

非線型整数計画法について

中央大・理工 西見二昭

§1 序

通常、整数計画法とは線型計画問題に於て整数解の範囲内で最適解を追求することの意味で用いられる。この分野では、LPでは見らしかった困難が多々存在するといかねばならず。近年各種のかなり実用的な手法が開発されていく。一方「非」線型計画問題の整数值最適解を求める方法—非線型整数計画法—については、未だ実用的なアルゴリズムは存在しない。

筆者の経験によれば、F. Glover⁽¹⁾の“surrogate constraint”の手法（これは線型整数計画法のために開発された）は種々の整数計画法アルゴリズムと併用するとき多くの場合後者の能率化に極めて有効である。しかも以下に示されるようく“surrogate constraint”的理論上の有効性は、目的関数や制約不等式の線型性に全く依拠していないのである。このことは非線型計画法における“surrogate constraint”を系統的

に活用した実用的解法の可能性を示唆している。

従つてまで、非線型整数計画問題に於ける“*s*-制約”(“surrogate constraint”)を今後このように略記する)を構成する実用的な手法の開発が、この角度からのアプローチにとって不可欠となってくる。本稿後半では、“*s*-制約”的一つの簡明な構成法(非線型性を含み強くなる場合に有効)を示した。

使用する主な記号を以下に掲げておく。

$$M = \{1, \dots, m\}, \quad m: 制約不等式の個数。$$

$$N = \{1, \dots, n\}, \quad n: 変数の個数。$$

$$\lambda_j \ (j \in N) : 正の整定数。$$

$$x : 実n-ベクトル。$$

$$X = \{x \mid 0 \leq x_j \leq \lambda_j \ (j \in N)\}$$

$$\Omega = \{x \mid x \in X, x_j \text{ integer } (j \in N)\}$$

$$U = \{(u_1, \dots, u_m) \mid u_i \geq 0 \ (i \in M), \exists i \in M \ (u_i \neq 0)\}$$

$g(x), F_1(x), \dots, F_m(x)$: X をふくむ \mathbb{R}^n の領域で定義された実数値関数で、連続的微分可能。

§2 非線型整数計画法における“surrogate constraint”

ここでいうあるかう非線型計画問題は次の形である。

[問題 I] $\Omega_0 = \{x \mid F_i(x) \geq 0 \ (i \in M), x \in \Omega\}$ における
 $g(x)$ を最小にする x を求めよ。

今後これを次のように略記する。

$$[I] \quad \min \{ g(x) \mid F_i(x) \geq 0 \quad (i \in M), x \in \Omega \}$$

[I] から整数制約条件を除くと次の [F] が得られる。

$$[F] \quad \min \{ g(x) \mid F_i(x) \geq 0 \quad (i \in M), x \in X \}$$

[I] または [F] に対する "S-制約" とは、任意の $u \in \mathbb{Z}^M$ から得られる $\sum_{i=1}^m u_i F_i(x) \geq 0$ なる不等式のことという。 $u_i \geq 0$ かつ $u \neq 0$ のあるから $M^+(u)$ を

$$M^+(u) = \{ i \mid u_i > 0 \} \subset M$$

と定義すると、 \mathbb{Z}^M 定義から $M^+(u) \neq \emptyset$ である。

[I], [F] における m 個の制約式 $F_i(x) \geq 0 \quad (i \in M)$ を、ある S-制約で書きかえた問題をもととし [IS], [FS] とする。即ち、

$$[IS] \quad \min \{ g(x) \mid f(x) \geq 0 \quad (f = uF, u \in \mathbb{Z}^M), x \in \Omega \}$$

$$[FS] \quad \min \{ g(x) \mid f(x) \geq 0 \quad (f = uF, u \in \mathbb{Z}^M), x \in X \}$$

次の lemma が示すよしに、S-制約はひとつの m 個の制約条件の「代理」として原問題の種々な情報を提供する。

(lemma)

1° \bar{x} が [I] に feasible $\Rightarrow \bar{x}$ は [IS], [FS] に feasible.

2° [IS] or infeasible \Rightarrow [I] は infeasible.

[FS] が infeasible \Rightarrow [I], [F] は infeasible.

