

カウニタ機械の計算可能性

電気通信大学 金山裕

はじめに

カウニタを k 個もつ機械を $k-CM$ と表わし [1] , “ま
ニ山で数論的関数を計算する手段として用いること”です。

Shephardson³ は注意の帰納的関数がある $k-CM$ によつて計
算できることを示した [4] . したがつて、帰納的関数 f が
与えらるんとき、 $R = R(f)$ が存在して、 f は $(k-1)-CM$ では
計算できなかつて、 $k-CM$ によつて計算できること。この $R(f)$ が
如何なるものかを、あらゆる f につけて考察すること
が本稿の目的である。たゞ、ニニ²は 1 変数関数だけを対象
として扱う。

$k-CM$ は $n \times (n+1)$ の行列 $U = [u_{ij}]$ である [2]. こ
こで u_{ij} は A_g, P_g, β_g ; $g=1, \dots, k$ から作られる多項式であ
る。このとき各 $i=1, \dots, n+1$ につれて、部分関数 $\tilde{U}_{(i)}: N^k \rightarrow N^k$
が定義される。この部分関数 $(\tilde{U}_{(1)}, \dots, \tilde{U}_{(n)})$ は方程式系

$$f_i = \sum_{j=1}^n u_{ij} f_j + u_{i,n+1} \quad : i=1, \dots, n \quad (1)$$

の最小解を $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ として用いて 1 度数部分関数 (U) :
 $N \rightarrow N$ が " γ " により定義される。

$$(U)(x) = \begin{cases} y & \text{if } (\exists y_1) \dots (\exists y_k) [\tilde{U}_{(1)}(x, 0, \dots, 0) = (y, y_1, \dots, y_k)] \\ \text{undefined} & \text{if } \tilde{U}_{(1)}(x, 0, \dots, 0) = \text{undefined}. \end{cases}$$

" γ " の定理は Turing 機械を模倣する系と同一である。小林は
 これまではじめ 5 回書いた。これは k -CM と 2-CM との間の
 模倣系と同一である。

定理 1 [小林, 5] 存在 γ 1 度数帰納的関数 f は γ
 3 -CM U が存在し $(U) = f$.

証明.

$$\tilde{U}_E = \begin{bmatrix} \mu & \alpha_2 & M & M & M & M \\ M & M & p_1 & M & \beta_1 & M \\ M & M & p_2 \alpha_3^2 & \beta_2 & \mu & M \\ M & \beta_3 & \mu & p_3 \alpha_2 & M & M \\ M & M & M & M & p_2 \alpha_1 & \beta_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{U}_L = \begin{bmatrix} M & \beta_1 \alpha_3 & p_1 & \mu & M \\ \beta_2 & p_2 \alpha_1 & \mu & \mu & M \\ p_1 \alpha_2 & \mu & \mu & \beta_1 & M \\ M & M & M & p_3 \alpha_1 & \beta_3 \end{bmatrix}$$

とおき、 \tilde{U}_E と \tilde{U}_L は 3 -CM で、 $\tilde{U}_{E(1)}(x, 0, 0) = (2^x, 0, 0)$ で
 $\tilde{U}_{L(1)}(2^x(2\beta+1), 0, 0) = (y, \beta, 0)$ とする。

Shepherdson は γ で f を定め、 f は U_f が存在し $U_f = (U_f)$.
 $x = (x_1, \dots, x_k) \in N^k$ は Gödel number $\{CT\}$.

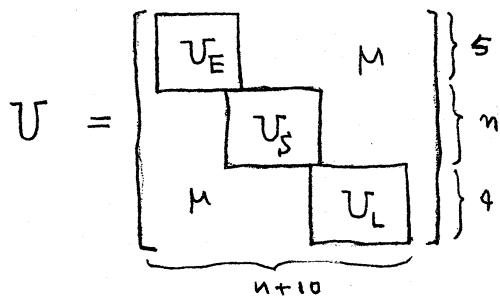
$$g_n(x) = 2^{x_1} 3^{x_2} \dots \pi_k^{x_k} \quad (\pi_k \text{ は } k \text{ 番目の素数}, \pi_1 = 2).$$

