数理解析研究所講究録
269巻 1976年 98-114

ステファン問題の有限要素近似解

京大 数理研　森 正武

§1 序

境界の移動を伴う熱方程式系によって記述されるStefan問題は，いわゆる自由境界問題の典型例として古くから多くの人々の関心をひいており，その数値解法に関しても多くの論文が発表されている．（例えば[3, 1, 2, 6]）．Moriは，境界の時間変動と共に変化する基底関数を考え，これに基く有限要素法による解法を提案した[4]．そしてDirichlet境界条件の下での1次元1相問題に対する解法の安定性の条件を与え，その収束を論じた[5]．この方法は，moving boundary problemおよびfree boundary problemに広く適用することができるが，ここでは2相Stefan問題および2次元のStefan問題への適用法と数値例を示す．

§2 2相Stefan問題

話をわかりやすくするために，領域 $0 \leq x \leq l$ に水と氷が存在し，両者が時刻 t において $x = s(t)$ で境を接している問

題を考えよう．すなわち，領域 $D_0=\{0<x<s(t)\}$ には水が存在し，領域 $D_1=\{s(t)<x<l\}$ には氷が存在して，水の温度 u_0 と氷の温度 u_1 はそれぞれの領域で次の熱方程式を満足しているものとする．

$$\begin{cases} (2.1) \quad \dfrac{\partial u_0}{\partial t}=\sigma_0\dfrac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \quad \text{in } D_0 \\[2ex] (2.2) \quad \dfrac{\partial u_1}{\partial t}=\sigma_1\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \quad \text{in } D_1 \end{cases}$$

境界条件は，境界 $x=s(t)$ において等温

$$(2.3) \quad u_0(t,s(t))=u_1(t,s(t))=0$$

であり，それぞれの領域の他端では Dirichlet 条件

$$\begin{cases} (2.4) \quad u_0(t,0)=g_0(t) \\[1ex] (2.5) \quad u_1(t,l)=g_1(t) \end{cases}$$

を満たしているものとしよう．境界 $s(t)$ は熱の流れを平衡させる方向へ次の関係に従って移動する．

$$(2.6) \quad \frac{ds}{dt}=-k_0\frac{\partial u_0}{\partial x}(t,s(t))+k_1\frac{\partial u_1}{\partial x}(t,s(t))$$

これがいわゆる Stefan 条件である．k_0, k_1 はそれぞれ水および氷の熱伝導係数である．また初期条件は次のように与

えられているものとする．

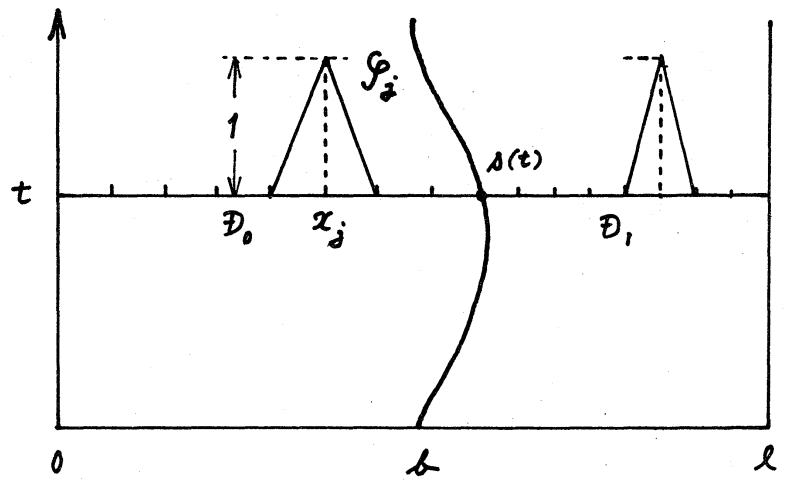
$$\begin{cases} (2.7) & s(0) = b \\ (2.8) & u_0(0,x) = f_0(x) \\ (2.9) & u_1(0,x) = f_1(x) \end{cases}$$

上記のStefan問題に有限要素法を適用しよう．まず時刻tを固定し，仮りに$s(t)$は既知の情報を通して計算によって既に得られているものとする．そこでFig.1のように領域D_0をn_0個，D_1をn_1個の小区間に分割し，n_0+n_1+1個の格子点

$$(2.10) \qquad 0 = x_0, x_1, \cdots, x_{n_0} = s(t), x_{n_0+1}, \cdots, x_{n_0+n_1}$$

を作る．そして各格子点x_jを中心として次のようなpiece-wise linearな基底関数を構成する．

Fig. 1



$$(2.11)\qquad \varphi_j(t,x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}} & ;\ x_{j-1}\le x<x_j\\[2ex] \dfrac{x_{j+1}-x}{x_{j+1}-x_j} & ;\ x_j\le x<x_{j+1}\end{cases}$$

