絶対連続となる。(4) は

$$\int e^{it\bar{u}} \phi_t(u + \theta) d\mu(u) = \psi_t(t)$$

となる。(3) と (4) より

$$\psi_t(t) = E_\theta[\exp[i(t\bar{X} + t(X_2 - X_1))]]$$

であるが、この右辺は (2) において  $\theta = 0$  としたものであるから、

$$E_\theta(\phi_t(\bar{X}) e^{it\bar{X}}) = \int e^{it\bar{u}} \phi_t(u) d\mu(u) \quad \text{は } \mu \text{ に } \\ (7) \text{ より} \quad \text{ゆえに}$$

$$\int e^{it\bar{u}} \phi_t(u + \theta) d\mu(u) = \int e^{it\bar{u}} \phi_t(u) d\mu(u).$$

$$(T = \theta) \Rightarrow \int e^{it\bar{u}} (\phi_t(u + \theta) - \phi_t(u)) d\mu(u) = 0 \quad \dots (5)$$

Fourier 変換の 1 意味より

$$\phi_t(u+\theta) - \phi_t(u) = 0 \quad a.e. [\mu] \dots (6)$$

もちろん exceptional set は  $\theta + t$  に depend す。

$$\phi_t(u) = c(t) \quad a.e. [\mu] \dots (7)$$

を証明しよう。すなはち  $\phi_t(u)$  は  $u$  に独立して、はんて "const" であることを証明しよう。(exceptional set は  $t$  に depend するがもしくない)。 $t \in \text{fix } (\phi_t(u) \text{ の方程}) (= \phi(u))$  と書くことにする。 $(7)$  がなりたないとすると、 $\phi_t(u) = \operatorname{Re} \phi(u)$ ,  $\phi_2(u) = \operatorname{Im} \phi(u)$  とかくと

$$\operatorname{essup} \phi_1(u) > \operatorname{essinf} \phi_1(u)$$

$$\text{または } \operatorname{essup} \phi_2(u) > \operatorname{essinf} \phi_2(u)$$

のいずれかがなりたつ。前者がなりたつとしよう。(たゞつて  $A = \{u : \phi_1(u) > *$  とするとき  $\mu(A) > 0$ ,  $\mu(A^c) > 0$  がなりたつようならが存在する。  $A^c$  から  $\mu$  測度 0 なる集合ととりのぞむ)。

$$\frac{d\mu}{dm} > 0 \quad u \in A^c \dots (8)$$

としてさしつかえない。こゝに  $m$  は Lebesgue 測度である。 $\mu \ll m$  だから  $m(A) > 0$ ,  $m(A^c) > 0$  である。(たゞつて  $m[(A+\theta) \cap A^c] > 0$  となる  $\theta$  が存在する。(辻[4] pp203 深窓の定理))

(8) より、また  $(A+\theta) \cap A^c \subset A^c$  だから、

$$\mu[(A+\theta) \cap A^c] > 0 \quad \dots (9)$$

(8) 及び(9)は矛盾することを示す。

$$(6) \text{より}, \phi_1(u+\theta) = \phi_1(u) \quad a.e. [\mu]$$

であるから  $\phi_1(u) > k \quad u \in A+\theta$  となりた。ゆえに、

$\phi_1(u) > k \quad u \in (A+\theta) \cap A^c$  である。一方  $\phi_1(u) \leq k$   $u \in A^c$  から  $\phi_1(u) \leq k \quad u \in (A+\theta) \cap A^c$  である。矛盾である。ゆえに  $\phi_1(u) = \text{const}$ 、同様に  $\phi_2(u) = \text{const}$ 。したがって  $\phi_t(u) = \text{const} = c(t) \quad a.e. [\mu]$ 。( $t=\theta$ )

2

$$\phi_t(\bar{x}) = c(t) \quad a.e. [P_0] \quad \dots (10)$$

(1)において  $\theta = 0$  とおき、(10) を代入すれば、

$$E_0[\exp(it(X_2 - X_1)) | \bar{x}] = c(t) \quad \dots (11)$$

$$f(t) = \int e^{itz} dF(z) \quad \text{とおくと} \quad (11) \text{より}$$

$$E_0 \exp(i(\tau \sum_1^n X_i + t(X_2 - X_1))) = c(t) E_0 \exp(i\tau \sum_1^n X_i) \quad \dots (12)$$

がなりた。 $c(t) = |f(t)|^2$  である。すなはち (12) は

$$f(\tau+t)f(\tau-t)[f(\tau)]^{n-2} = c(t) [f(\tau)]^n \quad \dots (13)$$

とかく = とがでくる。

この  $f$  が決して 0 とはならないことを示す。 $c(t)$  は十分  $\varepsilon > 0$  を小さくとれば、 $c(t) \neq 0 \quad |t| < \varepsilon$  である。 $f$  が 0 にはならないとする。 $t_0 \in f \neq 0$  となる最小