$x = 3$ の時, Minsky は f は $[3]$ と $[3]$, U_f は $\{2\}$ で U_S が存在し

x (U_S は $2 - \text{CM}$), すなはち $x \in N^k$ は $\{1\}$

$$\tilde{U}_{S(1)}(g_n(x), 0) = \begin{cases} (g_n(\tilde{U}_{f(1)}(x)), 0) & \text{if } \tilde{U}_{f(1)}(x) \text{ is defined} \\ \text{undefined} & \text{otherwise} \end{cases}$$

となる。以上で U_E , U_S , U_L を用いて



の 5 は U を定義するとき, U は f の計算 [2] は $>$ ものとしない

$f(x) = \text{defined}$ のときは,

$$\begin{aligned} \langle 1, (x, 0, 0) \rangle &\stackrel{+}{\Rightarrow} \langle 5, (2^x, 0, 0) \rangle = \langle 5, (g_n(x, 0, \dots, 0), 0, 0) \rangle \\ &\stackrel{+}{\Rightarrow} \langle n+5, (g_n(\tilde{U}_{f(1)}(x, 0, \dots, 0), 0, 0) \rangle \\ &= \langle n+5, (2^{f(x)}(2^{3+1}), 0, 0) \rangle \\ &\Rightarrow \langle n+10, (f(x), 3, 0) \rangle \end{aligned}$$

$f(x) = \text{undefined}$ のときは

$$\begin{aligned} \langle 1, (x, 0, 0) \rangle &\stackrel{+}{\Rightarrow} \langle 5, (2^x, 0, 0) \rangle = \langle 5, (g_n(x, 0, \dots, 0), 0, 0) \rangle \\ &\Rightarrow \dots \quad (\text{停止しない}) \end{aligned}$$

つまり $(U)(x) = f(x)$.



である。すなはち f が $3 - \text{CM}$ をはば計算ができることが明

しかし $f_1 \rightarrow f_2 \rightarrow \dots$ の “ \circ ”， $2-CM$ または $1-CM$ “ \circ ” の程度の “ \circ ”
が可能となるのかが問題になる， ≤ 3 の “ \circ ” ある。

1. CM の標準形

$2-CM$ の特性を知るために， 本章では \mathbb{N} の標準形を求める。
標準形を求める手続きはすべて effective である。標準形を求
めることは， 単純な同値問題を解くことである。

$$U = [u_{ij}] \in \mathbb{N}^{n \times n}, u_{ii} \neq M \text{ ならば } u_{ii} \text{ を } \underline{\mu \text{ 且 } -7^\circ} \text{ とする}.$$

任意の U を整形して， $i \neq 1$ のときは小ルーチンをもつたうえで
 $3 =$ とか“ \circ ”する ($i = 1$ の $i = 1$ は \mathbb{N} ではない)。

補題2. 任意の $U \in \mathbb{N}^{n \times n}$ $V = [v_{ij}]$ が存在して，
 $i \neq 1 \rightarrow v_{ii} \neq M \wedge \tilde{U}_{(i)} = \tilde{V}_{(i)}$.

証明. $i \neq 1$ かつ $u_{ii} = M$ のときは存在して \exists と仮定す。
方程式系 (1) の右辺で f_i が現れない場合は $\forall i$ ， (1) のオイ
リの右辺を代入した方程式系を V' とする。 $\tilde{U}_{(i)} = \tilde{V}'_{(i)}$ が各
 $i \neq 1$ 成り立つ。 $u_{ii} = M$ であるから， V' には f_i が
現れない。よって， V' から， オイリ行とオイリ列を除いた行列を
 $\Sigma V''$ すると， $\tilde{U}_{(i)} = \tilde{V}''_{(i)}$ 。この操作を繰り返すと， $i \neq 1$ 且
 $u_{ii} = M$ の i は存在しない。

⊗

$\forall x \in \mathbb{N}^k \in \mathbb{N}^{n \times n}$, $\lambda(x) = x$ とする。また， 任意の部分関
数 $f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}^k$ $\in \mathbb{N}^{n \times n}$, $f^0 = \lambda$, $f^{m+1} = f(f^m)$ とする。

