

# Structure of determinative subspace in cell space

九大理基礎情報研 山口優子

## §1. 序

北川[1]にて提唱された“生物数学へのセル空間論的接近”とは、一般にn次元セル空間の各セルにあらざ状態集合の中の1つの状態がassignされる機構と、この空間のsub domain上で定義されたある原理にしたがう局所変換によつて生じる機構の遷移構造、振動構造、或つは、安定構造等を解明するものである。ここでは、2次元セル空間における特殊なsub domain (basic cell space) 上で定義された局所多數決原理にしたがう局所変換に因して、構構の遷移構造、安定構造等を論ずる。

## §2. 基本的定義

正方形、正三角、或つは正六角形を単位セルとする有限单連結2次元セル空間をCであらわす。Cの各セルに状態1又

は  $C(X)$  の configuration と呼ぶ。  
 は  $C(X)$  等の subset, 可能な configurations 全体を  
 $\{C(X)\}$  と表す。  $B \in C(X)$  subset とする。

定義 2.1.  $T_B : \{C(X)\} \rightarrow \{C(X)\}$  : 局所変換

$$\Leftrightarrow \forall C(X), T_B(C(X)|(C-B)) = C(X)|(C-B)$$

$T = T^{\circ} = C(X)|(C-B) \neq C(X) \in \text{subset}(C-B)$  は制限  
 $C$  configuration と表す。

subset  $B$  と平行移動及ぶ回転 ( $= f$ ) が合同となる  
 うるさいので可能な subsets の全体を考えよ。 これは  
 subsets だけ 同じ局所変換が定義 2.1 で定め,  
 1つの集合  $\mathcal{C}$  の各  $C$  は basic cell space となる。 以下  
 我々は 次のセルから成る basic cell space の  
 例を考えよ。

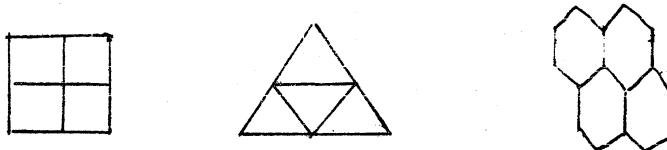


Fig 2.1 例のセルからなる basic cell space

種々の basic cell space は、この議論は北川 [2], [4]  
 を参考。 セル空間  $C$  の中のすべての可能な basic cell  
 space  $C$  を番号を付ける。 たとえば  $\{B_i; i=1, 2, \dots, k\}$  と表す。

定義 2.2. 局所変換  $T_B : \{C(X)\} \rightarrow \{C(X)\}$

: 多数決原理より局所変換 (田名井・MT)

$$\Leftrightarrow \forall C(X) \\ T_{B_i} C(X) |_{B_i} = \begin{cases} 1 | B_i, & \text{if } S(X) > 2 \\ C(X) | B_i, & \text{if } S(X) = 2 \\ 0 | B_i, & \text{if } S(X) < 2, \end{cases}$$

$T = T^* L$ ,  $S(X)$  は,  $C(X) | B_i$  の各状態の和, 1, 0  
は, すべてのセルの状態が 1, 0 で 3 configurations  
ある。

### § 3. LMT 1: 3 configurations の遷移.

$N$  個のセルから  $n$  個のセル空間には,  $2^n$  個の可能 configurations  
がある, これがすべて LMT を適用すれば  $\in E$   
を得る. 3 configurations の遷移は 頂点の個数が  $2^N$  である  
から digraph を構成する。 = a graph = a digraph  
の構造について考察する。

定義 3.1.  $C(X)$  :  $C(Y)$  a direct descendant

$\Leftrightarrow C(X) \neq C(Y)$ , at least one  ${}^3B_i$ ;  $T_{B_i} C(Y) = C(X)$ .  
すなはち,  $C(Y)$  は direct ancestor である。

$\mathcal{U}$ : configurations の集合

$d(\mathcal{U})$  ( $a(\mathcal{U})$ ) :  $\mathcal{U}$  に含まれる configurations  
すべて a direct descendant (ancestor)  
の集合。