数値計算を実行するとき，$s(t)$ は区間の分割に依存して近似的に決められるので，以下これを $s_n(t)$ と書くことにする．

次に，温度 u_0, u_1 を，これら基底関数の1次結合 $\tilde{u}_0, \tilde{u}_1$ によって近似する．

$$\begin{cases}(2.12)\qquad \tilde{u}_0(t,x)=\displaystyle\sum_{j=0}^{n_0-1} a_j(t)\varphi_j(t,x) & ;\ 0<x<s_n(t)\\[2ex] (2.13)\qquad \tilde{u}_1(t,x)=\displaystyle\sum_{j=n_0+1}^{n_0+n_1} a_j(t)\varphi_j(t,x) & ;\ s_n(t)<x<l\end{cases}$$

ただし

$$(2.14)\qquad a_0(t)=g_0(t)\quad,\quad a_{n_0+n_1}(t)=g_1(t)$$

で，$\varphi_0, \varphi_{n_0+n_1}$ はそれぞれ (2.11) の右辺オ2および オ1の式で表わされる関数である．境界条件 (2.3) のために，$\varphi_{n_0}(t,x)$ の項は現われず，これは数値計算上も都合が良い．

以上の準備の下に，近似解を求めるために Galerkin 法を適用する．すなわち，(2.12) と (2.13) をそれぞれ (2.1), (2.2) に代入し，両辺に $\varphi_k(t,x)$ を乗じて x に関して Ω_0, Ω_1 で積分する。積分はそれぞれ全領域 $0<x<l$ で行っても結果は同じである．こうして $(n_0-1)\times n_0$ 行列および $(n_1-1)\times n_1$ 行列を係数にもつ次の連立常微分方程式を得る．

$$\begin{cases} (2.15) \qquad M_0 \dfrac{d\mathbf{a}_0}{dt} = -(\sigma_0 K_0 + N_0)\ \mathbf{a}_0 \\ (2.16) \qquad M_1 \dfrac{d\mathbf{a}_1}{dt} = -(\sigma_1 K_1 + N_1)\ \mathbf{a}_1 \end{cases}$$

ただし

$$(2.17) \qquad \mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n_0-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{n_0+1} \\ a_{n_0+2} \\ \vdots \\ a_{n_0+n_1} \end{bmatrix}$$

$$(2.18) \qquad M_{ij} = \int_0^l \varphi_i \varphi_j \, dx \quad ; \text{ mass matrix}$$

$$(2.19) \qquad K_{ij} = \int_0^l \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \, dx \quad ; \text{ stiffness matrix}$$

$$(2.20) \qquad N_{ij} = \int_0^l \varphi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial t} \, dx \quad ; \text{ velocity matrix}$$

（添字1，2は省略した）

行列Nの要素は，格子点の見かけ上の移動の速度に相当するので，これに<u>velocity matrix</u>という名を付した．

以下Ω_0，Ω_1の分割をそれぞれ等間隔にとるとすると，各行列の具体形は，lumped mass systemの場合次のようになる．

$$(2.21) \qquad M_0 = \frac{s_n(t)}{n_0} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & & \\ & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_1 = \frac{l - s_n(t)}{n_1} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & & \\ & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(2.22) \qquad K_0 = \frac{n_0}{s_n(t)} \times \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad K_1 = \frac{n_1}{l - s_n(t)} \times \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(2.23)\qquad N_0=\frac{1}{6n_0}\times\frac{dS_n}{dt}\times\begin{array}{c}\begin{bmatrix} 2 & \ddots & & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ \alpha_{i-1}^{(0)} & 2 & \alpha_{i+1}^{(0)} & \ddots \\ 0 & & \ddots & \ddots \\ & & & 2 \end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}1\\ \vdots\\ i\\ \vdots\\ n_0-1\end{array},\quad \begin{cases}\alpha_{i-1}^{(0)}=3i-1\\ \alpha_{i+1}^{(0)}=-3i-1\end{cases}$$

$$(2.24)\qquad N_1=\frac{1}{6n_1}\times\frac{dS_n}{dt}\times\begin{bmatrix} 2 & \ddots & & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ \alpha_{i-1}^{(1)} & 2 & \alpha_{i+1}^{(1)} & \ddots \\ 0 & & \ddots & \ddots \\ & & & 2 \end{bmatrix}\begin{array}{l}n_0+1\\ \vdots\\ i\\ \vdots\\ n_0+n_1-1\end{array},\quad \begin{cases}\alpha_{i-1}^{(1)}=3(n_0+n_1-i)-1\\ \alpha_{i+1}^{(1)}=-3(n_0+n_1-i)-1\end{cases}$$

consistent mass system の場合は，mass matrix のみを次のように変更すればよい．

$$(2.25)\qquad M_0=\frac{S_n(t)}{6n_0}\times\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & 1 & 4 \end{bmatrix},\quad M_1=\frac{l-S_n(t)}{6n_1}\times\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

次に (2.15), (2.16) の時間微分を時間差分で近似する．時間 t を等しい間隔 Δt で刻む．

$$(2.26)\qquad \frac{d\tilde{u}_0}{dt}\fallingdotseq\frac{\tilde{u}_0(k\Delta t)-\tilde{u}_0((k-1)\Delta t)}{\Delta t},\quad \frac{d\tilde{u}_1}{dt}\fallingdotseq\frac{\tilde{u}_1(k\Delta t)-\tilde{u}_1((k-1)\Delta t)}{\Delta t}$$