基本関数 P_g, P_g^a, β_g ($g=1, \dots, k$) を重複を許して任意回数掛け合つての関数を項といふ。 $a, c \in N$; $b=0 \text{ or } 1 \rightarrow \cup$

$$(a, b, c)_g = P_g^a \beta_g^b \alpha_g^c$$
 と定義する。 $(a, b, c)_g$ は \rightarrow の項である。

故に $(a_1, b_1, c_1), \dots, (a_k, b_k, c_k)$ で \rightarrow の項である。

この形の項を 標準形といふ。 \rightarrow の項を b_1, \dots, b_k 項といふ。例えば $P_1^2 \beta_1, P_2 \alpha_2^3 = (2, 1, 0), (1, 0, 3)_2$ は 10 項である。

補題3 [項の分解] 任意の $a, c, d, g \rightarrow \cup$,

$$(a, 0, c)_g = (a+d, 0, c+d)_g + \sum_{j=0}^{d-1} (a+j, 1, c+j)_g.$$

この補題を用ひて \rightarrow は \rightarrow と \rightarrow の 01 項と、他の 01 項と複数個の 11 項の和で分解できることが可能である。

補題4. すべての項が \rightarrow , \rightarrow 等価な標準形の t' が \rightarrow で存在するか、すなは $t=\mu$ である。

補題5. 任意の多項式 $u \rightarrow \cup$, 項 t_1, \dots, t_m ($m \geq 0$) が存在して, $u = t_1 + \dots + t_m$. $\exists z \in \mathbb{C}$ で $z^m = \alpha$ のとき $u = \mu$ と定義する。

補題6. t が b_1, \dots, b_k 項, t' が $b'_1, \dots, b'_{k'}$ 項で $tt' \neq \mu$ を満たす,

 t, \dots, t_k 項 t が存在して, $tt' = t'$ かつ $t_g'' = \max(t_g, t_{g'}')$
 $\therefore g = 1, \dots, k.$

（証明）対象とする t は \rightarrow と \rightarrow の 01, 10, 00 項と他の細かい, \rightarrow のよどみで定義する。

- (a) $a_1 > c_1 \wedge a_2 = c_2$ のとき, 項 $(a_1, 0, c_1), (a_2, 1, c_2) \in 01 = \text{項}$ である.
 (b) $a_1 = c_1 \wedge a_2 > c_2$ のとき, 項 $(a_1, 1, c_1), (a_2, 0, c_2) \in 10 = \text{項}$ である.
 (c) $a_1 > c_1 \wedge a_2 > c_2$ のとき, \neg 項 $(a_1, 0, c_1), (a_2, 0, c_2) \in 00--\text{項}$ である.
 (d) $a_1 > c_1 \wedge a_2 \leq c_2$ のとき, 項 " " $\in 00+-\text{項}$ である.
 (e) $a_1 \leq c_1 \wedge a_2 > c_2$ のとき, 項 " " $\in 00+-\text{項}$ である.

更に, $\text{im}(f) = \{f(x) \mid x \in N^2\}$ と定義する.

$00, 01, 10$ 項の有限集合 T が“つき”の条件 I~V を満たすとき, 標準形 といふ.

I. すべての $t \in T$ の domain は互い素である.

II. $t \in T$ が “00 項” ならば, t は $00--$, $00+-$, $00-+$ 項のいずれかである.

III. $t \in T$ が “01 項” ならば, $[t \text{ は } 01 = \text{項} \vee (\exists t') [t' \in T \wedge t' \text{ は } 01 = \text{項} \text{ または } 00-+\text{項} \wedge \text{im}(t) \subseteq \text{dom}(t')]]$

IV. $t \in T$ が “10 項” ならば, $[t \text{ は } 10 = \text{項} \vee (\exists t') [t' \in T \wedge t' \text{ は } 10 = \text{項} \text{ または } 00+-\text{項} \wedge \text{im}(t) \subseteq \text{dom}(t')]]$

V. $[t, t' \in T \wedge t \text{ は } 01 \text{ 項} \wedge t' \text{ は } 10 \text{ 項}] \rightarrow tt' = t't = \mu.$

すなはち, $\text{dom}(f) \cap \text{dom}(g) = \emptyset$ のとき, $f^*g = \sum_{m=0}^{\infty} f^m g$ となる. $*$ は 2 項演算子である.

