

双曲型混合問題に対する解の
解析性の伝播について

京産大理 辻 幹雄

§. 1, 序

quarter space $V = \{(t, x) \mid t > 0, x = (x', x_n), x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n > 0\}$

で次の様な双曲型混合問題を考えよ.

$$(1-1) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \left(\sum_{i=1}^n A_i(t, x) \frac{\partial}{\partial x_i} + B(t, x) \right) u(t, x) + f(t, x) \equiv L(t)u + f(t), (t, x) \in V \\ u(0, x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}_+^n \\ P(t, x') u(t, x) \Big|_{x_n=0} = 0 \end{cases}$$

ここで $A_i(t, x), B(t, x)$ は $N \times N$ 行列; $u(t, x)$ は N -vector;

$P(t, x')$ は $1 \times N$ 行列とする。この小論の目的は (1-1) に対

する解の解析性の伝播について或る結果を報告する事である

。解が \bar{V} で連続的微分可能であるための条件として compatibility condition を定義する。

[定義 1-1] $g(x)$ 及 $u^0 f(t, x)$ が $k=0, 1, \dots, m$ に対して

$$(1-2) \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} P^{(i)}(0, x') g_{k-i}(x) \Big|_{x_n=0} = 0$$

を満足するとき, g, f は order m の compatibility condition

を満たすという。ここで $g_k(x)$ は次の公式により順次構成する。

$$(1-3) \quad g_{k+1}(x) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} L^{(i)}(0) g_{k-i}(x) + \frac{\partial^k f}{\partial t^k}(0, x) \quad (k \geq 0)$$

$$\text{但し } g_0(x) = g(x); \quad L^{(i)}(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^i A_j}{\partial t^i}(t, x) \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial^i B}{\partial t^i}(t, x)$$

$$; \quad P^{(i)}(t, x) = \frac{\partial^i P}{\partial t^i}(t, x); \quad \binom{k}{i} = \frac{k!}{i! \cdot (k-i)!}.$$

今、 $A_i(t, x)$, $B(t, x)$ 及び $P(t, x)$ は analytic, 更に g, f も analytic 及び任意 order の compatibility condition を満足すると仮定すれば Cauchy-Kowalewski の定理より t が十分小的时候、 (t, x) に関し analytic な (1-1) の解が一意的に存在する事がわかる。ここで t を大きくしたとき、解析性が伝播するかどうかを論じる。このとき Cauchy-Kowalewski の定理を繰り返し使う事は成功しない。そこで次の事実を仮定する。

[仮定 1-1] $g(x) \in H^1(\mathbb{R}_+^n)$, $f(t, x) \in \mathcal{E}'_t(L^2) \cap \mathcal{E}^0_t(H^1)^{(*)}$ が order 0 の compatibility 条件を満たすとき $\mathcal{E}'_t(L^2) \cap \mathcal{E}^0_t(H^1)$ に入る (1-1) の解が一意的に存在し 次のエネルギー不等式が成立する。

$$(1-4) \quad \|u(t)\| \leq c_0 e^{\mu_0 t} \|g\| + d_0 \int_0^t e^{\mu_0(t-s)} \|f(s)\| ds$$

$$(1-5) \quad \| \|u(t)\| \|_1 \leq c_1 e^{\mu_1 t} \| \|u(0)\| \|_1 + d_1 \int_0^t e^{\mu_1(t-s)} \| \|f(s)\| \|_1 ds$$

ここで $\| \|u(t)\| \|_1 = \|u(t)\| + \|u'(t)\|$, $\|u\|_1$ は $H^1(\mathbb{R}_+^n)$ -norm ;

$\mu_0, \mu_1, c_0, c_1, d_0, d_1$ は u, g, f 及び t に無関係な正の定数。

[仮定 1-2] (1-1) は有限伝播速度をもつ。即ち或る正数 λ があり

(*) $u(t, x) \in \mathcal{E}'_t(F)$ とは $u(t, x)$ が F -valued function と L^2 m 回連続的微分可能であることを示す。

$C = \{(t, x) ; t \leq -\lambda |x|\}$ とおくと (1-1) の解 $u(t, x)$ の点 $(t, x) \in V$ における依存領域は $C + (t, x) = C_{(t, x)}$ に含まれる。