さて，実際には $S_n(t)$ は温度 $\tilde{u}_0$, $\tilde{u}_1$ と共に決められるものであるが，この三者を連立させて解くことはかなり手間がかかるので，ここでは正確な $S_n(t)$ の代りに Δt だけ前の時刻の温度 $\tilde{u}_0$, $\tilde{u}_1$ から計算した値を採用することにする．すなわち，$S_n(t)$ の増分 ΔS_n は，(2.6) の右辺をそれまでに得られている最新の近似解 $\tilde{u}_0$, $\tilde{u}_1$ の境界における勾配で近似することによって計算する．また，velocity matrix N の要素は

$$(2.27)\qquad \frac{ds_n}{dt} \fallingdotseq \frac{\Delta s_n}{\Delta t}$$

によって，計算された増分 Δs_n を使って計算する．

全体のスキームをまとめると次のようになる。ここで

$$(2.28)\qquad f(x) = \begin{cases} f_0(x) \ ; & 0 < x < s(t) \\ f_1(x) \ ; & s(t) < x < l \end{cases}$$

とおく。また θ は $0 \leqq \theta \leqq 1$ なる適当な値に選んでおく．

初期ステップ

$$(2.29)\qquad \begin{cases} a_j(0) = f(x_j) \ ; \ j = 0, 1, \cdots, n_0 + n_1 \\ \Delta s_n(\Delta t) = -k_0 \dfrac{n_0 \Delta t}{b} a_{n_0-1}(0) + k_1 \dfrac{n_1 \Delta t}{l-b} a_{n_0+1}(0) \\ s_n(\Delta t) = b + \Delta s_n(\Delta t) \end{cases}$$

一般のステップ　$k = 1, 2, \cdots$ について以下の操作を繰返す．

(I)　$s_n(k\Delta t)$, $\Delta s_n(k\Delta t)$ の値を使って $M_0(k\Delta t)$, $M_1(k\Delta t)$, $K_0(k\Delta t)$ $K_1(k\Delta t)$, $N_0(k\Delta t)$, $N_1(k\Delta t)$ を計算し次の1次連立方程式を解く．

$$\begin{cases} (2.30)\quad \{M_0 + \theta\Delta t(\sigma_0 K_0 + N_0)\}\mathfrak{a}_0(k\Delta t) = \{M_0 - (1-\theta)\Delta t(\sigma_0 K_0 + N_0)\}\mathfrak{a}_0((k-1)\Delta t) \\ (2.31)\quad \{M_1 + \theta\Delta t(\sigma_1 K_1 + N_1)\}\mathfrak{a}_1(k\Delta t) = \{M_1 - (1-\theta)\Delta t(\sigma_1 K_1 + N_1)\}\mathfrak{a}_1((k-1)\Delta t) \end{cases}$$

ただし，$\mathfrak{a}_0$ の第1成分および $\mathfrak{a}_1$ の最後の成分にはそれぞれ既知の境界値 g_0 および g_1 の値が入る．

(II) 次の式により $\Delta s_n((k+1)\Delta t)$, $s_n((k+1)\Delta t)$ を計算する.

$$(2.32)\quad \Delta s_n((k+1)\Delta t) = -\frac{k_0 n_0 \Delta t}{2}\left\{\frac{a_{n_0-1}((k-1)\Delta t)}{s_n((k-1)\Delta t)} + \frac{a_{n_0-1}(k\Delta t)}{s_n(k\Delta t)}\right\}$$

$$+\frac{k_1 n_1 \Delta t}{2}\left\{\frac{a_{n_0+1}((k-1)\Delta t)}{l-s_n((k-1)\Delta t)} + \frac{a_{n_0+1}(k\Delta t)}{l-s_n(k\Delta t)}\right\}$$

$$(2.33)\quad s_n((k+1)\Delta t) = s_n(k\Delta t) + \Delta s_n((k+1)\Delta t)$$

Δs_n の計算(2.32)において, 時刻 $t=(k-1)\Delta t$ および $t=k\Delta t$ における勾配の平均値を用いた理由は, 理論上の取扱いを容易にするためである[5].

具体的な数値例として, 次のような問題を $0 \le x \le 2$, $0 \le t \le 2.6$ において解いた. これは, ほう水と氷の系に相当する.

$$(2.34)\quad \begin{cases} \sigma_0 = 1 \\ k_0 = 1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} \sigma_1 = 4 \\ k_1 = 2 \end{cases}$$

境界条件:

$$(2.35)\quad \begin{cases} g_0(t) = 1 \\ g_1(t) = \begin{cases} 0.7t - 1 & ;\ 0 \le t \le 1 \\ -0.3 & ;\ 1 < t \le 2.6 \end{cases} \end{cases}$$