補題 7. (a) $f^*g = f(f^*g) + g$.

(b) $(f_1 + f_2)^*g = (f_1^*f_2)^*(f_1^*g)$

(c) $f_1 f_2 = f_2 f_1 = \mu \rightarrow (f_1 + f_2)^*g = f_1 f_1^*g + f_2 f_2^*g + g$.

補題8. 任意の 2-CM の多項式 f, g は \mathbb{Z} 上, $\text{dom}(f) \cap \text{dom}(g) = \emptyset$ ならば, $00, 01, 10$ 項の標準形の集合 $T = \{t_1, \dots, t_m\}$ と多項式 g' が存在して, $f^*g = (\sum T)^*g'.$ ここで $\sum T = t_1 + \dots + t_m$ と定義する.

証明. つきのいくつかのステップで示す, T と g を定める.
まず, (1) f を項の和の形に直し, その項すべての集合を T とおく. もし $T' = \emptyset$ とおく.

(2). $T = \{(a_1, 0, c_1), (a_2, 0, c_2)\} \in \mathbb{P}_2$ で
 T をおく.

(3) 次の条件をみたす $t_1, \dots, t_l \in T$ ($l \geq 2$) と $a_1, c_1, a_2, a'_1, c'_1$ が存在するか否かを調べる. なければ (4) へ移る.

$$\begin{cases} t_1 = (a_1, 0, c_1), (a_2, 1, c_2) \\ t_1, \dots, t_l = (a'_1, 0, c'_1), (a_2, 1, c_2) \end{cases}$$

存在するならば, $a_1 \leq a'_1$ かつ t_2, \dots, t_l は 01 項か 00 項である.
この中に 00 項は重複して現れぬ可能性があるが, 同じ
01 項は高々 1 回しか現われない.

$a_1 < a'_1$ のとき, $a_1 + d = a'_1$ とき, 補題 3 を用いて t_1 を分解
する.

$$\begin{aligned} t_1 &= t'_1 + \sum_{j=1}^{d-1} t'_{1j} \\ &= (a'_1, 0, c_1 + d), (a_2, 1, c_2) + \sum_{j=1}^{d-1} (a_1 + j, 1, c_1 + j), (a_2, 1, c_2) \end{aligned}$$

であるが, 端の効果を考慮して t'_1 とするとき, このとき,

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1' t_2 \dots t_d = t_1 t_2 \dots t_d = (a'_1, 0, c'_1), (a_2, 1, a_2)_2 \\ \text{dom}(t_1' t_2 \dots t_d) = \text{dom}(t_1') \end{array} \right.$$

と仮定、 $(T - \{t_1\}) \cup \{(a'_1, 0, c'_1), (a_2, 1, a_2)_2 \mid a'_1 > c'_1\} \cup \{t_{ij}' \mid j=0, \dots, d-1\}$ を改めて T とおく。 \therefore (3) の先頭へ戻る。

(4) 上の(3) と同様の処理を 10 項目に 2 行う。

(5) 01 項である $\neq 01 =$ 項である \neq はない項だが T に属していなければ (6) へ進め。そのままで項を 1つとり、これを分解して端の効果がないようにしておく。つまり $t_1 = (a_1, 0, c_1)$, $(a_2, 1, c_2)_2 \neq a_1$ は十分大きいとする。 (3) の処理が終り、2 行う。 \therefore t_1 を T から除く。このとき、つまづきの 2つあるうちの 1つ"山かの条件"が成立する。

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \exists t_2 \dots t_{d+1} \in T [\text{im}(t_1 \dots t_d) \subseteq \text{dom}(t_{d+1}) \wedge t_{d+1} \neq 01 = \text{項} \\ \text{または } 00-\text{項}] \\ (b) \exists t_2 \dots t_d \in T [\text{dom}(t_1) = \text{dom}(t_1 \dots t_d) \wedge \text{im}(t_1 \dots t_d) \cap \text{dom}(\bar{T}) = \emptyset] \end{array} \right.$$

