数理解析研究所講究録
151巻 1972年 131-143

確率常微分方程式の定常解についての見解

東教大　丸山儀四郎

§1 motivation

こゝに述べる事柄は，常微分方程式の安定性など大局的な問題と確率過程論の接点にあると思われる一二の点についての問題提起である．確率微分方程式といえば伊藤の方程式は"すぐれて確率論的"構造をしている．その意味はこの方程式が，微分方程式の単純な確率化（randomization）に止まらず，white noise を媒介にして情報の発展の機構が方程式によってするどく規定されているということである．単純な確率化というのは，方程式の決定要素——たとえば係数——を確率変数や確率過程でおきかえる形式的な一般化を意味する．ところで，これからのべようとする事柄は実は，このような形式的な一般化に関連するのである．この種の一般化は，動機が形式的であって，数学的に実りある現象を含んでいるとは，必ずしもいえないが，場合によ

つては新しい問題を提起する可能性を持っている。

Langevin 方程式は確率微分方程式の古典的に有名な例であり，それからマルコフ過程が解として得られることは周知のことである。これからのべる事柄は同様なやり方で解のマルコフ性を論ずる問題にも発展させることができるが，ここではいま一つ別の方向 —— Langevin 方程式でもそうであったように —— 解の定常性を主題として考えることにする。

Langevin 方程式は

$$(1) \qquad Lx = \frac{dx}{dt} + kx = w'(t) \qquad (k>0)$$

とかれ，x は直線上を運動する粒子の速度，k は抵抗係数，w' は random な外力である。w' をブラウン運動の微分ととれば，その一つの解として Ornstein-Uhlenbeck 過程

$$(2) \qquad x(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-k(t-s)}\, dw(s)$$

が得られる。これが正規定常マルコフ過程であることはよく知られている。勿論一般の初期条件を含む解を確率積分の形で求めることは容易であるが，(2) が (1) の唯一の定常解であることを強調したい。

処で $w'(t)$ は最も基本的な定常過程であるが，右辺を通常の弱定常過程 $f(t)$ でおきかえても同様のことがいわれる；唯一つの定常解があって

$$(3)\qquad x(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{-k(t-s)} f(s)\,ds$$

で与えられる。

(3)の右辺の指数関数による積分核は無限大区間 $(-\infty,\infty)$ における，L の一つの Green 関数である。

§2　概周期係数の常微分方程式

簡単のため話しを若干飛躍させるが，つぎの常微分方程式

$$(4)\qquad Lx=f(t),\quad -\infty<t<\infty,$$

$$Lx=\frac{d^m x}{dt^m}+a_1(t)\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}+\cdots+a_m(t)x,$$

$$a_1(t),\ \cdots,\ a_m(t)\in \mathcal{B}$$

を考える。ここに $\mathcal{B}$ は $(-\infty,\infty)$ 上の実数値概周期関数（Bohr の）の全体である。

L の定義域 $\mathcal{D}(L)$ は

$$\mathcal{D}(L)=\{x:\ x\in C^m,\ Lx\in C,\ x\in C\},$$

ただし $C=(-\infty,\infty)$ 上の実有界連続関数の全体。

従って(4)の右辺 $f\in C$ とする。さて可微分関数の

初等的な性質から $x \in \mathcal{D}(L)$ であれば常に $x', \cdots, x^{(m)} \in C$ をみたすことが知られている。

概周期係数の微分方程式は相当古くから研究されている。([1])。周期係数の方程式は力学の問題とも関連して重要なものであるが、前者はその一般化という意味があり、また係数の概周期性はその特殊性のゆえに、可成り大巾に一般論の展開を可能にする。

解の安定性に関連して、regularity ([1] による) とよばれる性質がある。

「任意の $f \in C$ に対して、有界な解 x $(\in \mathcal{D}(L))$ が少くとも一つ存在するとき L は <u>regular</u> であるという。」

さて一般論によれば、L が regular であるためには、特に $f \in \mathcal{B}$ の場合に上記「…」が成立すれば充分であり、また L が regular であれば上記の有界な解は<u>唯一つ</u>であることが証明される。そしてこの点に関してつぎの事実が証明されている：[ムハマヂエフ] L が regular であるための必要充分な条件は([1])

$$(5) \qquad \tilde{L}x = 0$$

の有界な解が trivial $x \equiv 0$ な場合に限ることである。ここに

$$\tilde{L} = \frac{d^m}{dt^m} + \tilde{a}_1(t)\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + \cdots + \tilde{a}_m(t)$$

$\{\tilde{a}_1, \cdots, \tilde{a}_m\}$ は $\{a_1, \cdots, a_m\} \in C \times \cdots \times C$ (m重) の shift から生ずる orbit closure (位相は C の sup. norm) の元, 即ち $\{a_1(\cdot + h_k), \cdots, a_m(\cdot + h_k)\}$ $k = 1, 2, \cdots$, なる形の列の一様極限としてえられる任意の元である。

