

新統計数値表について

電総研 戸田英雄
慶大工 竹内寿一郎

§1. 序

昭和38年10月、小内二郎氏を中心にして新統計数値表の出版が企画され、そして約2年間の予備調査の後、昭和40年4月から担当者を決め作業が開始された。昭和44年にはまとまり、約2年間をついでして解説と数表のチェックが行なわれた。その間、かなり大幅の修正、変更、追加、削除などがあり当初の計画より数年遅れて昭和47年4月新統計数値表の発行にこぎつけたわけである。

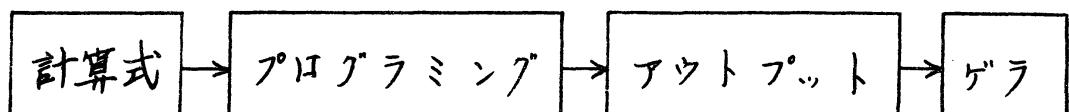
この数値表のねらいは、統計、QC、IE、OR、心理、生物、医学、経済など広範囲の分野で使われる統計数値表の集成で、主に次の特長をもたせている。

(1) 正規分布表などの基本的な表から、最新の多次元正規分布、最大固有根のパーセント点など、広い範囲の表を載せる。

- (2) コンピュータの利用を考えて、近似式や正確な数値の計算方法を明記する。
- (3) 基本的と思われる数表を倍精度で計算するためのプログラムを載せる。
- (4) プログラムと同時に、チェック用として26行または20行の数値を与える。

ここでは本数値表のチェック方法といつかの数表についてとりあげることにする。

§2. 数値表のチェックの方法について
数値を計算し、数表の作成にあたって次の4段階に分け。
そこでのチェックを考慮する。



(1) 計算式の誤りは数値を計算することによって容易に発見されることが多い。ここでの問題は計算時間と考え方合せに式の選択である。また数値を概算して桁落ちの少ない式を選ぶことも大切である。

(2) プログラミングの基本的な間違いは数値を既存の数表、明らかにわかる点でチェックすれば容易に発見できるし、

渠な、た人がプログラムを組んで再計算しても発見できる。

ここではFORTRANによる倍精度計算に際して次のよりミスが目立つ。①倍精度変数の宣言もれ、②定数にD+0をつけなかつて、(桁数の多い定数はD+0がなくとも自動的に倍精度定数とみなすシステムもあり、仄)、③ベキ乗の計算、たとえば $A^{**}B$ においてA, Bともに倍精度であつても結果が单精度となつてしまつて計算機があつて、④FLOAT(K), $X=XX$ (X は倍精度, XX は单精度) をうっかり使ってしまつて、など。これらは計算途中で一回でも生起すると結果はすべて单精度となつてしまつて十分注意しなければならぬ。この件に関するチェックは桁数の多い既存の数表が最もよいのであるが、実際にはその様な表が少ないのか困難である。そこで明らかにめる点でチェックするのが精一杯ではあるが最もよい方法であつて。

(3) 計算機内部での計算ミスはまづく生じなかつて。アウトプット時のまるめの誤まりが數ヶ所発見された。この原因は次のようなことであつて。1.245となる値の計算機内部表示は10進で、1.24499……7までは1.24500……2となつてゐる。但し最終桁の7, 2は計算誤差により生じた値である。このとき小数第3位を4捨5入すれば1.25あるが1.24といふアウトプットとなる。アウトプットだけをながめても

このちがいは発見できない（計算機やシステムのちがいでどうなるかわからない）。本数値表ではこのような原因にもとづくするめによる最終行のちがいは、4捨5入のもつ意味から考えて、1.25も1.24も双方正しい値とみなして、計算機の上で自動的に4捨5入をさせてるのである。

(4) ゲラのチェック方法にはこれまでいろいろな方法が考えられているが、本数値表では最終的にサムチェックという方法を採用した。この方法はアウトプット、ゲラそれぞれの行和・列和を計算し、合計値によりチェックする方法である。差分法によるチェックも考えたのであるが、引数が等間隔でない数表が多く、またするめの誤まりをも含む最終行のチェックに重点をおいたので、ここでは用いなかつたのである。

§3. 本数値表（統計数値表JSA-1972）のチェック

最終的に行なめれるサムチェックの前に誤植を減らしておく必要があることはいりません。そこで本数値表では、1校で4人の人が独立に校正し、2校で4人、3校で4人と延べ12人の人が独立に照合を行なって、誤植による誤りに備えておるのである。そしてサムチェックのための合計計算は時間と費用の関係もあり、ゲラは主に加算器または算盤でたて計、よこ計を計算、アウトプットはできるだけ再計算によりたて計