(a) のときは $(T - \{t_1\}) \cup \{t_1 \dots t_d\}$ を再び T とおく。

(b) のときは $(T - \{t_1\})$ を再び T とおく、 $T' \cup \{t_1 \dots t_d\}$ を再び T' とおく、この後(5) の先頭へ戻る。

(6) 10 項である、 $\neq 10 =$ 項ではない項に 2 行う、(5) と同様の処理を行う。

(7) $t, t' \in T \wedge t$ は 01 項 $\wedge t'$ は 10 項 $\wedge [tt' + \mu \vee t't + \mu]$ を t, t' が存在しないければ (8) へ進め。存在するとき、

$[t = t_0 + \sum_j t_j \wedge t' = t_0' + \sum_j t'_j \wedge t_0 \text{ は } 01\text{-項} \wedge t_0' \text{ は } 10\text{-項} \wedge \text{ た}, t'_j \text{ は } 11\text{-項} \wedge t_0 t_0' = t_0' t_0 = \mu]$ た $t_0, t_0', \{t_j\}, \{t'_j\}$ が存在する。このとき、 $(T - \{t, t'\}) \cup \{t_0, t_0'\} \cup \{t_j\} \cup \{t'_j\}$ を再び T とすき、再び (7) の先頭へ戻る。

(8) $\exists t_1 \dots t_l \in T \exists a_1 \exists a_2 [t_1 t_2 \dots t_l = (a_1, 1, a_1), (a_2, 1, a_2)_2]$ た t_1 が存在しないとき、(9) へ進む。そうではないとき、 $T - \{t_1\}$ を改めて T とすき、再び (8) の先頭へ戻る。

(9) 11 項の $t_1 \in T$ が存在しなければ (10) へ進む。存在するときはつねにつぎが成立する ($l \geq 0$)。

$(\exists t_2) \dots (\exists t_l) [\underbrace{t_2, \dots, t_l \in T}_{t_1, \dots, t_l} \wedge (\sum T) = \mu].$ このとき $T - \{t_1\}$ を改めて T とすき、 $T' \cup \{t_1, \dots, t_l\}$ を改めて T' とすき、(9) の先頭へ戻る。

(10) 得られた T が最終的に求めた T である。更に $g' = g + (\sum T') g$ とすく。 \square

項たる $00--$, $00-+$, $00+-$, $01-$, $10-$ 項のいすみかげあるとき、たは 標準形であるという

補題 9. 任意の 2-CM U に $i \neq 1$, $V = [v_{ij}]$ が存在し $[i \neq 1 \rightarrow (\exists t) [v_{ii} = t \wedge t \text{ が } \alpha \text{ 標準形}]] \wedge [v_{11} = \mu \vee (\exists t) [v_{11} = t \wedge t \text{ が } \alpha \text{ 標準形}]] \wedge [\tilde{U}_{(1)} = \tilde{V}_{(1)}]$.

証明. 補題 2 と補題 8 によると、 $U = [u_{ij}]$ が $(i \neq 1 \rightarrow (\exists T) [u_{ii} = \sum T \wedge T \text{ は } \alpha \text{ 標準形}]) \wedge (u_{11} = \mu \vee (\exists T) [u_{11} = \sum T \wedge T \text{ は } \alpha \text{ 標準形}])$

を満たすと仮定してよい。 $u_0 = \sum_{j=1}^{i-1} u_{ij} f_j + \sum_{j=i+1}^n u_{ij} f_j + u_{i,n+1}$ とおく、いま u_{ii} が α 標準形の項にも M にそろへしないとする。

u_{ii} を項の和に分解して、その項の集合を T とおくと、 T の形は \vdash で条件(I)~(IV) のうちいちじるしかが成り立つ。

(I) 00--項が T に属するとき。

その項を t とする。更に、

$$01 = T \text{ で } t_{01,1}, \dots, t_{01,m}, \text{ その和 } v_{01}$$

$$10 = T \text{ で } t_{10,1}, \dots, t_{10,k}, \text{ その和 } v_{10}$$

$$01 = T \text{ 以外の } 01 \text{ 項の和 } v_{01},$$

$$10 = T \text{ 以外の } 10 \text{ 項 } " \quad v_{10}, \text{ と 4 が等しい} \text{ 事} \text{ 物} \text{ す}.$$