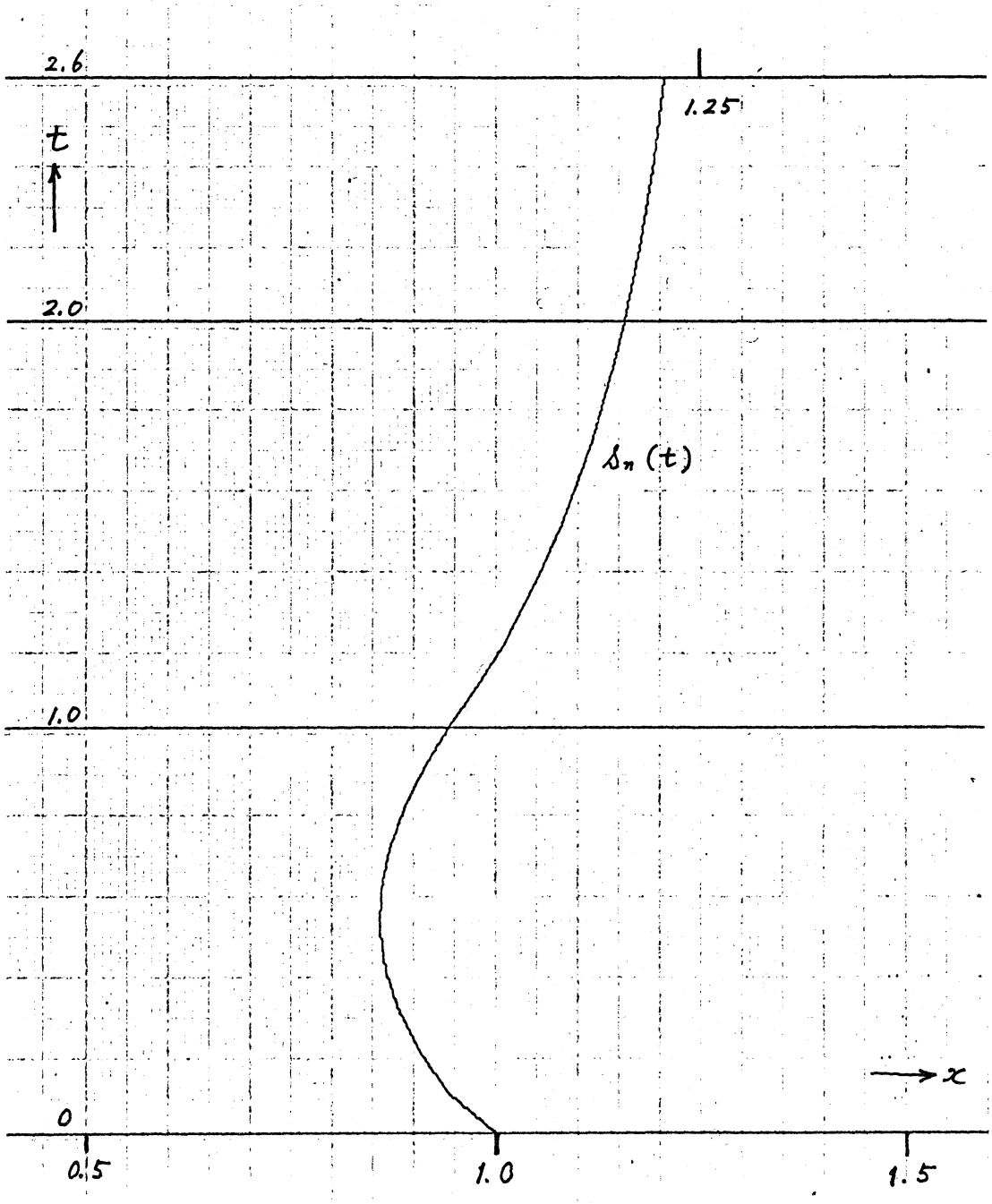
初期条件:

$$(2.36)\quad s(0) = s = 1$$

$$(2.37)\quad f(x) = \cos\frac{\pi}{2}x, \quad 0 \le x \le 2$$

領域Ξ_0, Ξ_1はそれぞれ10等分し，時間のきざみは$\Delta t = 0.001$にとった．計算で得た境界$s_n(t)$の動きをFig. 2に示す．

Fig. 2



§3　2次元帯状領域における1相Stefan問題

ここでは上記の有限要素法を2次元のStefan問題に適用する．その場合注意しなければならない事は，格子点の位置が常に境界の位置によって一意的に定められるという事であり，領域の形状に対応して適当な分割を行わなければならない．ここでは最も単純な，帯状領域における問題を扱うことにする．

Fig. 3 のような，幅が L_y なる半無限帯状領域Ωを考え，図のように半無限の方向に x 座標，有限の幅の方向に y 座標をとる．時刻 t を固定するとき，境界は $s(t,y)$ で与えられるものとする．ただし $s(0,y)>0$ とする．

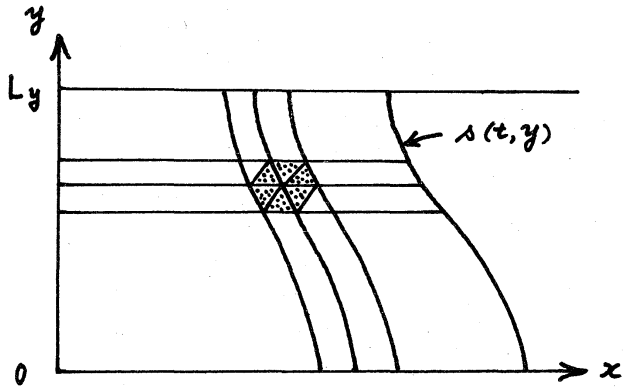


Fig. 3

そこで次の問題を考えよう．

(3.1)　$\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

(3.2)　$\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$　at　$y = 0,\ L_y$

(3.3)　$u(t,0,y) = g(t,y)$

(3.4)　$u(0,x,y) = f(x,y)$

(3.5)　$s(0,y) = s_0(y)$

$$(3.6)\qquad u(t, s(t,y), y) = 0$$

$$(3.7)\qquad \frac{\partial s}{\partial t} = -k\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial s}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Bigg|_{x=s(t,y)}$$