定義 3.2.  $C(X_n)$  :  $C(X_1)$  a descendant (ancestor)

$\Leftrightarrow \exists \{C(X_i)\} \quad i=2,3,\dots,n-1, \text{ s.t. } C(X_{i+1}) \in d(C(X_i))$   
 $(C(X_{i+1}) \in a(C(X_i))).$

$$d^{(0)}(c(x)) = c(x), \quad d^{\nu}(c(x)) = d(d^{\nu-1}(c(x))) \quad \nu=1,2,\dots$$

$$a^0(c(x)) = c(x), \quad a^{\nu}(c(x)) = a(a^{\nu-1}(c(x))) \quad \nu=1,2,\dots$$

定義 3.3.  $\mathcal{D}(c(x)) \equiv \sum_{\nu \geq 0} d^{\nu}(c(x)) : c(x) \text{ a descendant tree}$

$\mathcal{A}(c(x)) \equiv \sum_{\nu \geq 0} a^{\nu}(c(x)) : c(x) \text{ a ancestor tree}$

$$\mathcal{D}(\mathcal{U}) \equiv [\mathcal{D}(c(x)) : c(x) \in \mathcal{U}]$$

$$\mathcal{A}(\mathcal{U}) \equiv [\mathcal{A}(c(x)) : c(x) \in \mathcal{U}]$$

$$[\mathcal{A}, \mathcal{D}](\mathcal{U}) \equiv \mathcal{U} + \mathcal{A}(\mathcal{U}) + \mathcal{D}(\mathcal{U}) \equiv \mathcal{U}^{(1)}$$

$$\mathcal{U}^{(n)} \equiv [\mathcal{A}, \mathcal{D}](\mathcal{U}^{(n-1)}) \quad n \geq 1$$

$$\mathcal{U}^{(0)} \equiv \mathcal{U}$$

系  $\mathcal{U}^{(0)} \leqq \mathcal{U}^{(1)} \leqq \mathcal{U}^{(2)} \leqq \dots$

$$\exists n_0, \text{ s.t. } \mathcal{U}^{(n_0-1)} \not\leqq \mathcal{U}^{(n_0)} = \mathcal{U}^{(n_0+1)} = \dots$$

定義 3.4.  $L(\mathcal{U}) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{U}^{(n)} : \mathcal{U} \text{ a lineage tree}$

定義 3.5.  $c(x) : \text{stable} \Leftrightarrow d(c(x)) = \emptyset$

$T = T = L, \emptyset : \text{空集合}$

定義 3.6.  $c(x) : \text{isolated stable} \Leftrightarrow a(c(x)) = \emptyset$

$$d(c(x)) = \emptyset$$

定義 3.7.  $c(x) : \text{Eden's Garden} \Leftrightarrow a(c(x)) = \emptyset$

$$\#B_i, T_B, c(x) = c(x)$$

補助定理3.1. configuration  $C(X) \in \mathbb{Z}/2$

(i)  $\exists B_i$ , s.t.  $\sum_{x_j \in C(X)/B_i} x_j \equiv 1 \pmod{2} \rightarrow T_{B_i} C(X) \in d(C(X))$

$$\# C(X') = C(X), T_{B_i}(C(X')) = C(X)$$

(ii)  $\exists B_i$ , s.t.  $\sum_{x_j \in C(X)/B_i} x_j \equiv 0 \pmod{2} \rightarrow T_{B_i} C(X) = C(X)$