3° \bar{x} が [IS] または [FS] の feasible solution.

$$\Rightarrow \exists i \in M^+ \quad (F_i(\bar{x}) \geq 0).$$

\bar{x} が [IS] または [FS] の feasible solution

$$\Rightarrow [\exists i \in M^+ (F_i(\bar{x}) < 0) \Rightarrow \exists k \in M^+ (F_k(\bar{x}) > 0)]$$

4° $[I^{\bar{x}}]$, $[I]$ の optimal solution を \bar{x} と \hat{x} とするとき
 $g(\bar{x}) \leq g(\hat{x})$

5° $[I^{\bar{x}}]$ の optimal solution が $[I]$ の feasible
 \Rightarrow それは $[I]$ の optimal solution である。

この lemma によると、enumerative の 整数計画問題 $[I]$
 を解く場合 $[I^{\bar{x}}]$ に対する infeasible vector は初めから
 考慮しなくてよいし、またある S -制約下の optimal vector
 を \bar{x} とするとき、4°によると、 $g(\bar{x}) \leq g(x)$ を満足する
 格子点は全部棄却して差支えない。

tree search 型のアルゴリズムでは、 S -制約を用いて先方
 枝全体を test を行ない、枝に属するとの vector が $[I^{\bar{x}}]$ に対して
 は infeasible であるか、または $g(x) < g(\bar{x})$ (ただし \bar{x} は
 $[I^{\bar{x}}]$ の最適解)であることが判明したら直ちにその枝を棄て
 隣りの枝へ移ってよい。従って S -制約 $f(x) \geq 0$ と
 $\bar{f}(x) \geq 0$ があるとき

$$\min \{ g(x) \mid f(x) \geq 0, x \in \Omega \} \geq \min \{ g(x) \mid \bar{f}(x) \geq 0, x \in \Omega \}$$

ならば 制約 $f(x) \geq 0$ が $\bar{f}(x) \geq 0$ より「強」といふ。

實際に tree search 型のアルゴリズムを実施していくと 枝
 端で時間を使費することが多い。しかし、新しい枝に到達
 したとき、枝に対するあらゆる test を先行して、枝の中止させ

れが変数に対するなるべく強力なS-制約を構成し、これを用いてあらかじめ枝刈りする情報をできるだけ多く引き出しておいてこれを以後の作業に活用するなどは、Glover⁽¹⁾が線型問題で示したように極めて有効である、また以下で示すよし非線型問題に対する有効性を失わないものである。

次に述べる定理1では、あるS-制約の feasible region の原制約、それより広いときは、前と異なる feasible region をもつ新しいS-制約を構成していることを示し、定理2では、 $m=2$ のときは、定理1の結果を用いて「最强の」S-制約を構成する事が可能であることを、ならびにその構成方法を示す。

$$\max_{u \in U} \min \{g(x) | f(x) \geq 0 (f=uF), x \in \Omega\} = \min_{x \in \Omega} \{g(x) | uF(x) \geq 0\}$$

[定理1] $[I]$ の feasible solution \bar{x} の $[I]$ で I infeasible であるとき、

$$M_1 = \{i | F_i(\bar{x}) \geq 0, i \in M^+\}, \quad M_2 = \{i | F_i(\bar{x}) < 0, i \in M^+\} \neq \emptyset,$$

$$\varphi_v = \sum_{i \in M_1} u_i F_i + v \sum_{i \in M_2} u_i F_i \quad (v > 0),$$

$$\Delta^+ = \sum_{i \in M_1} u_i F_i(\bar{x}), \quad \Delta^- = - \sum_{i \in M_2} u_i F_i(\bar{x})$$

とするとき

$$0 < v \leq \Delta^+ / \Delta^- \Rightarrow \varphi_v(\bar{x}) \geq 0,$$

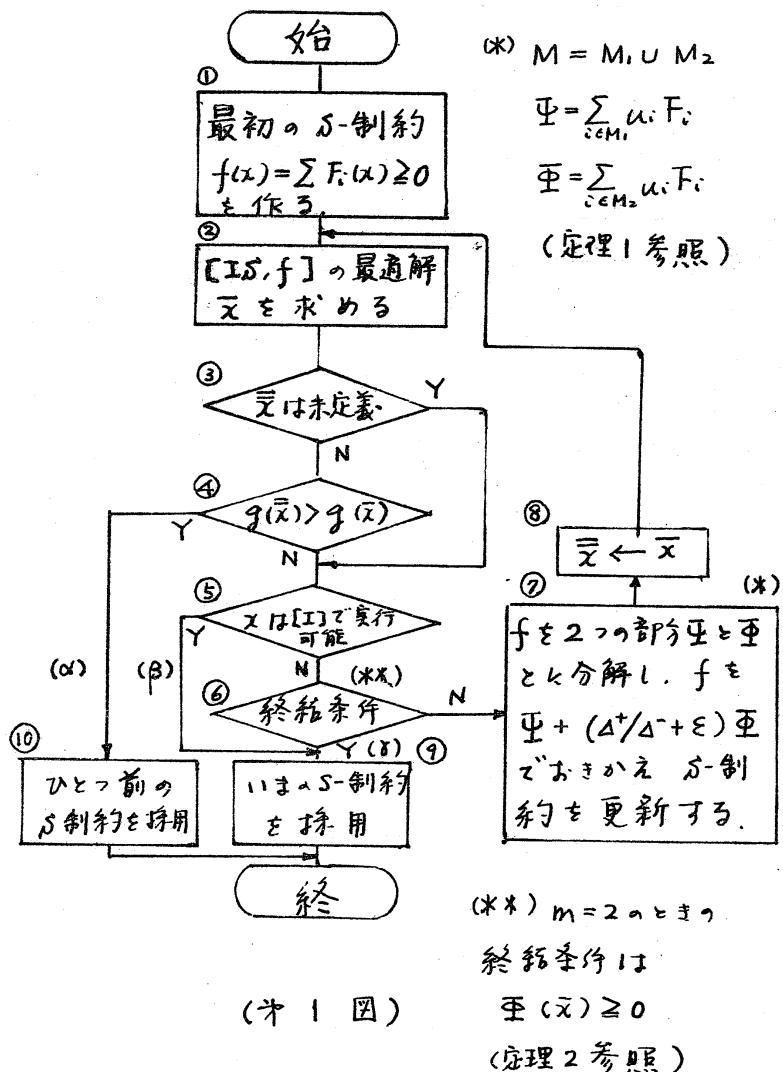
$$v > \Delta^+ / \Delta^- \Rightarrow \varphi_v(\bar{x}) < 0.$$