最後の(3.7)がStefan条件である．境界条件(3.2)，(3.3)は他にもいろいろ考えられるが，いずれにしてもアルゴリズムには大差はない．以下前節と同様，近似解であることを明示するために，$s(t,y)$には添字nを付して$s_n(t,y)$と書く。

まず基底関数を作ろう．領域Dの幅を平行線によって分割し，n_y個の小さい帯状領域に分ける．得られたn_y+1本の格子線に，y座標の小さい方から$0, 1, \cdots, n_y$なる番号を付け，j番目の格子線のy座標をy_jとし，$j-1$番目とj番目の格子線ではさまれる小帯状領域の幅をh_jとする．次に，j番目の格子線$0 \le x \le s_n(t, y_j)$をn_x個の小区間に一定の規則に従って分割し，各格子点のx座標をx_{ij} $(i=0,1,\cdots,n_x;\ j=0,1,\cdots,n_y)$とする(Fig. 4)．$x_{ij}$は$s_n(t,y_j)$から一意的に計算できるものでなければならない．例えば，$0 \le x \le s_n(t,y_j)$をn_x等分すればこの条件にかなう．

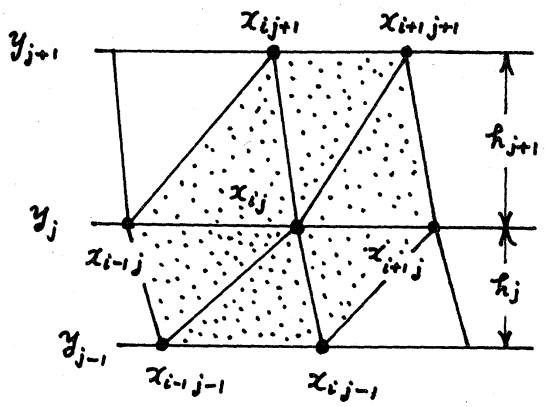


Fig. 4

Fig. 4に示す点x_{ij}を中心とする6角形領域D_{ij}上

に，piece-wise linearな基底関数 $\varphi_{ij}(t,x,y)$ を構成する．この関数の値は，点 (x_{ij}, y_j) では 1，点 (x_{i-1j-1}, y_{j-1}), (x_{ij-1}, y_{j-1}), (x_{i+1j}, y_j), (x_{i+1j+1}, y_{j+1}), (x_{ij+1}, y_{j+1}), (x_{i-1j}, y_j) では 0 である．あとはこの基底関数に基いて前節と同様通常の有限要素法を適用すればよい．

mass matrix M, stiffness matrix K, velocity matrix N の定義は次の通りである．

$$(3.8)\qquad M(i,j;k,l)=\iint_{D_{ij}}\varphi_{ij}\,\varphi_{kl}\,dx\,dy$$

$$(3.9)\qquad K(i,j;k,l)=\iint_{D_{ij}}\left(\frac{\partial\varphi_{ij}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_{kl}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_{ij}}{\partial y}\frac{\partial\varphi_{kl}}{\partial y}\right)dx\,dy$$

$$(3.10)\qquad N(i,j;k,l)=\iint_{D_{ij}}\varphi_{ij}\frac{\partial\varphi_{kl}}{\partial t}\,dx\,dy$$

半無限帯状領域の問題を解くとき一般的に役立つと思われるので，各行列の非零要素を附録に掲げておく．

Stefan条件 (3.7) は補間によって次のように近似する．点 (x_{n_x-1j}, y_j) における近似解の値を a_{n_x-1j} と書く．

$$(3.11)\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=s}\doteqdot\frac{-1}{s_n(t,y_j)-x_{n_x-1j}}\,a_{n_x-1j}$$

$$(3.12)\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x=s}\doteqdot\frac{1}{2}\left[-\frac{s_n(t,y_j)-s_n(t,y_{j+1})}{h_{j+1}\times\{s_n(t,y_{j+1})-x_{n_x-1j+1}\}}\,a_{n_x-1j+1}+\frac{s_n(t,y_j)-s_n(t,y_{j-1})}{h_j\times\{s_n(t,y_{j-1})-x_{n_x-1j-1}\}}\,a_{n_x-1j-1}\right]$$

$$(3.13)\quad \frac{\partial s}{\partial y} \fallingdotseq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{h_{j+1}}\times\left\{s_n(t,y_{j+1})-s_n(t,y_j)\right\}+\frac{1}{h_j}\times\left\{s_n(t,y_j)-s_n(t,y_{j-1})\right\}\right]$$