よこ計を計算した。この再計算は前述(2)のプログラミングのチェックおよび収束条件をきつくして場合の数値のチェックをも兼ねさせてるのである。再計算でくいちがいの生じた数表については慎重に検討した上、再計算を行なったのである。

その結果、照合で見のがされていて数字の前後のいれちがいや、アウトプットの見にくい数字が原因で生じた誤植が発見されたのである。特に2校もしくは3校後体裁がかえられた数表に誤まりが多かったのである。収束条件をきつくしたためにはさつて値を得るにいたるケースもある。

時間および費用を考えたうえの結論として、数値表の計算結果は必ずカードにアウトプットしておき、そのカードから行和、列和をも含めてプリントさせるプログラムをつくり、数部のリストをとりそれを元原稿とすること。次にゲラから数値をパンチカードにして、同じプログラムを使用して行和、列和を計算し、それを計算機上で比較させるとよい。

§ 4. Studentized Range のパーセント点の表の作成

本数値表の中から比較的手間のかかる数表である studentized range をとりあげることにする。

(1) Studentized range のパーセント点

正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ から大きさ n の標本の範囲を R 、これと

独立で自由度 ν の ν の推定量を s とするとき, $g = R/s$ を studentized range といふ。このパーセント点 $g_{\alpha}(n, \nu)$ は R の確率密度を $f(R)$ とすると,

$$P_n[R/s \leq g_{\alpha}] = \frac{2}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}} \int_0^{\infty} s^{\nu-1} e^{-\frac{1}{2}s^2} \int_0^{g_{\alpha}s} f(R) dR ds = 1 - \alpha \quad (4.1)$$

を満たす g_{α} によって定義される。

$$f(R) = n(n-1) \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_x^{x+R} \phi(t) dt \right]^{n-2} \phi(x) \phi(x+R) dx \quad (4.2)$$

すなはち標準正規分布からの大きさ n の標本における範囲の密度関数であり,

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (4.3)$$

である。

g_{α} の表は Pearson-Hartley (1943) の数値表にかられ、その後 May (1952), Hartley (1953), Pachares (1959) が修正されていが、Harter (1960) によりかなり詳しく計算されている。ここでは更に検討を加えた結果、更に修正した詳しい数値を算出しているのである。

(2) g_{α} の計算法

数値積分で (4.1) を計算し g_{α} を求めるといふことは、4重積分のパーセント点を求めるというより大な計算量になること

が予想される。HarterはNewton-Cotesの7点積分公式により適当な間隔で、各段階で積分値を求め、その数値を記憶させたとき(4.1)の積分値をその値に対して計算し、かなり大きな表を作成した。そしてAitkenの逆補間によりパーセント点 γ_{α} を求めている。我々は逆補間を用いて試行錯誤法でパーセント点を求めるという方針から出発したので、数値積分はGauss型を使うことにして、なるべく数値積分をするという段階を減ずるよう工夫したのである。

まず $\phi(x)$ の積分にはいろいろな積分を試みた結果次式を用いることにした。

$$\Theta(x) = \int_x^{\infty} \phi(x) dx = \phi(x) \left[\frac{1}{1x} + \frac{1}{2x} + \frac{2}{3x} + \cdots + \frac{k}{kx} + \cdots \right] \quad x \geq 3.3 \quad (4.4)$$

$$\Theta(x) = \frac{1}{2} - \phi(x) \left[\frac{x}{1} - \frac{x^2}{3} + \frac{2x^2}{5} - \frac{3x^2}{7} + \cdots + (-1)^k \frac{kx^2}{2k+1} + \cdots \right] \quad x < 3.3 \quad (4.5)$$

これらは計算速度と精度とを合せ考えると最も効率がよか、
たゞここでは最大28%以下、 x が3.3に比べてなればなれば
なる程良は更に小さくてよい。(田中・清水・竹内(1968))

このとき倍精度(15桁)演算で最大誤差 10^{-13} である。つまり

$$P_n[R \leq R_0] = n(n-1) \int_0^{R_0} \int_{-\infty}^{\infty} [\Theta(x) - \Theta(x+R)]^{n-2} \phi(x) \phi(x+R) dx dR \quad (4.6)$$

なる範囲の分布関数は2重積分なので、変形して

$$P_n[R \leq R_0] = n \int_0^\infty \phi(x) [\{Q(x) - Q(x+R_0)\}^{n-1} + \{Q(-x) - Q(-x+R_0)\}^{n-1}] dx \quad (4.7)$$