[仮定1-3] A_n は正則行列, $\text{rank } P = l$ (=定数) である。

上記の3つの仮定を満たす方程式系の例として $\square L(t)$ は対称系, $\text{Ker } P$ は L に対して maximal non-positive \square という class がある。この事実はこの小論の後半で概説する。

[仮定1-1], [仮定1-2], [仮定1-3] より (1-1) の解の regularity に関して、次の定理を得る。

[定理1] $g(x) \in H^m(\mathbb{R}_+^n)$, $f(t, x) \in \mathcal{E}_t^m(L^2) \cap \mathcal{E}_t^{m-1}(H^1) \cap \dots \cap \mathcal{E}_t^0(H^m)$ が order $(m-1)$ の compatibility 条件を満足するとき ($m \geq 2$), (1-1) の $\mathcal{E}_t^m(L^2) \cap \dots \cap \mathcal{E}_t^0(H^m)$ に属する解 $u(t, x)$ が一意に定まり、次のエネルギー不等式が成立する。

$$\|u(t)\|_k \leq C_k e^{\mu_k t} \|u(0)\|_k + d_k \int_0^t e^{\mu_k(t-s)} \|f(s)\|_k ds \quad (*)$$

ここで $k=0, 1, \dots, m$ 。但し, C_k, d_k, μ_k は正の定数。

これより g 及び u が C^∞ の任意 order の compatibility 条件を満足するならば、解も C^∞ である事がわかる。(当然 L の係数、及び P が C^∞ という仮定のもとで) 次は (1-1) の解の解析性の伝播についてこの定理を述べる。点 $(t_0, x_0) \in V$ をとり、錐 $C(t_0, x_0)$ と初期平面 $\{t=0\} \cap \bar{V}$ との共通部分を C_0 と記す。それと $A_i(t, x)$ $B(t, x)$ 及び $u^i(t, x)$ は $C(t_0, x_0) \cap V$ の近傍で analytic と仮定す

$$(*) \quad \|u(t)\|_k = \sum_{i=0}^k \left\| \frac{\partial^i u}{\partial t^i}(t) \right\|_{k-i}, \quad \|u\|_p \text{ は } H^p(\mathbb{R}_+^n)\text{-norm}$$

る。このとき次の定理を得る。

[定理1-2] $g(x)$ は C_0 の近傍で analytic, $f(t,x)$ は $C(t_0, x_0) \cap V$ の近傍で analytic, かつ g, f が任意 order の compatibility 条件を満足するならば解 $u(t,x)$ (t_0, x_0) で (t,x) に對して解析的である。

[定理1-1] の証明は [定理1-2] の証明から類推出来るので紙数の関係から省略する。

§. 2. The proof of Theorem 1-2

解 $u(t,x)$ は $C(t_0, x_0) \cap V$ の近傍で C^∞ である事が [定理1-1] からわかる。従って方程式 (1-1) を classical sense で微分する事が出来る。そして得られた偏導函数を順次評価する事により [定理1-2] を証明する。この際、以下のように $u(t,x)$ の一次変換を行う。

$$P(t,x) = {}^t [\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_l], \quad \vec{p}_i(t,x) = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{in})$$
 $i=1, \dots, l$ とおく。 $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_l$ を Schmidt の方法で直交化したものを $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_l$ とおく。 $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_l, \vec{e}_{l+1}, \dots, \vec{e}_N\}$ が C^N の正規直交系となる様にベクトル $\vec{e}_{l+1}, \dots, \vec{e}_N$ をとる。このとき \vec{e}_i ($l+1 \leq i \leq N$) は P が C^m ならば C^m , P が analytic なら analytic である様にとれる事に注意する。これらから unitary 行列 $T(t,x) = [\vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*, \dots, \vec{e}_N^*]$ を作る。そして $u = T v$ と一次変換を行うと境界条件は次の様になる。

$$P u = P T v = \begin{bmatrix} (\vec{p}_i, \vec{e}_j) \\ 1 \leq i, j \leq l \end{bmatrix} v.$$

($[(\vec{p}_i, \vec{e}_j)_{1 \leq i, j \leq l}]$ は $l \times l$ 正則行列。)

従って $P u|_{x_n=0} = 0$ は v に對する条件 $[E_l, 0] v|_{x_n=0} = 0$ と

同値になる。ここに E_l は $l \times l$ 単位行列がある。しかも T が z に z リーなので仮定はすべて保存される。従って v を改めて u とおき、 P を constant matrix とみなして議論を進めていく事にす。