T は α 標準形をもつべきである、次式が成り立つ。

$$v_{01}(t + w_{01} + w_{10} + v_{10}) = M$$

$$v_{10}(t + w_{10} + w_{01} + v_{01}) = M$$

$$w_{01}(t + w_{01} + w_{10} + v_{10}) = M$$

$$w_{10}(t + w_{10} + w_{01} + v_{01}) = M$$

これらを補題 7 に代入する。

$$\begin{aligned} u_{ii} * u_0 &= (t + v_{01} + v_{10} + w_{01} + w_{10}) * u_0 \\ &= ((v_{01} + v_{10} + w_{01} + w_{10}) * t) * (v_{01} + v_{10} + w_{01} + w_{10}) * u_0 \\ &= t * ((v_{01} + w_{01})(v_{01} + w_{01}) * u_0 + (v_{10} + w_{10})(v_{10} + w_{10}) * u_0 + u_0) \\ &= t * ((v_{01} + w_{01}) v_{01} * u_0 + (v_{10} + w_{10}) v_{10} * u_0 + u_0) \end{aligned}$$

いま

$$w_{01,g} = \sum \{ t \mid \text{im}(t) \subseteq \text{dom}(t_{01,g}) \} : g=1, \dots, m$$

$$w_{10,g} = \sum \{ t \mid \text{im}(t) \subseteq \text{dom}(t_{10,g}) \} : g=1, \dots, l$$

と定義するとき、

$$u_{ii}^* u_0 = t^* \left[\sum_{g=1}^m (t_{01,g} + w_{01,g}) t_{01,g}^* u_0 + \sum_{g=1}^l (t_{10,g} + w_{10,g}) t_{10,g}^* u_0 + u_0 \right]$$

この $i=1, 2, \dots, n$ の方程式群をもつて、(I) の式をとお書きかえよ。

$$\begin{cases} f_i = t f_i + \sum_{g=1}^m (t_{01,g} + w_{01,g}) f'_{i,g} + \sum_{g=1}^l (t_{10,g} + w_{10,g}) f''_{i,g} + u_0 \\ f'_{i,g} = t_{01,g} f'_{i,g} + u_0 & ; g=1, \dots, m \\ f''_{i,g} = t_{10,g} f''_{i,g} + u_0 & ; g=1, \dots, l \end{cases}$$

書き換えた新たなる方程式系と(I) の最小解は等しい。又これに現れるすべての小ルート t , $t_{01,g}$, $t_{10,g}$ はすべて標準形となる。

(II) 00-+項がTに属るとき。

この項七たとえよ。 $u_0, v_{01}, v_{10}, w_{10}, t_{01,1}, \dots, t_{01,m}, t_{10,1}, \dots, t_{10,l}$ を(I) と同様に定義する。T

$$w_{01} = \sum \{ t \in T \mid t \text{は } 00-+ \text{項} \wedge t \text{は } 01 \text{項} \wedge \exists g (\exists t) [\text{im}(t) \subseteq \text{dom}(t_{01,g})] \}$$

$$w_{01}' = \sum \{ t \in T \mid t \text{は } 00-+ \text{項} \wedge t \text{は } 01 \text{項} \wedge \exists g (\exists t) [\text{im}(t) \subseteq \text{dom}(t)] \}$$

このとき (I) と同様に

$$w_{01}' (v_{01} + v_{10} + w_{01} + w_{10} + w_{01}') = \mu$$

左式が成立する。左式

$$u_{ii}^* u_0 = (t + v_{01} + v_{10} + w_{01} + w_{10} + w_{01}')^* u_0$$

$$\begin{aligned} &= ((t + v_{01} + v_{10} + w_{01} + w_{10})^* w_{01}')^* ((t + v_{01} + v_{10} + w_{01} + w_{10})^* u_0) \\ &= \sum_{g=1}^m (t_{01,g} + w_{01,g}) t_{01,g}^* u_0 + \sum_{g=1}^l (t_{10,g} + w_{10,g}) t_{10,g}^* u_0 \\ &\quad + (w_{01}' + t) t^* \sum_{g=1}^l (t_{10,g} + w_{10,g}) t_{10,g}^* u_0 + u_0 \end{aligned}$$