[証] lemma 3° から $\Delta^+ > 0$, 仮定によると $\Delta^- > 0$ で

$$\varphi_v(\bar{x}) = \Delta^-(\Delta^+/\Delta^- - v) \quad \text{if} \quad \Delta^+/\Delta^- - v \quad \text{is同符号.}$$

[定理2] $m=2$ のときの [I] が feasible ならば、牛1図のアルゴリズムが [I] に対する最強の μ -制約を与えるよろくな $\varepsilon (>0)$ の値が存在する。

[証] 第1回 $\text{box } 1$ で \leftarrow された s -制約を $F(x) + G(x) \geq 0$ とし、 $\text{box } 2$ で第*i*回目 \leftarrow された最適解を x^i とする。 $F(x^i) \geq 0, G(x^i) \geq 0$ ならば $F + G \geq 0$ が最強の s -制約である (lemma 5° + 4°)。よ



うで”ない場合は、

$$F(x') \geq 0, \quad G(x') < 0$$

を仮定してよい。

$$f_v = F + vG \quad (v > 0)$$

とし、問題

$$(1) \quad \min |g(x)|$$

$$f_{\nu}(x) \geq 0, x \in \Omega \quad \}$$

の最適解

735

(3) $\exists x \forall y (P(x,y) \rightarrow Q(y))$

卷之三

四

卷之三

$$v_0 \leq v < \infty \pm 3$$

すべてのひくみ

で $x[v_0]$ が (1) の最適解となつていろよろしく $v_0 (> 1)$ の存在しなければならない。しかし、 $1 < v < \infty$ なる v に対して $G(v[x]) < 0$ だとすると、 $G(x[v_0]) < 0$ であつて、定理 1 より、 $v > -F(x[v_0])/G(x[v_0])$ なる v に対して $x[v_0]$ は $f_v(x) \geq 0$ をみたさない。こゝは $v_0 \leq v < \infty$ なる v に対して、 $x[v_0]$ が (1) の最適解であることを矛盾。故に (2) が成立。
 $G(x^i) < 0$ ($i \geq 1$) のとき、 $v^i = -F(x^i)/G(x^i)$ とおけば、定理 1 より $v^i < v$ なる v に対して x^i は (1) に対して infeasible.
次の x^{i+1} を定めるのに用ひらる新しい s -制約 (こゝは box で作られる) を $F + (v^i + s^i) G \geq 0$ とすると、 $s^i > 0$. そして s^i の値はあるかじめその値を十分小さく選んでおくことによつて十分に小さくすることができる。且つは有限集合であるから $s^i (> 0)$ を適當に小さな値にしておくことにより、 $x^{i+1} = x[v^i + s^i]$ を $v^i < v < v^i + s^i$ なる v に対して (1) の最適解たらしめることがでできる。

従つて第 1 図の $\varepsilon (> 0)$ が適當に小さく選んであれば、 $x' = x[1]$ から出発して $G(x^k) < 0$ ($k \leq i$) である限り上記のような解の列 $x^{(k+1)} = x[v^k + s^k]$ ($1 \leq k \leq i$) を逐次作ることができる。定理 1 より、 $v^k < v < v^{k-1}$ なる v に対して (1) a feasible solution だから $g(x^{k-1}) \leq g(x^k)$ が成立。一方、 $v^k < v^{k+1}$ であるから、(2) より、やがてある番号 r で

$$G(x^i) < 0 \quad (1 \leq i \leq v-1) \text{ かつ } G(x^v) \geq 0$$

が成立立つればならぬ。 x^v に対するは *(i)* 及び *(ii)* の成立。

(i) $F(x^v) \geq 0$ ならば "lemma 5" より x^v が optimal solution で、得られた μ -制約は lemma 4 とより強である (第1回 (β))。