さて L の regularity を $a_1, \cdots, a_m$ の具体的な性質から判定できる有効な条件を与えることは容易ではないが, 特に $a_1, \cdots, a_m$ が定数である場合は古典的によく知られている。 このとき基本解系のよく知られた事実から容易に, 又はそれに上記ムハマヂェフの定理を援用すれば, ますます容易につぎのことが分る。 L が regular であるための必要充分条件はその特性方程式

$$(6) \qquad \lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \cdots + a_m = 0$$

の根が虚軸上に来ないことである。

§3 定常解の存在

さてこれは一方, 形式上の類似性によるのであるが,

概周期関数に定常過程を対応させてみる。ある種の定常過程の sample function は実際確率1で概周期関数になるし、定常過程は時間を径数として確率変数の空間の曲線とみて、特殊な不変性をもち、もしそれが metrically transitive であれば再帰性をもつなどの理由から色々な意味でこの対応が自然であると考えられる。然し一方つぎの点も注意しなければならない。標準的な実正規定常過程 $x(t)$ に対して、よく知られているように

$$P\left(\lim_{T\to\infty}\max_{|t|\leq T}|x(t)|=\infty\right)=1$$

であって、その sample function の行動は通常の概周期関数とは全く異っている。直観的な言い方をすれば、概周期関数の（ε 近傍への）再帰時間は有界的であるのに対して、定常過程のそれはそのような性質をもたない。

いま R^m 値強定常過程 $(a_1(t,\omega),\cdots,a_m(t,\omega))$ を係数とする微分作用素 L を考え、それが如何なる条件のもとで regular になるかを問題にする。その際に L に現われる微分の意味 — sample wise か、強微分かなど —，および L の定義域が 等 — に問題に

なるし，また"regularity"をどう定義するかも問題になる。ここで正確な解答は得られないが，概括的にいって，方程式の右辺の定常過程をあるクラス（線型空間をなす）からえらんだとき，その解はまた別のあるクラス（これも線型空間をなす）から選ぶと約束したとき，解が<u>一つ唯一つ</u>存在することをもってregularということにする。

最も簡単な場合は $a_1, \dots, a_m$ が t も ω も含まない定数の場である。このとき $E(|f(t,\omega)|) < \infty$ をみたす f に対して

(7) $$Lx = f \qquad (f \text{は定常過程})$$

をみたす定常解が一つ唯一つ（この意味で L が regular）存在するための条件は(6)の根が虚軸上に来ないことである。即ち概周期解の場合と同一のregularityが成立する。

問題の本質を見きわめるためには具体例を解析する必要がある。その意味で最も単純であるが有効な具体例としてLangevinの方程式の拡張になる場合

(8) $$Lx \equiv \frac{dx}{dt} + a(t)x = f(t)$$

を考える。 概周期関数の場合つぎの定理が成立する。

定理（Massera） $a(t)$ が概周期関数のときLがregular（通常の概周期解の意味で）であるための条件は（[1]）

$$(9) \quad M(a) \equiv \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} a(t)\,dt \neq 0,$$

これと全く類似のことが定常過程の場合にも成り立つことを以下に示す。formulationを簡単にするためにergodicな流れ T_t が与えられていて, a, f は $a(T_t\omega)$, $f(T_t\omega)$ の如く T_t から生成され $P((t \to f(T_t\omega)) \in C) = 1$ がみたされているとする。かゝる任意の f に対してsample wiseに C' であって(8)の解となる定常解 $x(t) = x(T_t\omega)$ が存在するための充分条件を求める。(9)に対応する条件として(必要)

$$(A)\begin{cases} a(T_t\omega) = \lambda + a_0(T_t\omega), & \lambda \neq 0\ (\text{定数}) \\ E(a_0) = 0 \end{cases}$$

を考える。

簡単のため $\lambda > 0$ のときを考える。このときGreen関数

$$G(t,s) = \begin{cases} \exp\left(-\int_s^t a_0(T_\tau\omega)\,d\tau\right) & t \geq s \\ 0 & t < s \end{cases}$$

を用いて，求める定常解が唯一つ存在して

$$x(t)=\int_{-\infty}^{t}\exp\left(-\int_{s}^{t}a(T_\tau\omega)d\tau\right)\cdot f(T_s\omega)\,ds$$

とかけることは容易に確かめられる．実際この右辺は

$$x(t)=\int_{0}^{\infty}\exp\left(-\int_{0}^{s}a(T_{-\tau}\omega')\,d\tau\right)f(T_{-s}\omega')\,ds,$$