であるから、左式の(1)の式が成り立つ。方程式を解く

$$\left\{ \begin{array}{l} f_i = \sum_{g=1}^m (t_{01,g} + w_{01,g}) f'_{i,g} + \sum_{g=1}^l (t_{10,g} + w_{10,g}) f''_{i,g} + (w_{01}' + t) f_{i,0} + u_0 \\ f'_{i,g} = t_{01,g} f'_{i,g} + u_0 \quad : g = 1, \dots, m \\ f''_{i,g} = t_{10,g} f''_{i,g} + u_0 \quad : g = 1, \dots, l \\ f_{i,0} = t f_{i,0} + \sum_{g=1}^l (t_{10,g} + w_{10,g}) f''_{i,g} \end{array} \right.$$

である。これは現れる項の順序 ($t - v - w$) が $t - v - w$ の順序から成り、A標準形をなす。この式は左式の式 $f_{i,0}$ が入る式と右辺を消去する。この消去操作は β である。他の式の順序 ($t - v - w$) が変化を受けることはない。

(I), (II) 以外の場合、すなはち (III) 00+一項を含む場合と (IV) 00項を全く含まない場合は、上と同様に β で変形される。



00項 $t = (a_1, 0, c_1), (a_2, 0, c_2)$ は β で α の順序を保つ。すなはち、B標準形をなす。このことは、

$$(a) \quad a_1, a_2 > 0, \quad c_1 = c_2 = 0. \quad \text{BPS} \quad t = p_1^{a_1} p_2^{a_2}$$

$$(b) \quad a_1 > 0, \quad c_1 = a_2 = 0. \quad \text{BPS} \quad t = p_1^{a_1} s_2^{c_2}$$

$$(c) \quad a_2 > 0, \quad a_1 = c_2 = 0. \quad \text{BPS} \quad t = p_2^{a_2} s_1^{c_1}$$

補題 10. 任意の 2-CM U は $\exists t$, $V = [v_{ij}]$ の存在

$$\exists t, [i \neq j \rightarrow (\exists t)[v_{ii} = t \wedge t = \beta \text{標準形}]] \wedge [v_{11} = M V$$

$$(\exists t)[v_{11} = t \wedge t = \beta \text{標準形}] \wedge [\tilde{U}_{(1)} = \tilde{V}_{(1)}].$$

証明. U は補題 9 の条件を満たすと仮定する. さて、各 α 標準形を左のルールで $U_{ii} = (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2)$ とする

$i=1, 2$ の場合が分けられる. u_0 を補題 9 の証明 12 における標準形と定義する.

$$(a.1) \quad b_1 = b_2 = 0 \wedge a_1 > c_1 \wedge a_2 > c_2 \text{ のとき}.$$

$$\begin{aligned} u_{ii} * u_0 &= \sum_{\ell=0}^{\infty} (p_1^{a_1} s_1^{c_1})^\ell (p_2^{a_2} s_2^{c_2})^\ell u_0 \\ &= u_0 + \sum p_1^{a_1} (s_1^{c_1} p_1^{a_1})^\ell s_1 p_2^{a_2} (s_2^{c_2} p_2^{a_2})^\ell s_2^{c_2} u_0 \\ &= u_0 + p_1^{a_1} p_2^{a_2} (p_1^{a_1 - c_1} p_2^{a_2 - c_2})^* s_1^{c_1} s_2^{c_2} u_0. \end{aligned}$$

したがって式 (1) の方程式

$$\begin{cases} f_i = p_1^{a_1} p_2^{a_2} f_i' + u_0 \\ f_i' = p_1^{a_1 - c_1} p_2^{a_2 - c_2} f_i' + u_{00} \end{cases}$$

における f_i , 方程式の最小解は f_i' である. すなはち u_{00} は $\sum \{(a'_1 - c_1, b'_1, c'_1), (a'_2 - c_2, b'_2, c'_2)\}_2 f_j \mid (a'_1, b'_1, c'_1), (a'_2, b'_2, c'_2)_2 f_j \leq u_0 \wedge c_1 \leq a'_1 \wedge c_2 \leq a'_2\}$ に等しい. すなはち必要ならば順次分解する. f_i はルール-1^o を満たさないから f_i' を消去する. こうして

(他の式の $b_1 - \gamma^*$ の値を変更するにつけた) (他の場合に)
 いこは結果の γ を示す).