(ii) $F(x^v) < 0$ のとき、 $x^v = x[x^{v-1} + \delta^{v-1}]$ は定理上によつて $v^{v-1} + \delta^{v-1} \leq v < \infty$ なる μ に対して (1) → 実行可能解である。また前述のよろ μ は適当に小さく選ばれて、 x^v は $v < v \leq v^{v-1} + \delta^{v-1}$ なる μ に対して (1) の最適解となる。故に

$$(3) \quad g(x^v) = \max_{v^{v-1} \leq v < \infty} \min \{g(x) \mid F + vG \geq 0, x \in \Omega\}.$$

また前記のよろ x^{v-1} は $0 < v \leq v^{v-1}$ なる μ に対して (1) の実行可能解だから

$$g(x^{v-1}) = \max_{0 < v < v^{v-1}} \min \{g(x) \mid F + vG \geq 0, x \in \Omega\}.$$

故に

$$(4) \quad \max_{0 < v < \infty} \min \{g(x) \mid F + vG \geq 0, x \in \Omega\} = \begin{cases} g(x^v), & g(x^v) \geq g(x^{v-1}), \\ g(x^{v-1}), & g(x^v) < g(x^{v-1}). \end{cases}$$

$g(x^v) \geq g(x^{v-1})$ のとき、 $F(x^v) < 0 \Rightarrow G(x^v) \geq 0$ であつたから第1回 (γ) による loop 脱出が行なわれ、最強の μ μ -制約が採用される。

最後に、第1回 (α) による loop 脱出が (4) の $g(x^v) < g(x^{v-1})$ に対応する。即ち (α) の i は $g(x^{i-1}) > g(x^i)$ がはじめ成立しておき、前頁で述べたように $G(x^k) < 0 \Rightarrow g(x^{k-1}) \leq g(x^k)$

であるから loop を (d) で脱出したことき $G(x^i) \geq 0$ がはじめて成立してより、番号 i が前記じく他ならない。そして番号 r で $F(x^r) < 0$ となつている。(もしそうでなければ x^r は lemma 5^o より $\stackrel{[I] \circ}{\text{optimal solution}} \text{を求めるが, lemma } 4^o$ より $f(x^{r-1}) \leq f(x^r)$ となり (d) の脱出条件と矛盾する) このとき 派用さるるオーバー-5-制約は (4) オ2行目にすこべ最強である。(証終)

この定理によつて、 $m=2$ の場合には、最強の S-制約の構成の原理的な保証が与えられる。しかし実地に S-制約の構成を行なふうとするといふか、問題点にぶつかる。

<i> そへきめ方。原理的には $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots$ と漸次を小さくしてゆけば最後に残る S-制約は最強。制約が残らざるであらうがこれは実用的な方法ではない。また特定の ε の値について上記のアルゴリズムを施行したとき、最強制約を網つ目から逃してしまふかも知れない。

<ii> $m \geq 3$ のとき、定理 2 に用ひら小アルゴリズムの終結条件 ($60 \times 6 \geq G(\bar{x}) < 0$ and $G(\bar{x}) \geq 0$) は利用できない。

<iii> 今1回によれば 60×2 の中へ loop が度々繰り返し、整数計画問題を解かねばならぬ。制約不等式が1個しかないと之え整数最適解を求めるのが、本質的な困難は巣存してゐる。S-制約の構成は、本来整数計画問題を解く手段である。

(1)~(4)

ます”<i> について。線型の場合でも、非線型の場合でも
 最強の S-制約が容易に得ら小らする場合には問題ないが、経
 験上、最強でなくては「かなり強力な」S-制約で十分に有用
 であるから、tree search の効率を高めると目的ため
 には、ある小さなと<i> について上記アルゴリズムを遂行すれば
 よい。また<ii> については、Fig. 1 図のアルゴリズムを更新す
 る S-制約は、定理 1 によつて feasible region の次
 才々変形されゆきと結果目的関数の最適値が次才々せり
 上げられゆく — 即ち「強化」小ゆくのであるから、
 「かなり強力な」S-制約がありさえすればよいという立場か
 ら「あらかじめ決めておいた回数だけ強化田を行なつたこと」
 を終結条件とする — といふ Glover の処理法は非線型の場
 合にも継承してよだろう。最後に<iii> について。F. Glover
 へ最初の手法<ii> variation が<iii> が提唱されて“る
 が、ひずみも<iii> の解決が其の motivation となつてゐる。
 しかしながら、これら variation は、本質的に問題の線
 型性に依拠しており、非線型問題への拡張は不可能である。
 (二) ひずみ variation はひずみ「最強の」S-制約の代りに
 「かなり強力な」S-制約が得ら小ればよいと“る立場から、
 S-制約に関する整数-実数混合ミニマックス問題を通常、
 実数ミニマックス問題で近似せよことによつて LP の諸命