$$\omega'=T_t\,\omega$$

と変形されることから $x(t)$ の定常性が分り，また

$$\lim_{s\to\infty}s^{-1}\int_{0}^{s}a(T_{-\tau}\omega')\,d\tau=\lambda>0$$

から $x(t)$ が sample wise C^1 であることが分る．

安定性の問題の用語でいえば方程式

(10) $$\frac{dx}{dt}+a(T_t\omega)x=0$$

の characteristic exponent (Liapounov) が λ である．

逆に L が上記の意味で regular だとすると，特に $f\equiv1$ に対して解が存在するのでこれを x_0 とする．

(定常) 方程式を変形して

(11) $$a(t)=\frac{1}{x_0}-\frac{x_0'}{x_0}$$

一方

$$x_0' = 1 - a(t)x_0$$

であり，右辺 $1-a(t)x$ に対応して (t, x) 平面上で t 軸を $45°$ で横切るベクトル場が与えられる。だから積分曲線 x_0 は t 軸を下から上に一度だけ横切ることはあっても，上から下に横切ることはない。かくして x_0 の可能な行動は (1) $x_0(T_t\omega) > 0$ $(-\infty < t < \infty)$ (2) $x_0(T_t\omega) < 0$ $(-\infty < t < \infty)$ (3) random time $\tau(\omega)$ が存在して $x(T_t\omega) < 0$ $(t < \tau)$，$x(T_t\omega) > 0$ $(t > \tau)$ に限られる。(1)，(2)，(3)をみたす ω-set は何れも T_t-不変であり，T_t が ergodic であるから，(1)，(2)，(3)のうち一つしか成立しない。然るに定常過程の sample function として(3)の行動は不可能である。いま(1)の場合についてみると，random sequence $\tau_n(\omega) \uparrow \infty$ と $c(\omega) > 0$ が存在して

$$x_0(T_{\tau_n}\omega) \geq c(\omega).$$

(11)を積分して

$$\frac{1}{\tau_n}\int_0^{\tau_n} a(T_t\omega)\,dt = \frac{1}{\tau_n}\int_0^{\tau_n} \frac{1}{x_0(T_t\omega)}\,dt$$

$$-\left(\log x_0(T_{\tau_n}\omega)-\log x_0(\omega)\right)/\tau_n .$$

$n\to\infty$ に対して右辺の第二項は 0 に近づき，第一項は正の値に近づくが，このことから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\tau_n}\int_0^{\tau_n}a(T_t\omega)\,dt=E(a(\omega))>0.$$

かくて (A) が必要条件であることが分った。

さて regularity をより強めてみる．解のクラスとして

$$E(|x(T_t\omega)|)<\infty$$

を要求したとすれば，a にも強い条件が要求される．具体的な計算を可能ならしめるために $a(T_t\omega)$ が正規定常過程となる場合を考える． a_0 が連続なスペクトル密度 $\kappa(\lambda)$ をもつとする；

$$E\left(a_0(T_t\omega)\,a_0(\omega)\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\cos\lambda t\ \kappa(\lambda)\,d\lambda.$$

$f\equiv 1$ に対する解は

$$E(|x(T_t\omega)|)=\int_0^{\infty}E\exp\left(-\int_0^{s}a(T_{-\tau}\omega)\,d\tau\right)ds$$

$$=\int_0^{\infty}E\exp\left(-\lambda s-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\kappa(\lambda)\left(\frac{\sin\lambda s/2}{\lambda/2}\right)^2d\lambda\right)ds$$

$$<\infty$$

をみたさねばならない。処が

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} K(\lambda)\left(\frac{\sin\lambda s/2}{\lambda/2}\right)^2 d\lambda = \pi K(0)s + o(s)$$

であるから，可成り自然な条件として，$E(|x|)<\infty$ であるためには

$$(12) \qquad \lambda > \pi K(0)$$

であればよい。そしてこのとき実は解に対してもっと強いことが成立する。即ち，たとえば

$$(13) \qquad E(f^2(\omega))<\infty$$

であれば，$E(|x(t)|)<\infty$ をみたす唯一つの定常解が存在する。何故ならば

$$|x(t)| \le \left(\int_0^{\infty}(1+s^2)\exp\left(-2\int_0^s a(T_{-\tau}\omega')d\tau\right)ds\right)^{1/2}$$

$$\times\left(\int_0^{\infty}\frac{1}{1+s^2}f^2(T_{-s}\omega')ds\right)^{1/2}, \quad \omega' = T_t\omega,$$

$$E(|x(t)|) \le \int_0^{\infty}(1+s^2)E\exp\left(-2\int_0^s a(T_{-\tau}\omega)d\tau\right)$$

$$\times \int_0^{\infty}\frac{1}{1+s^2}E(f^2(\omega))ds < \infty$$

さてこれらの問題を一般に扱うためには作用素

$$Lx \equiv \frac{dx}{dt} + Ax$$

$$A = \| a_{ij}(T_t\omega) \|_{i,j=\overline{1,n}}, \quad x \in R^n, \; T_t \text{ ergodic}$$

を研究すればよいが，とくに A が三角形，即ち $a_{ij} \equiv 0$ $(i<j)$ となる場合は上に導いた事実の系として直ちにつぎの解答が得られる：L が regular であるための必要充分な条件は

$$E(a_{jj}(\omega)) \neq 0 \quad (j=1,\dots,n).$$

(c.f. [1])

文献

[1] М.А.Красносельский, В.Ш.Бурд, Ю.С.Колесов; 非線型概周期振動, Изд.«Наука», Москва 1970.

[2] Ю.Л.Далецкий, М.Г.Крейн; バナッハ空間の微分方程式の解の安定性, Изд.«Наука», Москва 1970.
(後者は直接よめなかったが，これは抽象論の特徴として問題の枠組みを極めて明解にとらえてある).