

一階非線型偏微分方程式の
初期値問題

早大理工 小島清史

§1. 序

非線形双曲型方程式の初期値問題の解は、弱解の範囲では一意に定まらない。そこで、一意に解を定めるために通常エントロピー条件をつけ加えている。Krjukov [1] は初期値問題。

$$(1) \quad u_t + \sum_{i=1}^n (f_i(u))_{x_i} = 0 \quad f_i \in C^1$$

$$(2) \quad u(t, x) = u_0(x). \quad u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$$

の generalized solution を、つきのように定義した。すなわち有界可測函数 $u(t, x)$ が (1) (2) の generalized solution であるとは、つきの 2 つの条件を満たす場合をいう。

(i). 任意の定数 λ と任意の $\varphi(t, x) \in C_c^1(\Pi_T)$, $\Pi_T = [0, T] \times \mathbb{R}^n$

$\varphi(t, x) \geq 0$ に付して。

$$(3) \quad \iint_{\Pi_T} \left\{ |u - \varphi| \varphi_t + \sum_{i=1}^n \text{sign}(u - \varphi) [f_i(u) - f_i(\varphi)] \varphi_{x_i} \right\} dx dt \geq 0$$

(ii). 測度 ν の集合 $N \subset [0, T]$ が存在して、 $u(t, x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$
for any $t \in [0, T] - N$, かつ、任意の球 $K_R = \{x; |x| \leq R\}$ に \exists

(2).

$$(4) \quad \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \in [0, T] - N}} \int_{K_R} |u(t, x) - u_0(x)| dx = 0.$$

(3) にありて, $k = \pm \sup(|u(t, x)|)$ とすれば gen. sol. u は
(1) の弱解であることが分かる。Kružkov は, gen. sol. の
一意性と存在を示した。

これは、(1)(2) に対する差分近似解が、上で述べた
(1), (2) の gen. sol に収束することを示す。

3.2. 差分方程式.

簡単のために、 $n = 2$ とする。すなわち、つきのように初期
値問題に対する差分近似を考える。

$$(5) \quad \begin{cases} u_t + f(u)_x + g(u)_y = 0 & f, g \in C^1 \end{cases}$$

$$(6) \quad u(0, x, y) = u_0(x, y) \in L^\infty$$

さて、つきのような記号を導入する。

$$u_{\ell,m}^n = u(n\ell, m\rho, m\varphi) \quad f_{\ell,m}^n = f(u_{\ell,m}^n) \quad g_{\ell,m}^n = g(u_{\ell,m}^n)$$

(5)(6) に対する差分近似と(2). つきのようならその考察
を3。

$$(17) \frac{u_{\ell,m}^{n+1} - \bar{u}_{\ell,m}^n}{r} + \frac{f_{\ell+1,m}^n - f_{\ell,m}^n}{2P} + \frac{g_{\ell,m+1}^n - g_{\ell,m-1}^n}{2q} = 0$$

$$\therefore \tau = \bar{u}_{\ell,m}^n = \frac{1}{4}(u_{\ell+1,m}^n + u_{\ell-1,m}^n + u_{\ell,m+1}^n + u_{\ell,m-1}^n) \text{ である。}$$

補題 1. $\sup |u_{\ell,m}^n| = M$, $\frac{r}{P}A < \frac{1}{2}$, $\frac{r}{q}B < \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow |u_{\ell,m}^n| \leq M$$

$$\tau \in L, A = \sup_{|v| \leq M} |f'(v)|, B = \sup_{|v| \leq M} |g'(v)|$$

証明). (17) ④

$$(17) u_{\ell,m}^{n+1} = \left(\frac{1}{4} - \frac{r}{2P}\alpha_{\ell,m}^n\right)u_{\ell+1,m}^n + \left(\frac{1}{4} + \frac{r}{2P}\alpha_{\ell,m}^n\right)u_{\ell-1,m}^n \\ + \left(\frac{1}{4} - \frac{r}{2q}\beta_{\ell,m}^n\right)u_{\ell,m+1}^n + \left(\frac{1}{4} + \frac{r}{2q}\beta_{\ell,m}^n\right)u_{\ell,m-1}^n$$

$$\therefore \tau = \bar{u}_{\ell,m}^n = \begin{cases} (f_{\ell+1}^n - f_{\ell,m}^n)/(u_{\ell+1,m}^n - u_{\ell,m}^n) & u_{\ell+1,m}^n \neq u_{\ell,m}^n \\ f'(u_{\ell,m}^n) & u_{\ell+1,m}^n = u_{\ell,m}^n \end{cases}$$

$$\beta_{\ell,m}^n = \begin{cases} (g_{\ell,m+1}^n - g_{\ell,m-1}^n)/(u_{\ell,m+1}^n - u_{\ell,m-1}^n) & u_{\ell,m+1}^n \neq u_{\ell,m-1}^n \\ g'(u_{\ell,m+1}^n) & u_{\ell,m+1}^n = u_{\ell,m-1}^n \end{cases}$$