題を借用する。非線型問題 [I] へつては、関数・凸性・凹性を適当に仮定して「近似的と最強の」S-制約を決定する手法をパラメトリック LP へ帰着させることはできるが、実用性の点は、まだ十分検討しておいたところ、疑問がある) <iii> の問題、すなはちある S-制約の下での最適値を求めるには、本格的な tree search (たとえば) が必要である。そして強力な S-制約を構成しておくことは、原問題の tree search の手数を大幅に減殺することなる。だから、box で原問題の解法ルーチンを借用して大局的には有意義な場合もあるであらう。しかし、ここでは「かなり強力な」S-制約が求められるといふ立場から、「制約不等式が 1 個しかない場合」非線型整数計画問題の簡単な近似解法」をいくつか先ず試みることを提唱する。本格的な解法にくらべて、「短い時間で決着がつくから、feasible solution が全く得られない場合にだけ本格的なルーチンを call すればよい (feasible solution を得たまとは粗いが、目的関数値を「せり下げ」すればよい)」からである。

次にこの「小さなを兼ねた近似解法」——これは問題が線型であるよし special case へは Glover のアルゴリズム⁽¹⁾へ帰着する——のための諸定理を述べる。

§ 3 近似解法の準備

まず $0 \leq x_j \leq \lambda_j$ ならば $x_j = x_{j1} + 2x_{j2} + 2^2x_{j3} + \dots$
 と展開し x_{ji} ($= 0 \text{ or } 1$) を新変数とみなしてよい。これを $g(x)$
 は各変数の積で展開できるから $g(x)$ は x_j の多項式であると
 いってよい。また $\partial g / \partial x_j \geq 0$ と仮定しておこう。すると
 えば $g(x) = -x_1 + x_2^2 - 5x_3x_4$ ならば $x'_1 = 1 - x_1$ と x_1 の代
 し用い、 $x'_3 = 1 - x_3x_4$ と x_3 , x_4 の代し用いすれば $g(x)$
 $= x'_1 + x_2^2 + 5x'_3 - 6$ となる。又 (2) 原問題 [I] の制約式 $x_1 - x'_3 \geq x_3x_4 \geq 1 - x'_3$ 又は $2 - x'_3 \geq x_3 + x_4 \geq 2(1 - x'_3)$ を追加
 すれば [I] と同等な問題が得られ目的関数、偏微分数 ≥ 0 となる。

以下の諸定理で [定理 6] 以外では、 x_j を $0-1$ 変数とく
 と仮定していいが上記の事情は定理の有効性を増加する。

[定理 3] [FS] または [IS] が feasible ならば 次の
 成立をもつ [FS] または [IS] の最適解が存在する。

$$x_i = \begin{cases} \lambda_i & \text{if } f_i(x) \geq 0 \text{ and } g_i(x) \leq 0 \\ 0 & \text{if } f_i(x) \leq 0 \text{ and } g_i(x) \geq 0 \end{cases} \quad (x \in X)$$

$$\text{ただし } f_i(x) = \partial f / \partial x_i, g_i(x) = \partial g / \partial x_i$$

[証] x が最適解で、番号 $i \in P (= N)$ とき上記と異なる成
 分をもつ x をとする。このとき δ_i ($i \in N$) を
 $\delta_i = 0$ ($i \notin P$), $\delta_i = \lambda_i - \bar{x}_i$ ($i \in P, f_i \geq 0, g_i \leq 0$), $\delta_i = -\bar{x}_i$

$(i \in P, f_i \leq 0, g_i \geq 0)$ と定めると $\hat{x} = \bar{x}_i + \delta_i$ は定理 4
の条件を満たす。すなはち、 $f(\hat{x}) = f(\bar{x}) + \sum_{i \in P} \int_0^1 f_i(\theta \hat{x} + (1-\theta)\bar{x}) d\theta \cdot \delta_i \leq f(\bar{x})$
だから \hat{x} は feasible。 $g(\hat{x}) = g(\bar{x}) + \sum_{i \in P} \int_0^1 g_i(\theta \hat{x} + (1-\theta)\bar{x}) d\theta \cdot \delta_i \leq g(\bar{x})$
であるから \hat{x} は optimal。