= a 權  $\sum_{B_i \in \mathcal{A}} (1) \text{スッセルの状態が } 1 \text{ で残る"ガ" 0 で"ア" 3 と},$

$$\# C(X') \text{ s.t. } T_{B_i} C(X') = C(X)$$

(2)  $\exists \alpha \in \mathbb{Z}/2$  で  $0 \neq \alpha \neq 1$  かつ  $\# C(X') = \alpha C(X)$

$$\exists \alpha \in C(X'), T_{B_i} C(X') = C(X)$$

$m \times n$  正方形セル空間の stable configurations  $\alpha$  - 種類  
的  $\Rightarrow$  は下図 1=1, 2=2 とする。  
 $\alpha$  stable configuration  $\Leftrightarrow (m_1 + m_2 + \dots + m_p) \times (n_1 + n_2 + \dots + n_q) \neq 1$  と

う。

$m_1$	$m_2$	$\dots$	$n_1$
0	I	$\dots$	0
I	0	$\dots$	I
:	:	$\dots$	:
I	0	$\dots$	I

$$\sum_{i=1}^p m_i = m, \sum_{j=1}^q n_j = n.$$

$$m_0 = \max_i \{m_i\}$$

$$n_0 = \max_j \{n_j\}$$

補助定理3.2.  $C(X)$  : isolated stable (SCIII [7])

$\Leftrightarrow C(X)$  は  $\alpha$  の  $\# C(X')$  で  $\alpha \neq 1$  。

$$(a) m_0 = n_0 = 1, \quad (b) m > m_0 \geq 2, \quad n_0 = 1$$

$$(c) m_0 = 1, \quad n > n_0 \geq 2.$$

補助定理 3.3.  $m \times n$  セル空間の isolated stable configurations の個数は  $2^m + 2^n - 6$  である。

補助定理 3.4.  $m \times n$  セル空間の stable configurations と Eden's Garden の個数は  $2^{m+n+1}$  である。

定理 3.1.  $m \times n$  セル空間の isolated stable は、  
任意の configuration  $C(X)$  は  $\exists t \in \mathbb{N}$ ,  $\forall x \in C(X)$  が  $\exists t' \in \mathbb{N}$ ,  $\forall x \in C(X)$  で  $t' < t$  かつ  $x \in C(X+t')$  である。  
すなはち、 $C(X)$  は適当な L.M.T. を通用する (すなはち、有限回で stable となる)。

定理 3.2. (参考 [7]).  $m \times n$  セル空間の isolated stable configurations を除く外の configurations は、  
 $\exists t \in \mathbb{N}$  で  $\forall x \in C(X)$  が  $\exists t' \in \mathbb{N}$ ,  $x \in C(X+t')$  である。

#### § 4. セル空間における決定部分空間

ある部分空間  $D$  がセル空間  $C$  の子集合で、 $D$  が subset として  $C$  の決定部分空間 (D.S.) であるためには十分条件を既知して D.S. を用いて求めよ。

定義 4.1. セル空間  $C$  の subset  $D$  が  $C$  の決定部分空間 (determinative subspace) である  
 $\Leftrightarrow \forall D(X), \exists^1 C(X) : \text{stable s.t. } C(X)/D = D(X)$   
 $\forall x \in C(X) \in D, D$  は configuration。

∴  $D(X) \sim C(X)$  とかく。

D.S. の存在、3.1 或 1.2 構成法等の論文 [3] を詳く述べ

る。

補助定理 4.1.  $D(0) \sim C(0), D(1) \sim C(1)$

( $\Leftarrow$ )

$C(0), C(1)$  : stable  $C(0)|D = D(0), C(1)|D = D(1)$

補助定理 4.2.  $D(X_i) \sim C(X_i) \quad i=1, 2, \dots, t$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^t D(X_i) \sim \sum_{i=1}^t C(X_i) \pmod{2}$$

セル空間  $C$  の各セルは番号で表す。1 ~  $N$ 。ただし  $i$  の

状態を  $X_i$  で表す。# $D = n$ ,  $D = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  とする。

$$D(X) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$$

$$D(X; i_k) = \{x_1, \dots, x_{i_k-1}, \overline{x_{i_k}}, x_{i_k+1}, \dots, x_m\}$$

$$T = T^{-1}, \overline{x_{i_k}} \equiv 1 - x_{i_k}$$

定義 4.3.  $E_D(i_k) (\subset C)$  :  $i_k$ -elementary subset w.r.t  $D$

$$\Leftrightarrow D(0; i_k) \sim C(X_k) \text{ とする}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

$$i \in E_D(i_k) \quad \text{if } x_i = 1$$

$$i \notin E_D(i_k) \quad \text{if } x_i = 0$$

$$T = T^{-1}, \quad x_i = C(X_k)|i. \quad \Rightarrow C(X_k) \in C(E_D(i_k)) \text{ とする}.$$