である。 $\tau = \bar{u}_{\ell,m}^n \leq M$ とすると後述する $|u_{\ell+1,m}^n|, |u_{\ell,m-1}^n|$

の値が正でない $\tau = \bar{u}_{\ell,m}^n \leq M$

補題 2. $u_{\ell,m;h_1,h_2}^n = u_{\ell+h_1,m+h_2}^n - u_{\ell,m}^n \leq 0$ である。

$$\sum_{\substack{|k| \leq N_1 \\ |m| \leq N_2}} |u_{\ell,m;h_1,h_2}^n| Pq \leq \sum_{\substack{|\ell| \leq N_1 + n \\ |m| \leq N_2 + n}} |u_{\ell,m;h_1,h_2}^n| Pq$$

証明 補題1の証明と同様に 1. 2.

$$\begin{aligned} u_{\ell,m;h_1,h_2}^{n+1} &= \left(\frac{1}{4} - \frac{r}{2p} \alpha_{\ell+1,m;h_1,h_2}^n \right) u_{\ell+1,m;h_1,h_2}^n + \left(\frac{1}{4} + \frac{r}{2p} \alpha_{\ell,m;h_1,h_2}^n \right) u_{\ell-1,m;h_1,h_2}^n \\ &\quad + \left(\frac{1}{4} - \frac{r}{2q} \beta_{\ell,m+1;h_1,h_2}^n \right) u_{\ell,m+1;h_1,h_2}^n + \left(\frac{1}{4} + \frac{r}{2q} \beta_{\ell,m-1;h_1,h_2}^n \right) u_{\ell,m-1;h_1,h_2}^n \end{aligned}$$

∴ 1. 2.

$$\alpha_{\ell,m;h_1,h_2}^n = \begin{cases} f_{\ell,m;h_1,h_2}^n / u_{\ell,m;h_1,h_2}^n & u_{\ell,m;h_1,h_2}^n \neq 0 \\ f'(u_{\ell,m}^n) & u_{\ell,m;h_1,h_2}^n = 0 \end{cases}$$

$$\beta_{\ell,m;h_1,h_2}^n = \begin{cases} g_{\ell,m;h_1,h_2}^n / u_{\ell,m;h_1,h_2}^n & u_{\ell,m;h_1,h_2}^n \neq 0 \\ g'(u_{\ell,m}^n) & u_{\ell,m;h_1,h_2}^n = 0 \end{cases}$$

1. 2. 3. 4.

$$\sum_{\substack{|\ell| \leq N_1 \\ |m| \leq N_2}} |u_{\ell,m;h_1,h_2}^{n+1}|^p \leq \sum_{\substack{|\ell| \leq N_1+1 \\ |m| \leq N_2+1}} |u_{\ell,m;h_1,h_2}^n|^p$$

補題3. $u_{\ell,n}^{n+h} = u_{\ell,m}^{n+h} - u_{\ell,m}^n$ とおくと 3.

$$\sum_{\substack{|\ell| \leq N \\ |m| \leq N_2}} |u_{\ell,m}^{n+h}|^p \leq \sum_{\substack{|\ell| \leq N_1+n \\ |m| \leq N_2+n}} |\text{conv.}\{u_{\ell,m;h_1,h_2}^n; h_1, h_2\}|^p$$

証明、補題2の証明とまったく同様に 1. 2.

$$\sum_{\substack{|\ell| \leq N_1 \\ |m| \leq N_2}} |u_{\ell,m}^{n+h}|^p \leq \sum_{\substack{|\ell| \leq N_1+n \\ |m| \leq N_2+n}} |u_{\ell,m}^n|^p$$

∴ 1. 2. 3. 4. 5. 6.