[定理 4] ある $\bar{x} \in X$ に属する $\alpha_i(\bar{x}, x) > 0, \beta_i(\bar{x}, x) \geq 0$
 $(x \in X, i \in N)$ とあり、ある $r \in N$ に属する $\beta_r(\bar{x}, x)/\alpha_r(\bar{x}, x) \leq \beta_s(\bar{x}, x)/\alpha_s(\bar{x}, x)$
 $\leq \beta_x(\bar{x}, x)/\alpha_x(\bar{x}, x)$ or $\beta_s(\bar{x}, x)/\alpha_s(\bar{x}, x) > \beta_x(\bar{x}, x)/\alpha_x(\bar{x}, x)$
 $(x \in X, i \in N)$ の二式が成立し

$$\bar{x} = \begin{cases} \lambda_i, & \text{if } \beta_i/\alpha_i \leq \beta_r/\alpha_r \\ 0, & \text{if } \beta_i/\alpha_i > \beta_r/\alpha_r \end{cases} \quad (i \neq r) \quad \text{なら}\bar{x}$$

$$g(\bar{x}) = \min \{g(x) \mid f(x) \geq f(\bar{x}), x \in X\}$$

$$\forall x \in X, \alpha_r(x, y) = \int_0^1 f_i(\theta x + (1-\theta)y) d\theta$$

$$\beta_r(x, y) = \int_0^1 g_i(\theta x + (1-\theta)y) d\theta$$

[証] $f(x) \geq f(\bar{x})$ とす任意の $x \in X$ に属する $\delta_i = x_i - \bar{x}_i$
を作れば、 x_i の定義から $\delta_i \cdot (\beta_i/\alpha_i - \beta_r/\alpha_r) \geq 0$ 。一方
 $f(x) - f(\bar{x}) = \sum_i \delta_i \cdot \int_0^1 f_i(\theta x + (1-\theta)\bar{x}) d\theta = \sum_i \alpha_i(\bar{x}, x) \delta_i \geq 0$
 $\therefore \delta_r \geq -\sum_{i \neq r} \alpha_i \cdot \delta_i / \alpha_r \quad \therefore g(x) - g(\bar{x}) = \sum_i \beta_i(\bar{x}, x) \delta_i$
 $\geq \sum_{i \neq r} (\beta_i - (\beta_r/\alpha_r) \alpha_i) \cdot \delta_i \geq 0$

[定理 5] X の任意の 2 点 $x, y \in X$ に属する $\alpha_i(x, y) > 0$,
 $\beta_i(x, y) \geq 0$ ($i \in N$) とあり、変数番号が
 $\beta_p/\alpha_p < \beta_q/\alpha_q \iff p < q$ となるよう x と y を作るとき、

$$\xi_i^k = \begin{cases} \lambda^i, & i \leq k \\ 0, & i > k \end{cases}$$

$$L = \min \{k \mid f(\xi^k) \geq 0, 0 \leq k < n\}$$

なるよが存在すれば [FS] k 次のよが最適解が存在する。

$$\bar{x}_i = \begin{cases} \lambda^i, & i < L \\ 0, & i > L \quad 0 < \bar{x}_L \leq \lambda_L \end{cases}$$

もし \bar{x} ようよが存在しなければ [FS] は infeasible.

[証] $n \geq L \geq 1$ のとき $g(\bar{x}_L) = f(\bar{x}) = f(\xi^L) + d_L(\bar{x}, \xi^L)$.

$$x(\bar{x}_L - \lambda_L) \text{ とすれば } g(\lambda_L) = f(\xi^L) \geq 0. \quad L \text{ の定義から}$$

$$g(0) = f(\xi^{L-1}) < 0 \quad g \text{ は連続だから } 0 < \bar{x}_L \leq \lambda_L \text{ す}$$

るある \bar{x}_L の値に対して $g(\bar{x}_L) = f(\bar{x}) = 0$ とする。この

とき 前定理から $g(\bar{x}) = \min \{g(x) \mid f(x) \geq 0, x \in X\}$ す

る定理は成立。

$$\underline{L=0 \text{ のとき}} \quad \bar{x}=0. \quad \text{従って } f(\bar{x}) \geq 0. \quad \text{任意の } x \in X$$

$$x \in X \text{ に対して } x_i \geq \bar{x} \quad \therefore g(x) - g(\bar{x}) = \sum_i (x_i - \bar{x}_i) \beta_i \geq 0.$$

故に定理は成立。

$$\underline{L \text{ が存在しないときは, } f(\xi^n) < 0. \quad \text{任意の } x \in X}$$

$$x_i \leq \xi_i^n \quad \therefore f(x) = f(\xi^n) + \sum_i (x_i - \xi_i^n) \alpha_i \leq f(\xi^n) < 0$$

故に [FS] は infeasible.