(a.2) $b_1 = b_2 = 0 \wedge a_1 > c_1 \wedge a_2 \leq c_2$ のとき,

$$\begin{cases} f_i = p_1^{a_1} p_2^{a_2} f_i' + u_0 \\ f_i' = p_1^{a_1 - c_1} p_2^{c_2 - a_2} f_i' + u_{00} \end{cases}$$

であるがえり. u_{00} は (a.1) で示したものと同じ.

(a.3) $b_1 = b_2 = 0 \wedge a_1 \leq c_1 \wedge a_2 > c_2$ のとき,

(a.2) と類似の式で示せり.

(b) $b_1 = 0 \wedge b_2 = 1 \wedge a_1 > c_1 \wedge a_2 = c_2$ のとき,

$$\begin{cases} f_i = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \beta_2 s_2^{a_2} f_i' + u_0 \\ f_i' = p_1^{a_1 - c_1} f_i' + u_{00} \end{cases}$$

であるがえり. $\gamma = \gamma^* u_{00}$ は

$$\sum \left\{ (a_1' - c_1, b_1', c_1'), (a_2', b_2', c_2')_2 f_j \mid (a_1', b_1', c_1'), (a_2', b_2', c_2')_2 f_j \leq u_0 \right. \\ \left. \wedge c_1 \leq a_1' \right\}$$

を満たす.

(c) $b_1 = 1 \wedge b_2 = 0 \wedge a_1 = c_1 \wedge a_2 > c_2$ のとき.

(b) の場合と同様に示せり. ☒

以上は F' , これは 2-CM の標準形が得られる.

2. 2-CM と 1-CM の $\frac{1}{2}T$ の可能性

$\Rightarrow T$ の定理 12.5, 2, 2-CM の $\frac{1}{2}T$ の特性について.

定理 11. 任意の 2-CM U は $\exists \in \mathbb{Z}$, $N_1 \subseteq N$ の存在 \exists ,

$$\overline{\overline{N}_1} = \mathbb{R} \wedge [(\forall x \in N_1 \rightarrow (U)(x) = \text{undefined}) \vee (\exists f)(f \text{ は } 1 \text{ 次関数}) \wedge (\forall x \in N_1 \rightarrow (U)(x) = f(x))]$$

略証. U を標準形とし, CM の 各状態を遷移する計算式¹¹ τ , $\tau \circ \tau - 7^\circ \circ \tau \circ \tau$ 回だけが繰り返す同一現象. \square

定理 12. 任意の 1-CM U は $\exists \in \mathbb{Z}$, $N_1 \subseteq N$ の存在 \exists ,

$$[(\forall x \in N_1 \rightarrow (U)(x) = \text{undefined}) \vee (\exists a)[(\forall x \in N_1 \rightarrow (U)(x) = x+a) \vee (\exists a)[(\forall x \in N_1 \rightarrow (U)(x) = x-a) \vee (\exists a)[(\forall x \in N_1 \rightarrow (U)(x) = a)]]]$$

以上より 2 の 定理により, 1-CM, 2-CM, 3-CM は $F >$
2 計算可能な関数の族が真に繰り返すことが示された.

謝辞. 東工大小林孝次郎助教授は定理 1 だけでなく, 2-CM の標準形を止め方針を筆者に示され, これが本研究を
推進する大なる力となり, ここに記念して記す, 感謝する.

文献

1. Fisher, P.C. et.al., Counter machines and counter languages, Math. System Theory, 2, pp265-283.
2. Kamayama, Y., Algebraic properties of programs, 日米コンピュータ会議.
3. Minsky, M.L., Computation, Prentice-Hall, 1967.
4. Shepherdson, J.C., et.al. Computability of Rec. func., J.ACM, 10,
pp217-255, 1963.
5. 小林孝次郎, 和信.