$$u_{\ell,m}^h = \text{conv.}\{u_{\ell,m;h_1,h_2}^n; |h_1| + |h_2| \leq h\}$$

補題4. 差分方程式(7)の解は任意の定数倍に併せて

$$\begin{aligned} |u_{\ell,m}^{n+1} - k| &= \overline{|u_{\ell,m}^n - k|} + \frac{\text{sign}(u_{\ell+1,m}^n - k)[f_{\ell+1,m}^n - f(k)] - \text{sign}(u_{\ell,m}^n - k)[f_{\ell,m}^n - f(k)]}{2P} \\ &\quad + \frac{\text{sign}(u_{\ell,m+1}^n - k)[g_{\ell,m+1}^n - g(k)] - \text{sign}(u_{\ell,m-1}^n - k)[g_{\ell,m-1}^n - g(k)]}{2q} \leq 0, \end{aligned}$$

証明.

$$\begin{aligned} u_{\ell,m}^{n+1} - k &= \left(\frac{1}{4} - \frac{r}{2P}\alpha_{\ell+1,m}^n(k)\right)(u_{\ell+1,m}^n - k) + \left(\frac{1}{4} + \frac{r}{2P}\alpha_{\ell-1,m}^n(k)\right)(u_{\ell-1,m}^n - k) \\ &\quad + \left(\frac{1}{4} - \frac{r}{2q}\beta_{\ell,m+1}^n(k)\right)(u_{\ell,m+1}^n - k) + \left(\frac{1}{4} + \frac{r}{2q}\beta_{\ell,m-1}^n(k)\right)(u_{\ell,m-1}^n - k) \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\alpha_{\ell,m}^n(k) = \begin{cases} (f_{\ell,m}^n - f(k)) / (u_{\ell,m}^n - k) & u_{\ell,m}^n \neq k \\ f'(k) & u_{\ell,m}^n = k \end{cases}$$

$$\beta_{\ell,m}^n(k) = \begin{cases} (g_{\ell,m}^n - g(k)) / (u_{\ell,m}^n - k) & u_{\ell,m}^n \neq k \\ g'(k) & u_{\ell,m}^n = k \end{cases}$$

$u_{\ell+1,m}^n - k$ の係数はすべて正であることをより補題4が示す。

§3. 差分解の収束.

$$u_{\ell,m}^c = \frac{1}{pq} \int_{P\ell}^{(n+1)P} \int_{qm}^{(m+1)q} u_0(x,y) dx dy \quad \text{とし}.$$

$$U(t,x,y) = u_{\ell,m}^n \quad nT \leq t < (n+1)T, \quad \ell P \leq x < (\ell+1)P, \quad mq \leq y < (m+1)q,$$

とおく.

II ま

$$(9) \quad \frac{r_m}{p_m} = \lambda_1 < \frac{1}{2A} \quad \frac{l_m}{q_m} = \lambda_2 < \frac{1}{2B}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \text{ 定数}, \quad r_m \rightarrow 0 (m \rightarrow \infty)$$

たゞ列 $\{U^m(t, x, y)\}$ 上の ϵ に定義した関数列を $U^m(t, x, y)$

とすると、補題 1 より

$$|U^m(t, x, y)| \leq M.$$

補題 2 やび補題 3 より

$$\begin{aligned} & \iint_{\substack{|x| \leq X \\ |y| \leq Y}} |U^m(t+\tau, x+\tilde{h}_1, y+\tilde{h}_2) - U^m(t, x, y)| dx dy \\ & \leq \iint_{\substack{|x| \leq X + \frac{1}{\lambda_1} t \\ |y| \leq Y + \frac{1}{\lambda_2} t}} |U_0^n(x+\tilde{h}_1, y+\tilde{h}_2) - U_0^n(x, y)| dx dy \\ & \quad + \iint_{\substack{|x| \leq X + \frac{1}{\lambda_1} t \\ |y| \leq Y + \frac{1}{\lambda_2} t}} |U^m(x, y)| dx dy \end{aligned}$$

$$= 2 \cdot U^m(x, y) = \text{conv} \{ U_0^n(x+\tilde{h}_1, y+\tilde{h}_2) - U_0^n(x, y), |\lambda_1 \tilde{h}_1| + |\lambda_2 \tilde{h}_2| \leq \epsilon \}$$

$t = 3$ の場合、明らかに $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tau \rightarrow 0$ としたとき、上式の右辺は、既に同じく 0 に収束する。したがって $\{U^m\}$ は、 L^1_{loc} でコンパクトである。したがって、一般性を失なうことを除いて $\{U^m\}$ が L^1_{loc} で収束する（仮定してよい）。