[定理 6] $\lambda_i = 1 (i \in N) \Rightarrow f_i(x) > 0, g_i(x) \geq 0 (x \in X,$

$i \in N)$ とす。変数番号の適当な交換によつて $p \leq r$,

$$g > r \text{ ならば } f_p(x) \geq f_g(x) \Rightarrow g_p(x) \leq g_g(x) (x \in X)$$

であるよが番号 $p \in N$ が存在し,

$$\bar{x}_i = \begin{cases} 1, & i \leq r \\ 0, & i > r \end{cases}$$

なる \bar{x} に対して $0 \leq f(\bar{x}) < f_k(x)$ ($k \leq r, x \in X$)

が成り立つならば

$$g(\bar{x}) = \min \{g(x) \mid f(x) \geq 0, x \in \Omega\}$$

[証] $f(x) \geq 0$ なる任意の $x \in \Omega$ に対して

$\delta_i = x_i - \bar{x}_i$ をすれば $\sigma = \sum_i \delta_i$ は非負の整数であ

る。なぜならば $\sigma \leq -1$ と仮定すると

$$f(x) = f(\bar{x}) + \sum_i \int_0^1 f_i(\xi) \cdot \delta_i d\theta \quad (\xi = \theta x + (1-\theta)\bar{x})$$

$$= f(\bar{x}) - \sum_{i \leq r} \int_0^1 f_i(\xi) d\theta \cdot |\delta_i| + \sum_{i > r} \delta_i \cdot \int_0^1 f_i(\xi) d\theta$$

$$\min_{i \leq r} \int_0^1 f_i(\xi) d\theta = \int_0^1 f_{i_0}(\xi) d\theta = \mu \quad \text{とする}$$

$$f(x) \leq f(\bar{x}) - \mu \sum_{i \leq r} |\delta_i| + \sum_{i > r} \delta_i \cdot \int_0^1 f_i(\xi) d\theta$$

$$= f(\bar{x}) + (\sigma - \sum_{i > r} \delta_i) \mu + \sum_{i > r} \delta_i \int_0^1 f_i(\xi) d\theta$$

$$\leq f(\bar{x}) + \sigma \mu$$

$$\leq f(\bar{x}) - \int_0^1 f_{i_0}(\xi) d\theta = \int_0^1 [f(\bar{x}) - f_{i_0}(\xi)] d\theta < 0$$

となる。 $f(x) \geq 0$ と矛盾する。

$$\begin{aligned} \text{また } g(x) - g(\bar{x}) &= - \sum_{i \leq r} |\delta_i| \int_0^1 g_i(\xi) d\theta + \sum_{i > r} \delta_i \int_0^1 g_i(\xi) d\theta \\ &\geq \sigma \cdot \min_{i > r} \int_0^1 g_i(\xi) d\theta \geq 0 \quad \text{が前と同様に得る} \end{aligned}$$

したがって

$$g(\bar{x}) = \min \{g(x) \mid f(x) \geq 0, x \in \Omega\}.$$

§4 近似最適解のためのアルゴリズム

前節の諸定理を足場にして、今1回 Box 2 を用いるためのアルゴリズムを構成する。本節では $\lambda_i = 1$, $\partial g / \partial x_i \geq 0$ ($i \in N$) が仮定されている。

$x \in \Delta$ の任意の元とするとき, $x(i)$ は x の i 番目の成分 x_i を $1 - x_i$ で書きかえた vector を表わすことにする。 $x \in \Delta \Leftrightarrow x(i) \in \Delta$ である。 $\alpha(i), \beta(i)$ を次のようく定義する。

$$\alpha_i(x) = \int_0^1 f_i(\theta x(i) + (1-\theta)x) d\theta = f(x_i=1) - f(x_i=0)$$

$$\beta_i(x) = \int_0^1 g_i(\theta x(i) + (1-\theta)x) d\theta = g(x_i=1) - g(x_i=0)$$

ただし、右辺のたとえは $f(x_i=1)$ は x_j ($j \neq i$) には左辺の x_j の値を; x_i には 1 を代入して $f(x)$ の値である。

ある $x \in \Delta$ に対して、その各成分 x_i に、次の規則によつて「局所順位」 $\rho_i(x)$ を与える。 $1 \leq i \leq n$ であるが、タイが生じたら、たとえば変数番号順位を与えればよい。

$$<\text{i}> \quad \alpha_i(x) > 0, \quad \alpha_j(x) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_i < \rho_j$$

$$<\text{ii}> \quad \alpha_i(x) > 0, \quad \alpha_j(x) > 0 \quad ならば$$

$$\beta_i/\alpha_i < \beta_j/\alpha_j \quad \Rightarrow \quad \rho_i < \rho_j$$

$$\beta_i/\alpha_i = \beta_j/\alpha_j, \quad \alpha_i < \alpha_j \quad \Rightarrow \quad \rho_i < \rho_j$$

$$<\text{iii}> \quad \alpha_i(x) \leq 0, \quad \alpha_j(x) \leq 0 \quad ならば$$

$$\beta_i - \alpha_i < \beta_j - \alpha_j \quad \Rightarrow \quad \rho_i < \rho_j$$