となり、1つの積分でよいことになる。したがって(4.1)は
2重積分となり、そのパーセント点を求める計算にあきかえ
るといがでできる。すなわち

$$\begin{aligned} P_n[R/s \leq g_{\alpha}] &= \frac{2}{\Gamma(\frac{n}{2})} \left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \int_0^\infty s^{n-1} e^{-\frac{1}{2}s^2} F(g_{\alpha}s) ds \\ &= C \int_0^\infty s^{n-1} e^{\frac{1}{2}(1-s^2)} F(g_{\alpha}s) ds \end{aligned} \quad (4.8)$$

ただし $F(g_{\alpha}s) = P_n[R \leq g_{\alpha}s], C = \frac{2 e^{-\frac{\nu}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$

(4.8) のオス式はルルに付し C の値が大きく変化しないよう
変形したものである。

(4.7), (4.8) はともに積分範囲が $(0, \infty)$ である。 $e^{-\frac{s^2}{2}}$ が被積
分関数に入っているので変形すれば、Laguerre-Gauss の積分公
式により計算できるが、そのための積分の分点と重みを用意
しておかねばならない。Legendre-Gauss の数値積分は分点数
が不足である場合、積分範囲を分割することによりいくらく
も分点数を形式的に増やすことができるが、 ∞ の代りに有
限の値にあきかえ Legendre-Gauss の公式によるにして。

この方針から (4.7) を 10^{-12} の精度で計算するためには、 ∞ の

代りの積分上限値 λ_0 とその時の分点数 N を決定することにした。 $\lambda_0 = ?$ (4.7) の被積分関数

$$h(x, R) = \phi(x) \left[\{Q(x) - Q(x+R)\}^{n-1} + \{Q(-x) - Q(-x+R)\}^{n-1} \right] \quad (4.9)$$

の値を $R = 0.5(0.5)11, n = 2(1)6(2)10, 15, 20, 30$ について計算し λ_0 の値が 10^{-12} となるところをもと、 λ_0 上限値とまず定めた。その後の λ_0 を

$$\int_{\lambda_0}^{20} n \phi(x) \left[\{Q(x) - Q(x+R)\}^{n-1} + \{Q(-x) - Q(-x+R)\}^{n-1} \right] dx \quad (4.10)$$

の値が 0.5×10^{-12} 以下となる $\lambda_0(R, n)$ の値と先にまず求めた値と比較するほぼ等しく、最大 0.2 のちがいである。た。 (4.10) が 0.5×10^{-12} 以下となる $\lambda_0(R, n)$ および (4.7) の積分上限を $\lambda_0(R, n)$ としてときの積分誤差が 10^{-12} 以下となる分点数 N は 次ページの表 1 のとおりである。

使用した分点数は $5(1)35, 40, 48$ で、積分誤差の算出にあたっては真値として 48 点積分値を採用した。 $N = 5(1)35$ の分点と重みは山下 (1964) により、 $N = 40, 48$ は Handbook of Math. Func. and Tables による。 (4.7) の積分が 10^{-12} の精度で計算されたのであるが、このとき計算時間は 40 点積分で、 HITAC 8410 (電総研・永田町) によると約 3~4 秒を要する。