(13) における  $\tau = t_0 - \rho, t = \rho$  ( $0 < \rho < \varepsilon$ ) とかく。  
 $\tau + t = t_0$  であるから  $f(\tau + t) = f(t_0) = 0$ 、ゆえに  
(13) の左辺は 0。ゆえに  $C(\rho)[f(t_0 - \rho)]^n = 0, 0 < \rho < \varepsilon$  であるから  $C(\rho) \neq 0$ 、ゆえに  $f(t_0 - \rho) = 0$ 、 $=$  は  $t_0$  の  $f$  を 0 にする最小の正数であることに反する。したがって、  
 $f(t) \neq 0$  である。 $g = \log f, h = \log C$  とする。  
(13) の右辺を  $\log \varepsilon$  と見て、

$g(\tau + t) + g(\tau - t) - 2g(\tau) = h(t) \quad |t| < \varepsilon$   
この 2 階差分方程式とくと  $g(\tau)$  は 2 次の多項式であることがわかる。(したがって  $F$  は正規分布にしたがう)  
 $F$  が正規分布にしたがうとは  $\bar{X}$  は sufficient であることはあきらかであるから  $\mu$  は Location parameter とまつ分布族の中での、正規分布の特徴だけになつてゐる。

### §2 sufficient subspace

$(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}})$  を可測空間  $\{P_\theta | \theta \in \Omega\}$  と  $\Omega$  上の確率測度族とする。 $P_\theta$  は肉<sup>\*</sup>で 2 乗可積分な肉<sup>\*</sup>の全体  $R_\theta$  内積と  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta = \int_{\mathcal{X}} f(x)g(x)dP_\theta(x)$

とかく = により Hilbert 空間を作る。

$R = \bigcap_{\theta \in \Omega} R_\theta$  とおく。  $R$  の線形部分空間  $L$  は

①  $L$  は各  $R_\theta$  の部分集合として closed

②  $L$  は  $f(x) \equiv 1$  ならば  $f \in L$  である。

③  $\forall \theta \in \Omega$   $R_\theta$  への projection は  $\theta$ -dependent である。

またたかとく、 sufficient subspace といふ。  $t \in L \sigma$ ;

$\sigma$  の sub- $\sigma$ -field  $\mathcal{B}$  をできとうにえらんで、  $R$  の中の  $\mathcal{B}$ -可測な関数の全体として表わされるならば、  $L$  が sufficient subspace であるとは  $\mathcal{B}$  が  $\{P_\theta | \theta \in \Omega\}$  に関する sufficient であるとは 同値であるとは 条件 ③ と、  $L$  への projection  $\sigma$  "conditional expectation" にならざらあからずである。 (Bahadur [1])

また任意の  $L$  が、  $\sigma$  として  $R$  にできうる  $\mathcal{B}$ -可測関数の全体とは一致しない。  $L$  がその上に、  $\mathcal{B}$ -可測関数の全体として表わされるための条件は Bahadur [1] が与えた。 ( $\sigma = \sigma$ ) が sufficient subspace の概念は sufficient subfield の概念の拡張である。 Rosenthal [5]  $X$   $\sigma$  穗々可算集合の場合に、 minimal な sufficient subspace を与えた。  $P_\theta(\sigma)$  を  $P_\theta(x)$  で表わすとする。

$x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow P_\theta(x_1) = P_\theta(x_2) \quad (\forall \theta \in \Omega)$  と  $\sim$  を導入する

とき、 これは同値関係だから  $X$  上に partition を生む。

$R$  に  $\sim$  と  $L$ 、 partition の各要素である集合上で "const"

あるような関数の全体を  $L_0$  とするとき、 $L_0$  は minimal かつ sufficient subspace となる。定理として述べよう。

定理 2. (Rozental)  $X$  を高々可算集合とする。上で定義した  $L_0$  は sufficient subspace であり、sufficient subspace  $L$  の  $L \subset L_0$  をみたすならば、 $L = L_0$  である。

