

Compactification の Remainder の  
次元について

東京教育大 保科隆雄

空間は断らな<sup>い</sup>限り Completely regular  $T_1$  位相空間とする。

§ 1. 序

位相空間  $X$  の  $T_2$  compactification  $CX$  において, その Remainder  $CX - X$  の次元を考察する問題は, Freudenthal [1] の 1942 年の結果から始まり, 最近の Smirnov [10], Lelek [8] 等まで, 数多く論じられているが, 依然として本質的な問題は未解決なまゝである。例えば, これらの論点で扱われている空間の多くは可分距離空間であることなど, 比較的容易に眼に付く条件の狭さ等は, 未だにそのまゝであったり, 全体的に, 手の下しような<sup>い</sup>難解な問題が昔から現在に至るまで山積しているとい<sup>う</sup>感じである。

§ 2 以下では, いままで知られている結果を述べるると同時に, 未解決の問題について述べることもする。

<sup>\*</sup> compactification は全<sup>て</sup>, 少なくとも  $T_2$  とする。

§2  $\dim(CX - X)$  に ついて.

序で述べたように, この種の問題の発端となった最初の結果は, Freudenthal [1] により与えられた. 以下  $\dim$  は covering dimension を表わす.

定理1 (Freudenthal [1])

「separable metric space  $X$  に対し,

$X$  の metric compactification  $rX$  で

$$\dim(rX - X) \leq 0$$

となるものが存在する必要十分条件は,  $X$  が semi-compact であること。」

ここで, 空間  $X$  が semi-compact であるとは,  $X$  の各点が boundary から compact な neighborhood の base を持つ空間のことと言う (Zippin [11]).

この定理から自然, 0次元から  $n$ 次元へ発展させることの考察が生じることが, その前に, まず0次元の場合について, より一般的の考察が試みられた.

次の結果は, 本質的に uniformity の立場からとらえられたもので, 後に述べる Smirnov [10] の結果と比較すると興味深い. これらは次の基本事項に依存している.

定理2 (Freudenthal [2], Morita [5])

「 $X$  を semi-compact,  $T_2$ -空間とすると,  $X$  は completely

regular となる。」

実際、この時  $X$  は、boundary が compact となる open subset の finite cover 全体を考えると、 $X$  の位相と compatible な uniformity が与えられ、uniform space となる (注 Morita [5])。

この uniformity により、自然次の結果が与えられる。

定理 3 (Freudenthal [2], Morita [5])

「semi-compact  $T_2$ -空間  $X$  に対し、その compactification  $\alpha X$  で、 $\text{ind}(\alpha X - X) \leq 0$  となるものが存在する。」

ここで、 $\text{ind}$  とは small inductive dimension を表わす。

Skljarenko [9] は次の形で与えた。

定理 4 (Skljarenko [9])

「 $X$  が type  $C$  の空間となる時、 $X$  の compactification  $cX$  で  $\text{dim}(cX - X) \leq 0$  となるものが存在する必要十分条件は、 $X$  が semi-compact であること。」

ここで、 $X$  が type  $C$  の空間であるとは、 $X$  の任意 compact subset に対し、それを含む  $X$  の compact subset で、countable character を持つものが存在する、ような空間を言う。一般に、Lindelöf space  $X$  では、 $\text{ind} X \leq 0$  と  $\text{dim} X \leq 0$  は同値であり、更に、次の結果より上の定理 3 と 4 は関連が

明瞭となる。

定理5 (Skljarenko [9])

「 $X$  が type  $C$  である必要十分条件は、 $X$  の任意の compactification  $cX$  に対し、 $cX - X$  が Lindelöf となること。」

全ての距離空間は明らかに type  $C$  の空間であり、また定理3の追加として、この場合  $cX$  の weight と  $X$  の weight が同じとなることも得られている。従って、定理1について  $C$ -次元の場合は全く完全に分析されている。

それでは  $n$  次元の場合、即ち  $X$  のある compactification  $bX$  で  $\dim(bX - X) \leq n$  となるものが存在するための  $X$  の必要十分条件を求める問題についてはどうかというと、これは完全な形では未解決であるが、最近 Smirnov [10] が proximity の立場から興味ある結果を与えた。以下若干これについて述べることにする。一般に  $X$  の proximity と compactification とは 1対1に対応する。従って、 $(X, c)$  を proximity space,  $c$  を proximity relation とする時、これに対応する compactification を  $cX$  と表わす。