補助定理 4.3.  $\forall D(X), \forall i_k \in D, \quad D(X) \sim C(X)$

$$\rightarrow D(X; i_k) = C(X) + C(E_D(i_k)) \pmod{2}$$

$$(c) D(X; i_k) = D(X) + D(O; i_k)$$

補助定理 4.2 すなはち  $D(X; i_k) \sim C(X) + C(E_D(i_k))$

- 両辺に

補助定理 4.4.  $\forall D(X), D(X) \sim \sum_{k=1}^n x_{ik} C(E_D(i_k)) \text{ mod } 2$   
 $E_D(i_k), D(X) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

$$(c) D(X) = \sum_{i=1}^n x_{ik} D(O; i_k) \text{ mod } 2$$

$$\therefore D(X) \sim \sum_{k=1}^n x_{ik} C(E_D(i_k)) \text{ mod } 2$$

(注). 補助定理 4.3 すなはち  $i_k$  以外の  $D$  の各セルの状態を fix したとき、 $i_k$  の状態を、 $E_D(i_k)$  の任意のセルの状態が 1 または 0 に固定される  $\exists l \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i_k\}$  である。

$$A = \{j_l; l=1, 2, \dots, m\} \subset C : 1 \leq l \leq m$$

$A$  の各  $j_l \in A$  は互いに

$$E_k^{j_l} = \begin{cases} 1 & j_l \in E_D(i_k) \\ 0 & j_l \notin E_D(i_k) \end{cases} \quad k=1, 2, \dots, n$$

$$M_D(A) = \begin{pmatrix} E_1^{j_1} & E_2^{j_1} & \cdots & E_n^{j_1} \\ E_1^{j_2} & E_2^{j_2} & \cdots & E_n^{j_2} \\ \vdots & & & \\ E_1^{j_m} & E_2^{j_m} & \cdots & E_n^{j_m} \end{pmatrix} : m \times n \text{ matrix}$$

不導入  $\exists l$ .  $= a \text{ matrix } \in \mathbb{Z}^{m \times n}$  の定理 4.2 に従う。

定理 4.1.  $\forall D$  : given ( $C$  a D.S.)

$A = \{j_l; l=1, 2, \dots, n\} \subset C$  a D.S. で  $A$  は  $m$  行  $n$  列

件は,  $\text{rank } M_D(A) = n$  である。

( $\Leftarrow$ ) (必要性)  $D(X) = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}\}$

$$\text{補助定理 4.4.5: } D(X) \sim \sum_{k=1}^n x_{ik} C(E_D(i_k))$$

$$A(Y) = \{y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_m}\} = \sum_{k=1}^m x_{ik} C(E_D(i_k)) | A$$

$$\because y_{je} = e_1^{j_1} x_{i_1} + e_2^{j_2} x_{i_2} + \dots + e_n^{j_n} x_{i_n}$$

$$e = 1, 2, \dots, n.$$

$A \in D$  かつ D.S. であるから,  $\text{rank } M_D(A) = n$ .

(十分性)  $\text{rank } M_D(A) = n$  とする,

$D(X) \in A(Y) \Rightarrow \exists i_1, i_2, \dots, i_m \in \{1, 2, \dots, n\}$  で  $D$  は D.S.