次に (4.8) の積分を考える。(4.1) の被積分関数に比べ、

表 1 $I_0(R, n)$ および分点数 N

R	n	2	N	3	N	4	N	5	N	6	N	8	N	10	N	15	N	20	N	30	N
0.5	5.3	17	4.3	15	3.6	16	3.2	16	2.8	13	2.3	12	1.9	10	1.2	5	0.7	5	0.7	5	
1.0	5.5	17	4.6	17	4.0	17	3.6	17	3.3	16	2.8	16	2.5	15	2.0	12	1.6	10	0.8	5	
1.5	5.8	17	4.9	18	4.4	18	4.0	19	3.7	18	3.3	19	3.0	18	2.5	17	2.2	15	1.7	12	
2.0	6.0	18	5.2	18	4.7	18	4.4	19	4.1	18	3.7	20	3.4	20	2.9	20	2.6	19	2.2	18	
2.5	6.2	18	5.5	19	5.0	19	4.7	19	4.5	18	4.1	20	3.8	20	3.4	21	3.1	22	2.7	21	
3.0	6.4	18	5.8	19	5.3	20	5.0	20	4.8	19	4.5	21	4.2	21	3.8	21	3.5	22	3.2	22	
3.5	6.5	18	6.0	20	5.6	20	5.4	20	5.2	20	4.8	22	4.6	20	4.2	22	4.0	23	3.6	24	
4.0	6.7	18	6.2	20	5.9	20	5.7	21	5.5	21	5.2	22	5.0	22	4.6	23	4.4	25	4.1	26	
4.5	6.8	18	6.5	20	6.2	20	6.0	22	5.8	22	5.5	22	5.3	24	5.0	24	4.8	26	4.5	27	
5.0	7.0	18	6.7	21	6.4	21	6.2	22	6.1	22	5.8	24	5.7	24	5.4	26	5.2	27	4.9	29	
5.5	7.1	17	6.8	21	6.6	21	6.5	23	6.4	23	6.2	24	6.0	25	5.7	27	5.5	28	5.3	30	
6.0	7.2	17	7.0	21	6.8	22	6.7	23	6.6	23	6.4	24	6.3	26	6.1	28	5.9	29	5.7	32	
6.5	7.3	17	7.1	22	7.0	22	6.9	24	6.8	23	6.7	25	6.6	26	6.4	29	6.3	31	6.0	33	
7.0	7.4	17	7.2	22	7.2	22	7.1	24	7.0	24	6.9	25	6.8	27	6.7	29	6.6	31	6.4	34	
7.5	7.4	17	7.3	22	7.3	22	7.2	24	7.2	24	7.1	26	7.1	27	7.0	30	6.9	32	6.7	40	
8.0	7.5	17	7.4	22	7.4	22	7.3	24	7.3	24	7.3	26	7.3	28	7.2	30	7.1	34	7.0	40	
8.5	7.5	17	7.4	22	7.4	22	7.4	24	7.4	24	7.4	26	7.4	28	7.4	31	7.3	34	7.3	40	
9.0	7.5	17	7.5	22	7.5	23	7.5	25	7.4	25	7.5	26	7.5	28	7.5	31	7.5	34	7.5	40	
9.5	7.5	17	7.5	22	7.5	23	7.5	25	7.5	25	7.6	26	7.6	28	7.6	31	7.6	34	7.6	40	
10.0	7.5	17	7.5	22	7.5	23	7.5	25	7.5	25	7.6	26	7.6	28	7.6	31	7.7	34	7.7	40	
10.5	7.5	17	7.5	22	7.5	23	7.5	25	7.5	25	7.6	26	7.6	28	7.7	31	7.7	34	7.7	40	
11.0	7.5	17	7.5	22	7.5	23	6.5	25	7.5	25	7.6	26	7.6	28	7.7	31	7.7	34	7.7	40	

(4.8) の被積分関数

$$g(s; \nu) = s^{\nu-1} e^{-\frac{1}{s} \nu(1-s)} \quad (4.11)$$

はかりあいおとなしい関数になる。C は $\nu \leq 120$ に対して 6.2 以下となり、(4.11) の最大値も打ちがいに小さくはない。
 $s = 0(0.01)10.0$ における (4.11) の値を各 ν について計算して最大値を求けたと、 $\nu = 10$ のとき $s = 0.95 \sim 1.03$ 、 $\nu = 120$ のとき $s = 1.0 \sim 1.0$ 、 $\nu \leq 120$ に対してとにかく (4.11) の最大値は 1 以上である。

$F(g_s) \leq 1$ であることから、(4.8) を数值積分した値が 0.95 のより大きい値になるためには、 $g(s; \nu)$ と $F(g_s)$ が大きい

値同士の積となっている筈である。したがって $g(s; \nu)$ が 10^{-10} ぐらいい小さいければ、それ以下(g_s)、C が乗せられ、その和をと、ても結果に及ぼす影響は“にくわす”のであると考えられる。
 そして $g(s; \nu)$ が 10^{-10} 以下となる小さい方の s を m_0 、大きい方の s を m'_0 とおいて、それを (4.8) の積分における積分下限、および積分上限と定めた。表2は m_0 , m'_0 を各々について求めたものである。

表2 m_0 および m'_0 の表

ν	下限 m_0	上限 m'_0	ν	下限 m_0	上限 m'_0
1	0.0	7.19	12	0.05	2.65
2	0.0	5.30	14	0.07	2.52
3	0.0	4.46	16	0.10	2.42
4	0.0	3.97	18	0.12	2.33
5	0.0	3.64	20	0.14	2.26
6	0.0	3.39	24	0.19	2.14
7	0.0	3.20	30	0.24	2.01
8	0.01	3.05	40	0.31	1.87
9	0.02	2.93	60	0.42	1.70
10	0.03	2.82	120	0.57	1.49