時刻 t におけるこれらの値から (3.7) の右辺を計算し，時刻 $t+\Delta t$ における s_n の増分 Δs_n を求める．

全体を通しての計算法は，各時刻ごとに，それまでに得られている最新の解 u の勾配から計算した s_n, Δs_n を用いて行列要素を計算しなおすことを除いては，通常の有限要素法と全く同様である．

数値例として，(3.1) ～ (3.7) に対応して次のような簡単な問題を $0 \leq y \leq 1$ $(L_y=1)$，$0 \leq t \leq 1$ に対して解いた．

$$(3.14)\quad \begin{cases} u(t,0,y) = g(t,y) = 1 \\ s(0,y) = s_0(y) = \frac{1}{2}(y-1)^2 - \frac{1}{2} \\ u(0,x,y) = f(x,y) = 1 - \frac{1}{s(0,y)}x \end{cases}$$

計算は $n_x = n_y = 10$, $\Delta t = 0.001$ にとり，*mass matrix system* で行った．また (2.30) の $\theta = 1$ の場合に対応する *implicit method* を採用した．この計算で得た境界 $s(t,y)$ の動きを Fig. 5 に示す．

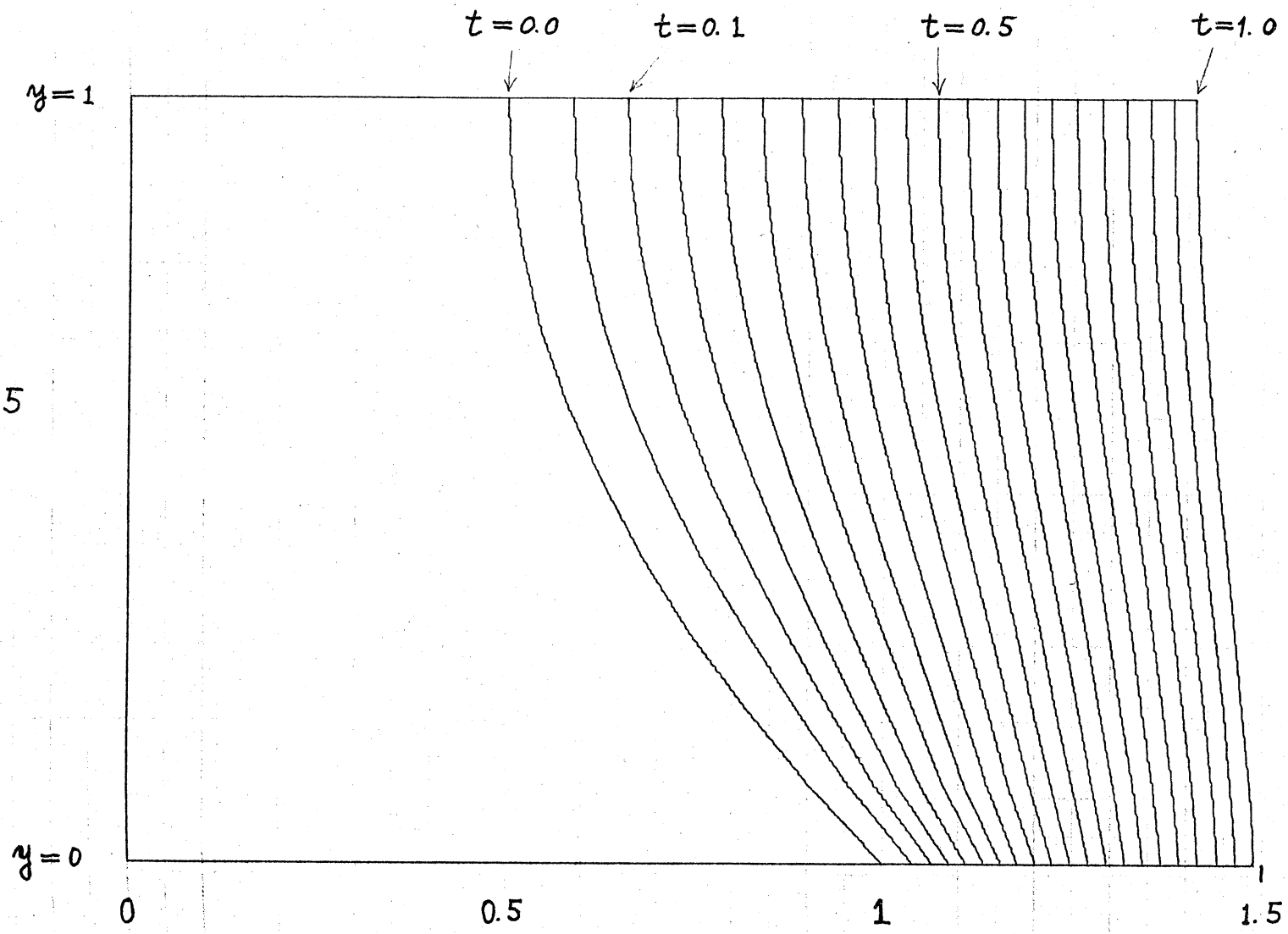


Fig. 5

References

[1] J.Douglas,Jr. and T.M.Gallie, On the numerical integration of a parabolic differential equation subject to a moving boundary condition, Duke Math.J. 22(1955) 557-571.