定義1.  $(X, c)$  proximity space とする。

$X$  の open subset の finite collection  $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_k\}$  が extendable bordering とは、 $X - \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_k$  が compact  $Z$  としてこれを包含する open set  $H$  をとると  $\{H, \Gamma_1, \dots, \Gamma_k\}$  は  $X$  の proximal cover

となること。

定義2.  $cX$ .  $X$  の compactification とする。

$X$  が normally adjoined to  $cX - X$  であるとは  $cX - X$  における 2 つの disjoint closed set は  $cX$  の open set で分離できること。

定義1の条件は,  $cX - X \subset \bigcup_{i=1}^k (cX - \overline{X - K_i^{cX}})$  となることと同値であり, 又定義2を満足する空間としては type C' の空間がある。

定理6 [Smirnov [10])

「 $X$ : normally adjoined to  $cX - X$  とする。

$\dim(cX - X) \leq n \iff X$  の extendable bordering は,

order が  $n+1$  を越えざる extendable bordering で細分される。

この結果は形式上 simple であるが, 前に述べた問題とは若干意味が異なる。この問題に近い形としては次の結果が与えられる。

定理7 (Smirnov [10])  $X$  が type C' の空間である時,

$\exists cX$ . s.t. weight of  $cX = \text{weight of } X$ ,  $\dim(cX - X) \leq n$

$\iff \exists \Sigma$ :  $X$  の extendable bordering の family

s.t. ①  $\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Sigma, \exists \gamma \in \Sigma, \gamma \leq \gamma_1 \wedge \gamma_2$  ②  $\forall \gamma \in \Sigma$  order  $\gamma \leq n+1$

③  $\forall z \in X, \forall U_z$ : nbd. of  $z, \exists \gamma \in \Sigma, \exists V_z$ : nbd. of  $z$  s.t.  $S_\gamma V_z \subset U_z$

以上について未解決な問題としては次が上げられる。

問題1. 定義2における normally adjoinedness について  $X$  の持つべき必要十分条件は何か?

問題2 (Skljarenko [9])

$X$  が countable base  $\mathcal{B}$  を持ち, 更に勝手に  $U_1, \dots, U_{n+1}$  を  $\mathcal{B}$  からとると,  $\bigcap_{i=1}^n (\bar{U}_i - U_i)$  が compact とする。この時  $X$  の metric compactification  $\alpha X$  で  $\dim(\alpha X - X) \leq n$  とするものが存在するか?

問題1については,  $\beta X$  (Stone-Čech) についてはわかれば十分である。

問題2については, 逆は成立することは全くと自明である。なおこれは定理7と関連して興味深い。

### §3 $\text{def } X$ について

§2では一般の空間で論じた結果が中心であったが, ここでは, 空間は全て separable metric space の範囲に限定する。限定してもなお全然不明な問題が多くある。

まず次の2つの notation を与える。

1  $\text{def } X = \min_c \dim(cX - X)$ ;  $cX$ : metric compactification

2  $\text{cmp } X \leq n$  とは

$\text{cmp } X = -1 \Leftrightarrow X$ : compact, 以下帰納的に  $\text{cmp } X \leq n-1$  として

あることが定義できたとして,  $\text{cmp} X \leq n$  とは,  $X$  の任意の点が任意に小さい nbd. で boundary の  $\text{cmp} \leq n-1$  となっていることを持つこと。

次元関数  $\text{def}$  (deficiency) 及び  $\text{cmp}$  (compactness) は, Groot [3], Groot and Nishiura [4] により与えられ, またその基本的性質もいくつか得られている。これらは, その定義と定理 1 から容易に導かれるように 0 次元の場合は次のように言い換えることができる。

定理 8 (Groot and Nishiura [4])

「 $\text{def} X \leq 0 \Leftrightarrow \text{cmp} X \leq 0 \Leftrightarrow X \text{ semi-compact}$ 」

事実, 上の  $\text{cmp}$  は  $\text{def}$  を計るために, Groot and Nishiura [4] が与えたもので, 上のように 0 次元の場合は形式上成り立っているが, 一般の  $n$  次元については全然といってよい程不明である。即ち次の問題は古くから肯定も否定も何の手掛かりも無い有名な問題である。

問題 3  $\text{cmp} X = \text{def} X$  ?

deficiency はそれ自身空間の内部的構造による描写が何も与えられていないにもかかわらず, 他の次元との比較や, 写像と次元に用いる問題等に用いられている。以下にそれらについて述べることにする。