したがって (4.8) は次の式で計算されることになる。

$$Pr[R/s \leq g] = C \int_{m_0}^{m'_0} g(s; \nu) F(g_s) ds \quad (4.12)$$

ここで $F(11) = 0.9999999999966$ であることから $R \geq 11$ に対して $F(R) \approx 1$ とみなせば

$$Pr[R/s \leq g] = C \left[\int_{m_0}^{\min(\frac{11}{g}, m'_0)} g(s; \nu) F(g_s) ds + \int_{\min(\frac{11}{g}, m'_0)}^{m'_0} g(s; \nu) ds \right] \quad (4.13)$$

で計算するとよい。

第2項の数値積分は第1項に比べ20倍以上の速さであるから、分点数は多めにとっても計算速度はあまりかわらない。(4.13)の結果が約0.99になるよりなまくに対して第1項を25点で積分すると、積分誤差はその小さいところで 10^{-2} 、その大きいところ $10^{-9} \sim 10^{-10}$ である。また約0.95になるとまくに対しては、25点積分では $n=30, \nu=5$ のとき 3×10^{-9} の積分誤差となるのか?、28点積分で計算することにして。(このときの積分誤差は $10^{-9} \sim 10^{-10}$ である。)更にいろいろ検討した結果、第1項の計算を25点積分でほぼ0.3になるよりなまくに対して計算を行なったときの積分誤差は、 n, ν について多少の方がいいはあるが 10^{-1} くらいである。このことからまの下側パーセント点の計算に関するには工夫が必要であると思われる。なお、第2項は28点積分で計算した。

さて、(4.13)により $10^{-9} \sim 10^{-10}$ の精度で studentized range の分布関数(ただし0.95~0.99の付近だけ)が求められたのであるから、あとは適当に初期値を入れて試行錯誤法によりパーセント点を求めることになる。1つの分布関数の値を求めるのに長いもので HITAC 8410によると 2~3 分を要したのである。幸いにして Harter (1960) の求めた有効4桁のパーセント点があるのでそれを使用し、さらに詳しい値を計

算したのが付表である。これはパーセント点で 10^{-6} まで正確（分布関数では 10^{-8} ）に出して小数第 5 位を省略入力なので、総計算時間は約 48 時間を要した。

(3) 数表の検討

Harter は $\alpha = 0.90, 0.95, 0.975, 0.99, 0.995, 0.999; \nu = 1(1)20, 24, 30, 40, 60, 120, \infty; n = 2(1)20(2)40(10)100$ について有効数字 4 行計算している。そしてそのエメントで 4 行目に 1 以内の誤差があるとしている。付表と Harter の表では $\alpha = 0.05$ で 20 間所 4 行目がちがいがみつけられると、いずれも 4 行目の ±1 以内の誤差である。付表がどこまで正しいかチェックするために $n=2$ のところで確かめられた。 $n=2$ の場合、(4.1) は簡単に変数変換により、

$$Pr[R/s \leq g] = \frac{2}{B(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2})} \int_{\tan^{-1} \frac{g}{\sqrt{2\nu}}}^{\tan^{-1} \frac{8}{\sqrt{2\nu}}} \cos^{\nu-1} u du \quad (4.14)$$

となり、とくに $\nu=1$ のとき

$$Pr[R/s \leq g] = \frac{2}{B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} \tan^{-1} \frac{g}{\sqrt{2}} \quad (4.15)$$

で正確に求められる。また (4.14) からこの式は自由度 ν の分布関数であることがわかる。すなわち

$$f_{\alpha}(\nu, n=2) = \sqrt{2} \tan^{-1} \frac{8}{\sqrt{2\nu}}(\nu) \quad (4.16)$$

によりパーセント点が正確にしかも簡単に計算することができる。ここで $\chi_{\alpha}^2(\nu)$ は自由度 ν の χ^2 分布の上側 $100-\alpha$ パーセント点である。表 3, 4 は付表を作成するために計算した詳しい値と、(4.16) による正確な値、それと Harter の値を比較するためのものである。

表 3 $n=2, \alpha=0.01$ 真値との比較

ν	計算値	真 値	Harter	ν	計算値	真 値	Harter
1	90.0242273	90.0242267	90.03	12	4.31977216	4.31977131	4.320
2	14.0358480	14.0358479	14.04	14	4.20989069	4.20989137	4.210
3	8.26029362	8.26029316	8.261	16	4.13060992	4.13060898	4.131
4	6.51117393	6.51117341	6.512	18	4.07072864	4.07072956	4.071
5	5.70231119	5.70231129	5.702	20	4.02391816	4.02391801	4.024
6	5.24309576	5.24309500	5.243	24	3.95546910	3.95546978	3.956
7	4.94901601	4.94901674	4.949	30	3.88908099	3.88908115	3.889
8	4.74523469	4.74523427	4.746	40	3.82468243	3.82468297	3.825
9	4.59596163	4.59596150	4.596	60	3.76220909	3.76220833	3.762
10	4.48202772	4.48202840	4.482	120	3.70159244	3.70159248	3.702