証明 まず  $L_0$  が sufficient subspace であることを示そう。条件 ①, ② をみたすことはあきらかであるから ③ をみたすことを示そう。それには  $(f, g)_\theta = 0$  ( $\forall g \in L_0$ ) がであることを示せばよい。 $(f, g)_\theta = 0$  ( $\forall g \in L_0$ ) がするべくの  $\theta$  が存在する  $\Rightarrow$  と証明すればよい。上で定義した  $X$  の partition  $\Sigma \{X_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$  がある。 $X_{x_\alpha} = g_\alpha$  とする。  
 今、 $g_\alpha \in L_0$ .  $(f, g_\alpha)_\theta = \sum_{x \in X_\alpha} f(x) P_\theta(x) = C_\alpha \sum_{x \in X_\alpha} f(x)$   
 $P_{\theta_0}(x) = C_\alpha (f, g_\alpha)_{\theta_0} = 0$  である。任意の  $g \in L_0$  を考へると  $g = \sum_\alpha k_\alpha g_\alpha$  と表せる =  $\theta$  である。

$$(f, g)_\theta = \sum_\alpha k_\alpha (f, g_\alpha)_\theta = 0$$

( $\theta$  が  $\theta$  で ③ がなるべく)。

$\forall L$  が sufficient subspace である  $L \subset L_0$  ならば  $L = L_0$  であることを証明する。各  $X_\alpha$  の中に  $x_\alpha$  を固定する。これら方へ  $P_\theta(x) = C_\alpha(x) P_\theta(x_\alpha)$  ( $\forall \theta \in \Omega, \forall x \in X_\alpha$ ).  $P_L$  は  $L$  への projection とする。

$$(P_L g_\alpha, g_\beta)_\theta = \sum_{x \in X_\beta} P_L g_\alpha(x) P_\theta(x) = P_\theta(x_\beta) \sum_{x \in X_\beta} P_L g_\alpha(x) C_\beta(x).$$

同様に

$$(P_L g_\beta, g_\alpha)_\theta = P_\theta(x_\alpha) \sum_{x \in X_\alpha} P_L g_\beta(x) C_\alpha(x)$$

$P_L$  は selfadjoint であるから  $(P_L g_\beta, g_\alpha)_\theta = (P_L g_\beta, g_\alpha)_\theta$  である。 ( $L = \mathcal{F}$ )

$$P_\theta(x_\beta) \sum_{x \in X_\beta} P_L g_\alpha(x) C_\beta(x) = P_\theta(x_\alpha) \sum_{x \in X_\alpha} P_L g_\alpha(x) C_\beta(x)$$

$\alpha \neq \beta$  のとき  $(P_L g_\beta, g_\alpha)_\theta = 0$  である。何故なら  $L \neq 0$

ならば、上式の右辺は零だから  $\sum_{x \in X_\beta} P_L g_\alpha(x) C_\beta(x)$  の両辺を  
くわしくかぎりて、

$$P_\theta(x_\alpha) = \frac{\sum_{x \in X_\beta} P_L g_\alpha(x) C_\beta(x)}{\sum_{x \in X_\alpha} P_L g_\beta(x) C_\alpha(x)} \quad P_\theta(x_\beta) = C_P(x_\beta)$$

すなはち  $x_\alpha \in X_\alpha$ ,  $x_\beta \in X_\beta$ ,  $\alpha \neq \beta$  であることに矛盾する。

したがって  $(P_L g_\beta, g_\alpha)_\theta = 0$  なければならぬ。 ( $L = \mathcal{F}$ )

$P_L g_\beta = k_\beta g_\beta$  であるが、 $1 \in L$  であるから（假定②）、 $1 = P_L 1 = P_L (\sum_{\alpha \in \Lambda} g_\alpha) = \sum_{\alpha \in \Lambda} P_L g_\alpha = \sum_{\alpha \in \Lambda} k_\alpha g_\alpha$  すなはち  $k_\alpha = 1$ 。ゆえに  $P_L g_\beta = g_\beta$  ( $\forall \beta \in \Lambda$ ) すなはち  $g_\beta \in L$  ( $L = \mathcal{F}$ )  $\forall g \in L_0$  は  $g \in L$ 。すなはち  $L = L_0$ 。

$L_0$  は Dynkin [2] によると、minimal sufficient subfield に相当するものである。

sufficient subspace については、色々未知のことがあると思ふ。Rozental の結果は一般の dominated case のときはどうなるか。また dominated case の場合に

さりに  $\rightarrow$  sufficiency の 3 つは 理論はこの場合 どうなる  
等。

### References

- [1] Bahadur measurable subspaces and subalgebra  
Proc of Amer Math Society (1955) pp 565-570.
- [2] E.B. Dynkin, Necessary and sufficient statistics  
for a family of probability distributions, Uspehi  
Mat. Nauk 6 (1951), no. 1 (41), 68-90; English transl.  
Selected Transl in Math Stat. and Prob., Vol 1, Amer.  
Math., Providence, R.I., 1961, pp 17-40.
- [3] Kagan, A.M. "Theory of estimation for  
families with shift-, scale- and exponential parameter,"  
Trudy Matem Inst, Steklov. AN SSSR 104 (1968)  
19-87.
- [4] 近正 VR 実変数論 清水書院 (1950)