このことと補題 4、および gen. sol の一意性より、

定理、条件 (9) をみたす列 $\{r_m, p_m, q_m\}$ に対する差分方程式の解

$\{U^m(t, x, y)\}$ は、初期値問題 (5), (6) の gen. sol に収束す

る。

証明. $\varphi(t, x, y) \in C_c^\infty(\Pi_T)$, $\varphi(t, x, y) \geq 0$ かつ φ

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi_{t,m}^n \left(\frac{u_{t,m}^{n+1} - u_{t,m}^n}{\tau} + \frac{f_{t+1,m}^n - f_{t,m}^n}{\tau} + \frac{g_{t,m+1}^n - g_{t,m}^n}{2\eta} \right) \\ &\geq \varphi_{t,m}^n \left\{ \frac{|u_{t,m}^{n+1} - t| - |u_{t,m}^n - t|}{\tau} + \frac{\text{sign}(u_{t+1,m}^n - t)[f_{t+1,m}^n - f(t)] - \text{sign}(u_{t,m}^n - t)[f_{t,m+1}^n - f(t)]}{\tau} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\text{sign}(u_{t,m+1}^n - t)[g_{t,m+1}^n - g(t)] - \text{sign}(u_{t,m}^n - t)[g_{t,m+1}^n - g(t)]}{2\eta} \right\} \end{aligned}$$

\Leftarrow $\rho\eta\tau$ をかけて, t, m, n について加えると容易に分かるよ
うに

$$\begin{aligned} &\iint \left\{ |U^n(t, x, y) - t| \varphi_t + \text{sign}(U^n - t) [f(U^n) - f(t)] \varphi_x + \text{sign}(U^n - t) [g(U^n) - g(t)] \varphi_y \right\} \\ &\quad dt dx dy \geq C(|V_m| + |P_m| + |\varphi_m|) \end{aligned}$$

(左が \geq , 右は $n \rightarrow \infty$ あると $U^n \rightarrow U(t, x, y)$ in $L^1_{loc}(\Pi_T)$
あり, $U(t, x, y)$ は条件 (i) を満たす。条件 (ii) を満たす
ことは補題より直ちに分かる。)

3.4. 補註

二) 結果は混合問題の場合でも, (iii), (iv) (並びに) 境界条件
をみたすといふことを初期値のときと同様に, L^1_{loc} で定義
されば適用出来る。

さらに 非齊次項がくわわ、右場合にはも適用出来る。

* さわち。

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x + g(u)_y + h(t, x, y, u) = -f_u(t, x, y, u), \text{odd} \\ u(x, x, y) = u_0(x, y) \in L^{\infty} \end{cases}$$

とし、gen. sol を 条件 (i) のからに。

(i)' 任意の $\varphi(t, x, y) \in C_0^1(\Pi_T)$, $\varphi \geq 0$ と 任意の 定数 $k \geq 0$ で

$$\iint \left\{ |u - k| \varphi_t + \text{sign}(u - k) [f(u) - f(k)] + \text{sign}(u - k) [g(u) - g(k)] - \text{sign}(u - k) h \varphi \right\} dx dt \geq 0$$

である。差分近似を

$$\frac{u_{l,m}^{n+1} - \bar{u}_{l,m}^n}{r} + \frac{f_{l+1,m}^n - f_{l,m}^n}{2P} + \frac{g_{l,m+1}^n - g_{l,m-1}^n}{2\delta} + h_{l,m}^{n+1} = 0$$

とすればよい。

このとき gen. sol の一意性は Krugler の場合とまつたく同様にして示される。また差分解の今まで得られた評価に補充する評価も 同様にして得られる。

文 献

- [1]. Kuznetsov. Dokl. Akad. Nauk S.S.R. Tom 187 ('69) №1
 (Soviet Math. Dokl. Vol 10 ('69), №4)
- [2]. Conway and Smoller. C.P.A.M. Vol 19 ('66)
- [3] Cleinik. Uspekhi Mat. Nauk 12 ('57)
 (A.M.S. Transl. Ser. 2, 26)
- [4]. Kojima Proc. Jap. Acad. 42 ('66)
- [5] Quinn C. P. A. M. 24 ('71)
- [6] Hopf. J. Math. Mech. 19 ('69)