さて、オイコロジカルアルゴリズムは次の通りである。

《Stage I》

- 1° $x_i = 0 \quad (\forall i \in N)$ set
- 2° $f(x) \geq 0$ ならば go to 《Stage II》 1°
- 3° 各 x_i に対して $p_i(x)$ を計算
- 4° $\forall i \in N \quad (x_i = 1)$ ならば tree search \wedge (32の参照)
- 5° $p_j = \min \{ p_i \mid x_i = 0, i \in N \}$ なる j について $x_j = 1$ set,
go to 2°.

《Stage II》

- 1° $\forall i \in N \quad (p_i = 0 \text{ or } x_i = 0)$ ならば stop. このときの x が近似最適解である。
- 2° $p_k = \max \{ p_i \mid x_i = 1, i \in N \} \geq 3 \quad k \leftarrow k + 1 \quad x_k = 0 \Leftarrow 33$.
- 3° 各 x_i ($i \neq k$ 且 $p_i = 0$ または $x_i = 0$ のもの) に対して $p_i(x)$ 計算
- 4° $f(x) < 0$ ならば x_k の値を 1 に \Leftarrow , $p_k = 0 \Leftarrow$
 \Leftarrow go to 1°
- 5° $f(x) \geq 0$ ならば go to 1°

この方法では、「今 x 」に対する「次の x 」は $x(1), \dots, x(n)$ のどれかである。 x は $x(i)$ へ移る $f(x), g(x)$ の

値は《Stage I》では若干 $\alpha_i(x), \beta_i(x)$ が増加し、
 《Stage II》では若干 $\alpha_i(x), \beta_i(x)$ が減少する。
 また《Stage I》で x の「次の x 」の候補 $x(i)$ ($x_i = 0, i \in N$) のなかから、 5° の step で $x(j)$ が選出されたとき、

$$g(x(j)) = \min \{ g(x(i)) \mid f(x(i)) \geq f_0, i \in N, x_i = 0 \}$$
 が成り立つ。すなはち $f_0 = f(x(j))$ である。何故なら、

$$g(x(j)) - g(x(i)) = \beta_j(x) - \beta_i(x), f(x(j)) - f(x(i)) =$$

$$\alpha_j(x) - \alpha_i(x)$$
 であるが、局所順位 $p_i(x)$ の定義から、 5°
 の step で選ばれた j に関する、 $i \in N$ 且 $x_i = 0$ ならば $\alpha_j - \alpha_i \leq 0 \Rightarrow \beta_j(x) - \beta_i(x) \leq 0$ が成立し
 である。

これを反復して《Stage I》で実行可能解を得て後、
 《Stage II》に於ける全局的な最適性から、「若干」の補正が、
 再び局所最適補正に近づく方の反復で実行される。

従って《Stage I》 4° 以外へ飛び出了のは、局所的には有効な方案であるとも効果が累積していないのか、それ隣りの
 格子点 $x(i)$ 以外の点に有効な「次の x 」があるのか、また
 は $f_i(x)$ や $g_i(x)$ の変動が大きいために局所順位数 $p_i(x)$ が
 または「次の x 」の選出の目次上にならないなどする
 場合である。また $f_i(x), g_i(x)$ の変動が、[定理 3] よりも
 [定理 5, 6] の適用条件が成立を妨げるとほど大きくないならば

上記アルゴリズムは《Stage II》¹⁰ 完結する。線型問題では $f_i(x)$, $g_j(x)$ が定数であることは事情は極めて簡単である。
 た。なお、^{[I] における} 制約不等式や $g_j(x)$ 中、非線型項を全部新しい 0-1
 変数とおきかえて、線型不等式を余分につけて線型問題
 におけることか原理的には可能であり、また x より x
 すれば上記のアルゴリズムはひとつの μ -制約を与えるが、こ
 のような「線型化」は原変数で矛盾のある非論理的了解を許
 容するような μ -制約をもつてならない。特別の事情がない限り
 好ましくないと思われる。

〈文献献〉

- (1) F. Glover, A Multiphase-Dual Algorithm for the Zero-One Integer Programming Problem, *Ops. Res.* 13 (65) 879~919.
- (2) E. Balas, Discrete Programming by the Filter Method, *ibid* 15 (67) 915~957.
- (3) A. M. Geoffrion, An Improved Implicit Enumeration Approach for Integer Programming, *ibid* 17 (69) 437~454.
- (4) F. Glover, Surrogate Constraints, *ibid* 16 (68) 741~854
- (5) T. L. Saaty, "Optimizers in Integers and Related Extremal Problems", McGraw-Hill (70) P.259.