また空間  $X$  に対し,  $\dim X$  と  $\text{def} X$  は常に比較が付き,

$\dim X \equiv \dim X$  であることが容易に知られる。これは、  
更に次の Lelek [8] により更に精密化される。

定理9 (Lelek [8])

「 $P(X)$  を  $X$  の点で任意に小さい nbd. の boundary compact であるものの全体とする時、

$$\dim X \equiv \dim \overline{X - P(X)} + 1 \quad \downarrow$$

この不等式では、右辺の 1 は省ける。これは次の例で明らかである。  $I = [0, 1]$  とすると、

$$X = I^n \times \{0\} \cup (I^n \times \{ \frac{1}{i} \mid i=1, 2, \dots \}) \text{ とすると、}$$

$$\dim X = n, \quad \dim(X - P(X)) = n-1,$$

これに類似した不等式は未だ他に見当たらない。

$\dim X < \dim X$  となる場合については次の空間が考えられている。

定義3  $X$  が  $\aleph_1$  種の  $G_\delta$ -space であるとは、ある compactification  $cX$  があって、 $X = \bigcap_{i=1}^{\aleph_1} G_i$ ,  $G_i$  open in  $cX$ ,  $\dim(\overline{G_i}^c - G_i) < \dim X$  となること。  $\aleph_1$  種でない時、 $\aleph_2$  種であるという。

例。  $P$ : irrational in  $[0, 1]$  とする時、 $P \times I^n$  は  $\aleph_2$  種。

◦  $I^n - (I - P)^n$  は  $I^n$  の  $\aleph_1$  種。

定理10 (Lelek [7])

$X$  complete,  $\dim X < \infty$  とする。

$X$  が  $\aleph_1$  種の  $G_\delta$ -space  $\Leftrightarrow \exists cX, \dim(cX - X) < \dim X$



Mapping と dimension に用いて deficiency を用いて, Lelek [6] が次のような結果を与えている。

定理 II (Lelek [6])

「 $f: X \rightarrow Y$  continuous onto,  $\Leftrightarrow f^{-1}y$  locally compact for  $\forall y \in Y$  とある。この時

$$\dim X \leq \dim Y + \max \{ \dim f^{-1}y \text{ for } \forall y \in Y, \text{def } X \}$$

この結果より例えは、 $X$  が non-compact で各 quasi-component が locally compact, の次ならば  $\dim X \leq \text{def } X$ , 114 中の Nishiura [12] の結果が系として与えられる。

ここで次の問題が open となっている。

$$\left[ \dim X \leq \dim Y + \max \{ \dim f^{-1}y \text{ for } \forall y \in Y, \text{def } X \} + \text{loc. comp} + 1 \right]$$

ただし  $f: X \rightarrow Y$  continuous onto とし, 空間  $S$  に対し,

$\text{loc comp } S \leq n$  とは, notation 2 において compact の代わりに locally compact とした場合とある。更に  $\text{loc. comp } f$  は, 各点  $y \in Y$  に対し  $\text{loc. com } f^{-1}y$  の最大値とある。

以上。

## 参考文献

1. Freudenthal, Neuaufbau der Endentheorie, *Ann. of Math.* 43 (1942) 261-279.
2. ———, Kompaktifizierungen und Bikompaaktifizierungen, *Indag. Math.* 13 (1951), 184-192.
3. Groot, *Topologische Studien*, Groningen, Noordhoff 1942.
4. ——— and Nishiura, Inductive compactness as a generalization of semicompactness, *Fund. Math.* 58 (1966)
5. Morita, On bicompaactifications of semibicompaact spaces *Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku Sect. A.* 4 (1952), 222-229
6. Lelek, Dimension and Mappings of spaces with finite deficiency. *Colloq. Math.* 12 (1964), 221-227
7. ———, Sur deux genres d'espaces complets, *Colloq. Math.* 8 (1961)
8. ———, On an estimate of the deficiency of a space *Soviet Math. Dokl.* 8 (1967) No. 5. 1308-1310
9. Skljarenko, Some questions in the theory of bicompaactifications, *Amer. Math. Soc. Transl. (2)* 58 (1966)
10. Smirnov, Dimension of increments of proximity spaces and of topological spaces, *Soviet Math. Dokl.* (1966) Tom 166, No. 3

11. Zippin. On semicompact spaces. *Amer. Jour. of Math.* 57 (1935). 327-341.
12. Nishiura, On the dimension of semi-compact spaces and their quasicomponents, *Colloq. Math.* 12 (1964), 7-10