[2] H.Kawarada and M.Natori, On numerical solution of Stefan problem I, Memoir of Numerical Mathematics No.1(1974) 43-54.

[3] H.G.Landau, Heat conduction in a melting solid, Quart. Appl. Math. 8(1950) 81-94.

[4] M.Mori, Numerical solution of the Stefan problem by the finite element method, Memoir of Numerical Mathematics No.2 (1975) 35-44.

[5] M.Mori, On the stability and the convergence of the finite element method for solving the Stefan problem, to appear.

[6] T.Nogi, A difference scheme for solving the Stefan problem, Publ. of RIMS, Kyoto Univ. 9(1974) 543-575.

附 録 (以下に記す要素以外はすべて0である)

mass matrix

[lumped mass system]

$$M(i,j;i,j) = M_1 + M_2$$

$$\begin{cases} M_1 = \frac{1}{6} h_j \times \{(x_{i+1j} - x_{i-1j}) + (x_{ij-1} - x_{i-1j-1})\} & \text{但し } j=0 \text{ のとき } 0 \\ M_2 = \frac{1}{6} h_{j+1} \times \{(x_{i+1j} - x_{i-1j}) + (x_{i+1j+1} - x_{ij+1})\} & \text{但し } j=n_y \text{ のとき } 0 \end{cases}$$

[consistent mass system]

$$M(i,j;i-1,j-1) = \frac{1}{24} h_j \times \{(x_{ij-1} - x_{i-1j-1}) + (x_{ij} - x_{i-1j})\} \quad \text{但し } j=0 \text{ のとき } 0$$

$$M(i,j;i-1,j) = M_1 + M_2$$

$$\begin{cases} M_1 = \frac{1}{24} h_j \times (x_{ij} - x_{i-1j}) & \text{但し } j=0 \text{ のとき } 0 \\ M_2 = \frac{1}{24} h_{j+1} \times (x_{ij} - x_{i-1j}) & \text{但し } j=n_y \text{ のとき } 0 \end{cases}$$

$$M(i,j;i,j-1) = \frac{1}{24} h_j \times \{(x_{ij-1} - x_{i-1j-1}) + (x_{i+1j} - x_{ij})\}$$ 但し $j=0$ のとき 0

$$M(i,j;i,j) = M_1 + M_2$$

$$\begin{cases} M_1 = \frac{1}{12} h_j \times \{(x_{ij-1} - x_{i-1j-1}) + (x_{ij} - x_{i-1j}) + (x_{i+1j} - x_{ij})\} & \text{但し } j=0 \text{ のとき } 0 \\ M_2 = \frac{1}{12} h_{j+1} \times \{(x_{ij} - x_{i-1j}) + (x_{i+1j} - x_{ij}) + (x_{i+1j+1} - x_{ij+1})\} & \text{但し } j=n_y \text{ のとき } 0 \end{cases}$$

$$M(i,j;i,j+1) = \frac{1}{24} h_{j+1} \times \{(x_{ij} - x_{i-1j}) + (x_{i+1j+1} - x_{ij+1})\}$$ 但し $j=n_y$ のとき 0

$$M(i,j;i+1,j) = M_1 + M_2$$

$$\begin{cases} M_1 = \frac{1}{24} h_j \times (x_{i+1j} - x_{ij}) & \text{但し } j=0 \text{ のとき } 0 \\ M_2 = \frac{1}{24} h_{j+1} \times (x_{i+1j} - x_{ij}) & \text{但し } j=n_y \text{ のとき } 0 \end{cases}$$

$$M(i,j;i+1,j+1) = \frac{1}{24} h_{j+1} \times \{(x_{i+1j} - x_{ij}) + (x_{i+1j+1} - x_{ij+1})\}$$ 但し $j=n_y$ のとき 0

stiffness matrix

$$K(i,j;i-1,j-1) = \frac{1}{2h_j} \times \{(x_{ij} - x_{ij-1}) - (x_{i-1j-1} - x_{i-1j})\}$$ 但し $j=0$ のとき 0

$$K(i,j;i-1,j) = K_1 + K_2$$

$$\begin{cases} K_1 = -\{h_j + \frac{1}{h_j} \times (x_{i-1j-1} - x_{i-1j}) \times (x_{i-1j-1} - x_{ij})\} / \{2(x_{ij} - x_{i-1j})\} & \text{但し } j=0 \text{ のとき } 0 \\ K_2 = -\{h_{j+1} + \frac{1}{h_{j+1}} \times (x_{ij+1} - x_{i-1j}) \times (x_{ij+1} - x_{ij})\} / \{2(x_{ij} - x_{i-1j})\} & \text{但し } j=n_y \text{ のとき } 0 \end{cases}$$

$$K(i,j;i,j-1) = -\frac{1}{2h_j} \times \{(x_{ij} - x_{i-1j-1}) - (x_{ij-1} - x_{i+1j})\}$$ 但し $j=0$ のとき 0