である,  $A \in D, S$ . である。

## §5 正三角形セル空間の決定部分空間の大きさ

北川の論文[5]によると, "正三角セル空間に付けて注意の  
凸多角形(convex polygon) の決定部分空間の大きさは, その  
境界の頂点数に等しい" ことを証明された。  $\Rightarrow$   
節では, 一般の有限セル空間に付けると,  $\Rightarrow$  定理が成り立  
つことを証明する。

定義 5.1. セル空間  $U$ : connected to  $V$

$\Leftrightarrow$  at least one  $(u, v) \in U \cup V$ ,  $u$  は  $v$  と adjacent.

定義 5.2. セル空間  $U$ : connected

$\Leftrightarrow$   $W \subseteq U$ ,  $W$ : connected to  $(U-W)$  かつ  $W \neq U, \emptyset$

定義 5.3. セル空間  $\mathcal{V}$ : animal

$\Leftrightarrow \mathcal{V}$  : finite connected or  $\mathcal{V} = \bigcup_{i=1}^t V_i$ , i.e.  $\mathcal{V}$  is a  $n$ -row's animal.

任意の指是エレメント方向  $H$  は图 1-3 丁度  $n$ -row's animal と呼ぶ。以下次の記号を用いた。  $\mathcal{W}$  はセル空間とする。

$P(\mathcal{W})$  :  $\mathcal{W}$  の境界にあるすべてのセルの集合。

$D(\mathcal{W})$  :  $\mathcal{W}$  の中 D.S. に属すすべてのセルの集合。

$|\mathcal{W}|$  :  $\mathcal{W}$  に属すすべてのセルの個数。

定理 5.1 正三角形を単位セルとする任意の有限セル空間

$C$  は图 1-3  $C$  の次元部分空間の大きさは、 $C$  の境界にあるすべてのセルの個数に等しい, i.e.  $|P(C)| = |D(C)|$ .

(証明)

任意の有限セル空間は an animal であるか、又は異なる animals ( $C_i$ ,  $i=1, 2, \dots, t$ ) の集合である。後者の場合、各 animal の可能なすべての basic cell space の集合は、他の animal との干涉を無く互いに disjoint である。故に各 animal の D.S. が存在し、 $|P(C_i)| = |D(C_i)|$   $i=1, 2, \dots, t$  が証明される(?)。全体のセル空間  $C$  ( $= \sum_{i=1}^t C_i$ ) の D.S. の存在は明らかである、又  $|D(C)| = \sum_{i=1}^t |D(C_i)|$  及び  $|P(C)| = \sum_{i=1}^t |P(C_i)|$  が得られる。従って  $C$  が an animal の場合 (= 定理の証明可)

1.1が十分である。animal  $C$  1行3方向  $H$  は  $\mathbb{Z}^2$  の  $n$ -row animal であるとする。証明は row  $a$  数  $n = 71129$  数学的帰納法で行う。

(i)  $n = 1$ . 1-row animal は basic cell space  $\mathbb{Z}^2$  の 1 行の形で、 $D(C)$  は  $C$  の 1 行セルから成り、 $= 4$  は  $P(C)$  は他方でない。∴  $|D(C)| = |P(C)|$ .

(ii)  $n = r+1$ .  $r$ -row 以下の animal は  $\mathbb{Z}^2$ , 定理が成り立つと仮定する。この假定を元に,  $(r+1)$ -row animal は  $\mathbb{Z}^2$  証明する。 $(r+1)$ -row animal を  $C_{r+1}$  で表す。 $C_{r+1}$  は一番上位 1 行 3 row と残り  $r$  row ( $C_r$  で表わす) は分割する。假定する。

$$(i) |P(C_r)| = |D(C_r)|.$$

$A^{(r+1)} = \{R_i^{(r+1)}; i=1, 2, \dots, k_{r+1}\}; C_{r+1} - C_r \in \mathbb{Z}^2$  の 1-row animal の集合。

$A^{(r)} = \{R_j^{(r)}; j=1, 2, \dots, k_r\}; C_r - C_{r-1} \in \mathbb{Z}^2$  の 1-row animal の集合。