表 4 $n=2, \alpha=0.05$ 真値との比較

ν	計算値	真 値	Harter	ν	計算値	真 値	Harter
1	17.9692868	17.9692871	17.97	12	3.08130740	3.08130665	3.082
2	6.08486920	6.08486984	6.085	14	3.03318652	3.03318642	3.033
3	4.50065863	4.50065873	4.501	16	2.99799821	2.99799883	2.998
4	3.92648640	3.92648632	3.927	18	2.97115304	2.97115244	2.971
5	3.63535181	3.63535170	3.635	20	2.94999688	2.94999780	2.950
6	3.46045554	3.46045593	3.461	24	2.91879362	2.91879334	2.919
7	3.34408287	3.34408369	3.344	30	2.88820950	2.88820941	2.888
8	3.26118230	3.26118232	3.261	40	2.85823320	2.85823223	2.858
9	3.19917421	3.19917334	3.199	60	2.82884815	2.82884831	2.829
10	3.15106450	3.15106418	3.151	120	2.80004443	2.80004443	2.800

我々の求めた値を小数点以下 6 行目を 4 段入してもよしめられたら小数点以下 5 行までの値は、1 尾所 ($\alpha=0.05, \nu=120$) を除いて完全に真値に一致する。したがって小数点以下 4 行の数字になるとよろこばれれば十分であろう。真値が 10 以上のところでは 1 行ないし 2 行よけいに真値に合ひようとして試行

錯誤をくり返しているので、 10^{-6} の絶対精度をもつているのである。目標精度として確率分布 $\geq 10^{-8}$ パーセント点 $\geq 10^{-6}$ (試行錯誤に時間をかければ 10^{-9} まで可能) にさるよりく、試行錯誤法で求めたのであるが、これが満たされていまとが $n=2$ では確認された。

次に Harter の数値と著しく離れているパラメタのところを選んで、Harter の行なった計算法に検討を加えてみる。

$\alpha=0.05$, $m=20$, $\nu=7$ のパーセント点は Harter によると 7.170 付表では 7.1691 であり小数点以下 4 術目が少しあくとも 4 以上はちがつてゐることになる。そこで、まず Harter の計算レフ studentized range の確率分布関数表から $g = 5.0(0.2)6.0(0.4)$ $10.0(1.0)14.0$ の 20 の点をとり、彼の 6 術行の数値を使つて Neville の補間法により $g = 7.169(0.0001)7.170$ における値を計算してみた。その結果われわれの数値に近いことを確認したのである。勿論われわれの計算で 9 術の数値を用いても同様である、く。

補間による確率積分 ($n=20$, $\nu=7$)

g	Harter の 6 術使用	われわれの 9 術使用
7.1691	0.949999065	0.949998696
7.1692	0.950002552	0.950002182

確率に比べて θ が大きく変化するので、こんビ¹は $1/\theta$ に関する同様の補間を試みて結果、いずれもわれわれの数値に近い値を確認したのである。

$q \backslash$	Harter の 6 衡使用	われわれの 9 衡使用
7.1691	0.949999282	0.949998696
7.1692	0.950002767	0.950002182

さうに、 $\alpha = 0.01$, $n = 2$, $\nu = 1$ におけるパーセント点に対して Harter の計算法を試みてみた。この点は (4.16) から正確に値が求められ、Harter のは 90.03 であり、明らかに 4 衡目が 1 少ないことがわかるのである。(われわれの値では 90.0242 で真値に一致している) そこで Harter の求めた 6 衡の数値から ($-g = 40(5)/35$ における 20 個の点を使って) $g = 90.02(0.001)$ 90.03 について Neville の補間法で求めてみた。このとき同様にわれわれの 9 衡の数値からも求め、表 5を得た。

表 5 補間にによる確率積分 ($n=2$, $\nu=7$)

$q \backslash$	Harter の 6 衡使用	われわれの 9 衡使用
90.021	0.989999340	0.989999642
90.022	0.989999452	0.989999753
90.023	0.989999563	0.989999864
90.024	0.989999674	0.989999975
90.025	0.989999786	0.990000086
90.026	0.989999897	0.990000197
90.027	0.990000009	0.990000308
90.028	0.990000012	0.990000419
90.029	0.9900000231	0.990000530