$$K(i,j;i,j) = K_1 + K_2$$

$$\begin{cases} K_1 = \frac{1}{2h_j} \times (x_{ij-1} - x_{i-1j-1}) + \{h_j + \frac{1}{h_j} \times (x_{i-1j-1} - x_{i-1j})^2\} / \{2(x_{ij} - x_{i-1j})\} \\ \qquad + \{h_j + \frac{1}{h_j} \times (x_{ij-1} - x_{i+1j})^2\} / \{2(x_{i+1j} - x_{ij})^2\} \qquad \text{但し } j=0 \text{ のとき } 0 \\ K_2 = \frac{1}{2h_{j+1}} \times (x_{i+1j+1} - x_{ij+1}) + \{h_{j+1} + \frac{1}{h_{j+1}} \times (x_{ij+1} - x_{i-1j})^2\} / \{2(x_{ij} - x_{i-1j})\} \\ \qquad + \{h_{j+1} + \frac{1}{h_{j+1}} \times (x_{i+1j+1} - x_{i+1j})^2\} / \{2(x_{i+1j} - x_{ij})^2\} \qquad \text{但し } j=n_y \text{ のとき } 0 \end{cases}$$

$$K(i,j;i,j+1) = -\frac{1}{2h_{j+1}} \times \{(x_{ij+1} - x_{i-1j}) - (x_{ij} - x_{i+1j+1})\}$$ 但し $j=n_y$ のとき 0

$$K(i,j;i+1,j) = K_1 + K_2$$

$$\begin{cases} K_1 = -\{h_j + \frac{1}{h_j} \times (x_{ij-1} - x_{i+1j}) \times (x_{ij-1} - x_{ij})\} / \{2(x_{i+1j} - x_{ij})\} & \text{但し } j=0 \text{ のとき } 0 \\ K_2 = -\{h_{j+1} + \frac{1}{h_{j+1}} \times (x_{i+1j+1} - x_{i+1j}) \times (x_{i+1j+1} - x_{ij})\} / \{2(x_{i+1j} - x_{ij})\} & \text{但し } j=n_y \text{ のとき } 0 \end{cases}$$

$$K(i,j;i+1,j+1) = -\frac{1}{2h_{j+1}} \times \{(x_{ij} - x_{ij+1}) - (x_{i+1j+1} - x_{i+1j})\} \quad \text{但し } j=n_y \text{ のとき } 0$$

<u>velocity matrix</u>

$$N(i,j;i-1,j-1) = \frac{1}{24} h_j \times (\dot{x}_{i-1j-1} + 2\dot{x}_{ij} + \dot{x}_{ij-1}) \quad \text{但し } j=0 \text{ のとき } 0$$

$$N(i,j;i-1,j) = N_1 + N_2$$

$$\begin{cases} N_1 = \frac{1}{24} h_j \times (\dot{x}_{i-1j-1} + 2\dot{x}_{ij} + \dot{x}_{i-1j}) & \text{但し } j=0 \text{ のとき } 0 \\ N_2 = \frac{1}{24} h_{j+1} \times (\dot{x}_{ij+1} + 2\dot{x}_{ij} + \dot{x}_{i-1j}) & \text{但し } j=n_y \text{ のとき } 0 \end{cases}$$

$$N(i,j;i,j-1) = -\frac{1}{24} h_j \times (\dot{x}_{i-1j-1} + 2\dot{x}_{ij} + \dot{x}_{ij-1}) = -N(i,j;i-1,j-1) \quad \text{但し } j=0 \text{ のとき } 0$$

$$N(i,j;i,j) = N_1 + N_2$$

$$\begin{cases} N_1 = \frac{1}{24} h_j \times (\dot{x}_{i+1j} - \dot{x}_{i-1j} + \dot{x}_{ij-1} - \dot{x}_{i-1j-1}) & \text{但し } j=0 \text{ のとき } 0 \\ N_2 = \frac{1}{24} h_{j+1} \times (\dot{x}_{i+1j} - \dot{x}_{i-1j} + \dot{x}_{i+1j+1} - \dot{x}_{ij+1}) & \text{但し } j=n_y \text{ のとき } 0 \end{cases}$$

$$N(i,j;i,j+1) = \frac{1}{24} h_{j+1} \times (\dot{x}_{i+1j+1} + 2\dot{x}_{ij} + \dot{x}_{ij+1}) \quad \text{但し } j=n_y \text{ のとき } 0$$

$$N(i,j;i+1,j) = N_1 + N_2$$

$$\begin{cases} N_1 = -\frac{1}{24} h_j \times (\dot{x}_{i+1j} + 2\dot{x}_{ij} + \dot{x}_{ij-1}) & \text{但し } j=0 \text{ のとき } 0 \\ N_2 = -\frac{1}{24} h_{j+1} \times (\dot{x}_{i+1j} + 2\dot{x}_{ij} + \dot{x}_{i+1j+1}) & \text{但し } j=n_y \text{ のとき } 0 \end{cases}$$

$$N(i,j;i+1,j+1) = -\frac{1}{24} h_{j+1} \times (\dot{x}_{i+1j+1} + 2\dot{x}_{ij} + \dot{x}_{ij+1}) = -N(i,j;i,j+1) \quad \text{但し } j=n_y \text{ のとき } 0$$

但し $\dot{x}_{ij} = \frac{\partial x_{ij}}{\partial t}$ である.