若  $R_i^{(r+1)}$  は  $\varnothing < R_i^{(r+1)} < 1$ ,  $\alpha A^{(r+1)}$  は属する animal は adjacent である。 $A_\ell^{(r+1)}$  は, 丁度  $\ell$  個の  $A^{(r)}$  の animal は adjacent である  $A^{(r+1)}$  の animal の集合となる。

$$A^{(r+1)} = A_1^{(r+1)} + A_2^{(r+1)} + \dots, A_\ell^{(r+1)} \cap A_{\ell+1}^{(r+1)} = \emptyset \quad (\ell \neq 0).$$

(A)  $\ell = 1$  の場合。

$R_i^{(r+1)} \in A_i^{(r+1)}$  & adjacent to 唯一の  $A^{(r)}$  animal  $\in R_{j_i}^{(r)}$  & 且し  $R_i^{(r+1)}$  の下  $<$  & 上  $>$  が  $R_j^{(r)}$  と 合成して 1つの basic cell space の 集合  $\in B_i$  である。  $R_i^{(r+1)}$  は  $\geq 2$  の 組合して disjoint な 部分  $R_{ii_1}^{(r+1)} \in R_{ii_2}^{(r+1)}$  は 分割して 3。

$$R_{ii}^{(r+1)} = \{ u : u \in B_i - R_{j_i}^{(r)}, \exists v \in R_{j_i}^{(r)}, u \text{ と } v \text{ は adjacent} \}$$

$$R_{ii}^{(r+1)} = R_i^{(r+1)} - R_{ii_1}^{(r+1)}$$

且し  $u \in R_{ii}^{(r+1)}$  は, one animal である,  $R_{ii}^{(r+1)}$  は one animal か two animals である。 = 分割の組合せ 3。

$$(2) |D(C_r + R_i^{(r+1)})| = |D(C_r + R_{ii_1}^{(r+1)})| + |D(R_{ii_2}^{(r+1)})|.$$

$$(3) |P(C_r + R_i^{(r+1)})| = |P(C_r + R_{ii_1}^{(r+1)})| + |P(R_{ii_2}^{(r+1)})|.$$

- す,  $R_{ii}^{(r+1)}$  は  $R_{j_i}^{(r)}$  と connect である 2,

$$(4) |D(R_{ii_2}^{(r+1)})| = |P(R_{ii_2}^{(r+1)})|.$$

$$S_i^{(r+1)} \equiv \{ u : u \in R_i^{(r+1)}, \exists v \in R_{j_i}^{(r)}, u \text{ と } v \text{ は adjacent} \}$$

$$T_i^{(r+1)} \equiv \{ u : u \in S_i^{(r+1)}, u \text{ が } R_{j_i}^{(r)} (\text{ は } R_{j_i}^{(r)} \text{ は 唯一 }) \text{ に接する } \}$$

次に 3 の場合の数を 3。

$$(A-I) |S_i^{(r+1)}| = |T_i^{(r+1)}|$$

$$(A-II) |S_i^{(r+1)}| = |T_i^{(r+1)}| + 1$$

$$(A-III) |S_i^{(r+1)}| = |T_i^{(r+1)}| + 2$$

(A-I) の場合, 次の式が得られる

$$(5) |P(C_r + R_{ii_1}^{(r+1)})| = |P(C_r)| + 1.$$

$$(6) |D(C_r + R_i^{(r+1)})| = |D(C_r)| + 1.$$

(1) ~ (6) より

$$(7) |D(C_r + R_i^{(r+1)})| = |D(C_r + R_i^{(r+1)})|.$$

以下  $\Rightarrow$  の方法を用いて (A-I), (A-II), (A-III) 及び (B)  $\ell=2$

(C)  $\ell \geq 3$  の場合に  $\Rightarrow$  の証明す。証明は論文 [6] を参照。次の系は “A 理工” で得られる。

系 任意の有限セル空間  $C$  ( $=$  3 行)  $|P(C)| = n^{\frac{1}{2}S(C)}$

$C$  の可能な stable configurations の個数は  $2^n$  の  $\ell$  倍である。

(31) Fig. 5.1 は 12-row animal である。 $|P(C)| = 45$ .