ここでは $1/\gamma$ に関する補間をとったものである。この表によると、Harter の 6 行の数値からは補間により γ の値が小数点以下 2 行まで正確にとらえられないことがわかる。

(4) 数表の補間

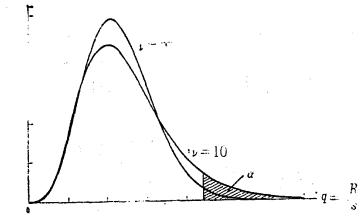
もっとも大きく数値がかかる $\nu=1$, 引数の間隔の広い $n=21$ ~29について Neville の補間法で計算してみた。このままで補間すると点を多くとってもせいぜい 3 行しか合わないが、 $1/n$ で補間すると 4 点、すなわち 30, 20, 15, 10 をとることにより、Harter の値と比べ 4 行目が 1 ないし 2 つだけの値を得ることができまる。

また ν に關して補間すると、もっとも変化のはげしい $\nu=30$ では、6~7 点を使えば、Harter の値にいくつ近い値を得ることができるが、 $1/\nu$ に關して補間すると必ずか 3 点で、Harter の値と比べ 4 行目で 1 ないし 2 つだけの値を得る。ところが $\nu=19$ では $1/\nu$ に關して線型補間でも十分であることがわかる。

参考文献

- 1) Abramowitz, M. and Stegun, I.A. (1964) : Handbook of Mathematical Functions. (National Bureau of Standards) pp. 916~924.
- 2) Harter, H.L. (1960) : Tables of range and studentized range, Ann. Math. Statist. Vol. 31 pp. 1122~1147.
- 3) Harter, H.L., Clemm, D.S. and Guthrie, E.H. (1959) : The Probability Integrals of the Range and of the Studentized Range-Probability Integral, Percentage Points of the Studentized Range; Critical Values for

付表 Studentized Range のパーセント点の表

 $\alpha=0.05$

$v \setminus n$	2	3	4	5	6	8	10	15	20	30
1	17.9693	26.9755	32.8187	37.0815	40.4076	45.3973	49.0710	55.3607	59.5576	65.1490
2	6.0849	8.3308	9.7980	10.8811	11.7343	13.0273	13.9885	15.6503	16.7688	18.2690
3	4.5007	5.9096	6.8245	7.5017	8.0371	8.8525	9.4620	10.5222	11.2400	12.2073
4	3.9265	5.0402	5.7571	6.2870	6.7064	7.3465	7.8263	8.6640	9.2334	10.0034
5	3.6354	4.6017	5.2183	5.6731	6.0329	6.5823	6.9947	7.7163	8.2080	8.8747
6	3.4605	4.3392	4.8956	5.3049	5.6284	6.1222	6.4931	7.1428	7.5864	8.1889
7	3.3441	4.1649	4.6813	5.0601	5.3591	5.8153	6.1579	6.7586	7.1691	7.7275
8	3.2612	4.0410	4.5288	4.8858	5.1672	5.5962	5.9183	6.4831	6.8694	7.3953
9	3.1992	3.9485	4.4149	4.7554	5.0235	5.4319	5.7384	6.2758	6.6435	7.1444
10	3.1511	3.8768	4.3266	4.6543	4.9120	5.3042	5.5984	6.1141	6.4670	6.9480
12	3.0813	3.7729	4.1987	4.5077	4.7502	5.1187	5.3946	5.8780	6.2089	6.6600
14	3.0332	3.7014	4.1105	4.4066	4.6385	4.9903	5.2534	5.7139	6.0290	6.4586
16	2.9980	3.6491	4.0461	4.3327	4.5568	4.8962	5.1498	5.5932	5.8963	6.3097
18	2.9712	3.6093	3.9970	4.2763	4.4944	4.8243	5.0705	5.5006	5.7944	6.1950
20	2.9500	3.5779	3.9583	4.2319	4.4452	4.7676	5.0079	5.4273	5.7136	6.1039
24	2.9188	3.5317	3.9013	4.1663	4.3727	4.6838	4.9152	5.3186	5.5936	5.9682
30	2.8882	3.4864	3.8454	4.1021	4.3015	4.6014	4.8241	5.2114	5.4750	5.8335
40	2.8582	3.4421	3.7907	4.0391	4.2316	4.5205	4.7345	5.1056	5.3575	5.6996
60	2.8288	3.3987	3.7371	3.9774	4.1632	4.4411	4.6463	5.0011	5.2412	5.5663
120	2.8000	3.3561	3.6846	3.9169	4.0960	4.3630	4.5595	4.8979	5.1259	5.4336
∞	2.7718	3.3145	3.6332	3.8577	4.0301	4.2863	4.4741	4.7959	5.0117	5.3013