D.S. が 1 と 131 が 0 であることを示す。

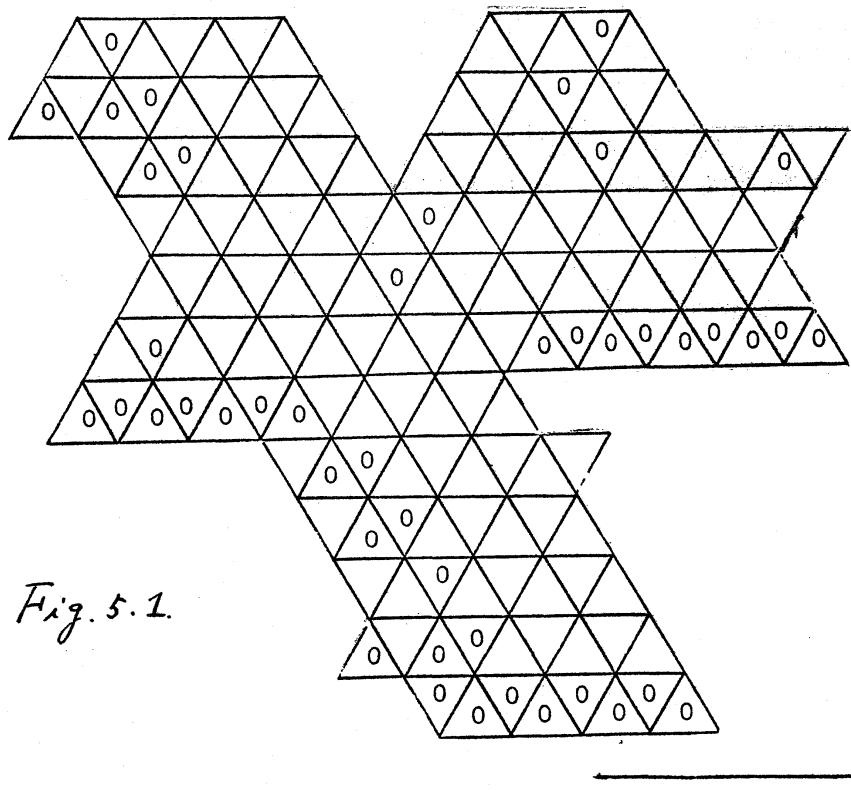


Fig. 5.1

## Reference

- [1] Kitagawa, T.: Cell Space Approaches in Biomathematics, Advances in Biophysics, Vol.5 (1972) (to appear).
- [2] Kitagawa, T.: Prolegmena to Cell Space Approaches, IV, RR. No.12, December, 1970; Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., Ser. A, 26, No.1 (1971).
- [3] Kitagawa, T. and Yamaguchi, M.: Determinative Subspace for Stable Configuration under Local Majority Transformations on Cell Space, VI, RR. No.15, December, 1970; Bull. Math. Stat., 15, No.3/4 (1973) (to appear).
- [4] Kitagawa, T.: The Second Prolegomena to Cell Space Approaches, VII, RR. No.16, December, 1970; Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., Ser. A, 26, No.1 (1971).
- [5] Kitagawa, T.: The Size of Generative Determinative Subspace of Convex Polygon in a  $\Delta^{(n)}$  Cell Space, IX, RR. No.18, January, 1972; Bull. Math. Stat., 15, No.3/4 (1973) (to appear).
- [6] Yamaguchi, M.: The Size of Determinative subspace of Polygon in Triangular Cell Space, XI, RR. No.21 (to appear).
- [7] Kitagawa, T.: Generative and Genealogical Classifications of all the Configurations in  $m \times n$  Cell Space under Applications of Local Majority Transformation, XIII, RR. No.23, March, 1972; Bull. Math. Stat., 15, No.1/2 (1972).