 $\alpha=0.01$

$v \setminus n$	2	3	4	5	6	8	10	15	20	30
1	90.0242	135.0407	164.2577	185.5753	202.2097	227.1663	245.5416	277.0034	297.9972	325.9682
2	14.0358	19.0189	22.2937	24.7172	26.6290	29.5301	31.6894	35.4261	37.9435	41.3221
3	8.2603	10.6185	12.1695	13.3243	14.2407	15.6410	16.6908	18.5219	19.7648	21.4429
4	6.5112	8.1198	9.1729	9.9583	10.5832	11.5418	12.2637	13.5298	14.3939	15.5662
5	5.7023	6.9757	7.8042	8.4215	8.9131	9.6687	10.2393	11.2436	11.9318	12.8688
6	5.2431	6.3305	7.0333	7.5560	7.9723	8.6125	9.0966	9.9508	10.5378	11.3393
7	4.9490	5.9193	6.5424	7.0050	7.3730	7.9390	8.3674	9.1242	9.6454	10.3586
8	4.7452	5.6354	6.2038	6.6248	6.9594	7.4738	7.8632	8.5517	9.0265	9.6773
9	4.5960	5.4280	5.9567	6.3473	6.6574	7.1339	7.4945	8.1323	8.5726	9.1767
10	4.4820	5.2702	5.7686	6.1361	6.4275	6.8749	7.2133	7.8121	8.2256	8.7936
12	4.3198	5.0459	5.5016	5.8363	6.1011	6.5069	6.8136	7.3558	7.7305	8.2456
14	4.2099	4.8945	5.3215	5.6340	5.8808	6.2583	6.5432	7.0466	7.3943	7.8726
16	4.1306	4.7855	5.1919	5.4885	5.7223	6.0793	6.3483	6.8233	7.1512	7.6023
18	4.0707	4.7034	5.0942	5.3788	5.6028	5.9443	6.2013	6.6546	6.9673	7.3973
20	4.0239	4.6392	5.0180	5.2933	5.5095	5.8389	6.0865	6.5226	6.8232	7.2366
24	3.9555	4.5456	4.9068	5.1684	5.3735	5.6850	5.9187	6.3296	6.6123	7.0008
30	3.8891	4.4549	4.7992	5.0476	5.2418	5.5361	5.7563	6.1423	6.4074	6.7710
40	3.8247	4.3672	4.6951	4.9308	5.1145	5.3920	5.5989	5.9606	6.2083	6.5471
60	3.7622	4.2822	4.5944	4.8178	4.9913	5.2525	5.4466	5.7845	6.0149	6.3290
120	3.7016	4.1999	4.4970	4.7085	4.8722	5.1176	5.2992	5.6138	5.8272	6.1168
∞	3.6428	4.1203	4.4028	4.6028	4.7570	4.9872	5.1566	5.4485	5.6452	5.9106

Duncan's New Multiple Range Test. (ASTIA Document AD231733).

- 4) Hartley, H.O. (1953) : Tables of percentage points of the "studentized" range, Biometrika Vol. 40 pp. 236.
- 5) May, J.M. (1952) : Extended and corrected tables of the upper percentage points of the "studentized" range, Biometrika Vol. 39 pp. 192—193.
- 6) Pachares, J. (1959) : Tables of the upper 10% points of the studentized range, Biometrika Vol. 46 pp. 461—467.
- 7) Pearson, E.S. and Hartley, H.O. (1943) : Tables of the probability integral of the 'studentized' range, Biometrika Vol. 33 pp. 89—99.
- 8) 戸田・清水・竹内 (1968) : 統計分布と電子計算機 (1), (2), (3) 正規分布関数の展開式および近似式の検討 (1), (2), (3), 標準化と品質管理 Vol. 21 9月号 pp. 59—64, 11月号 pp. 45—52, 12月号 pp. 35—42.
- 9) Tukey, J.W. (1951) : Quick and dirty method in statistics, Part II, simple analysis for standard designs, Proc. 5th Ann. Convention Amer. Soc. for QC, pp. 187—197.
- 10) 山下真一郎 (1964) : Gauss の数值積分公式の分点と重率の決定, 情報処理 Vol. 5 pp. 206—215.