(t_0, x_0) を中心、半径十分小の球 $D(t_0, x_0)$ をとる。

$$D = \left(\bigcup_{(t,x) \in D(t_0, x_0)} C_{(t,x)} \right) \cap V, \quad D_0 = \{t=0\} \cap \bar{D}$$

とおいたとき $A_i(t,x)$ ($i=1, \dots, n$), $B(t,x)$, $f(t,x)$ は D の近傍で、 $g(x)$ は D_0 の近傍でそれぞれ analytic とする様に $D(t_0, x_0)$ の半径を十分小さくとる。 $\alpha(t,x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ を D の近傍で恒等的に 1, かつ $\text{supp}[\alpha]$ が A_i, B 及び u, f が analytic とする更に、 $\alpha(x) = \alpha(0, x)$ とおくと $\text{supp}[\alpha(x)]$ が $g(x)$ が analytic とする様に $\alpha(t,x)$ をとる。次に D の近傍では $u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \dots$ に等しい $v, v_0, v_1, \dots, v_n, v_{ij}, \dots$ を構成する。 v の添数の中で "0" は $\frac{\partial}{\partial t} \equiv D_0$ に対応するものである事を注意しておく。従って v_0 は u に対応するものだから、 $\frac{\partial u}{\partial t} = D_0 u$ を近似するものがある。 $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ ($i=1, \dots, n$) とする。

0) $v(t,x)$ の構成

$$(2-1) \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = L(t)v + \alpha(t,x)f(t,x) \\ v(t_0, x) = \alpha(x)g(x) \\ P v |_{x_n=0} = 0 \end{cases}$$

の解を $v(t,x)$ とすると $v \in \mathcal{E}'_t(L^2) \cap \mathcal{E}'_t(H^1)$ かつ $v=u$ in D .

1) v_i ($i=0, 1, \dots, n$) の構成

(1-1) t, x' について微分すると

$$(2-2) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (D_i u) = L(t) (D_i u) + (D_i L)(u) + (D_i f)(t, x) \\ (D_i u)(0, x) = g_i \\ P(D_i u) |_{x_n=0} = 0 \quad (i=0, 1, \dots, n-1), \end{cases}$$

$$D_n u = A_n^{-1} \left[D_0 u - \sum_{i=1}^{n-1} A_i (D_i u) - f \right]$$

但し $g_i(x) = \frac{\partial g}{\partial x_i}$ ($i=1, \dots, n-1$), $g_0(x) = L(0)g + f(0, x)$.

従って $v_i(t, x)$ ($i=0, 1, \dots, n$) を次の連立方程式の解とする。

る。

$$(2-3) \begin{cases} \frac{\partial v_i}{\partial t} = L(t) v_i + \alpha(t, x) \left(\sum_{k=1}^n D_k A_k(t, x) v_k + \frac{\partial B}{\partial x_i} v \right) + \alpha(t, x) (D_i f) \\ v_i(0, x) = \alpha(x) g_i(x) \\ P v_i(t, x) |_{x_n=0} = 0 \quad (i=0, 1, \dots, n) \end{cases}$$

$$(2-3)' v_n = \alpha(t, x)^2 A_n^{-1} \left[v_0 - \sum_{i=1}^{n-1} A_i v_i - B v - f \right]$$

[仮定 1-1] と逐次近似法を適用する事により $v_i(t, x)$ ($i=0, 1, \dots, n$) は $E_t^1(L^2) \cap E_t^0(H^1)$ の元として一意的に求まり、又有限伝播の性質より $v_i(t, x) = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ in D なる事がわかる。

2) $v_{ij}(t, x)$ の構成

(1-1) に $D_i D_j$ ($0 \leq i, j \leq n-1$) を作用させる。

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (D_i D_j u) = L(t) (D_i D_j u) + (D_i L)(D_j u) + (D_j L)(D_i u) \\ \quad + (D_i D_j L) u + (D_i D_j f) \\ (D_i D_j u)(0, x) = g_{ij}(x) \\ P(D_i D_j u) |_{x_n=0} = 0 \end{cases}$$

$$D_i D_m u = A_n^{-1} \left[D_i D_0 u - \sum_{j=1}^{n-1} A_j (D_i D_j u) - B (D_i u) - (D_i L) u - D_i f \right],$$

従って $v_{ij}(t, x)$ は次の連立方程式の解とす。

$$(2-4) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} v_{ij} &= L(t) v_{ij} + \alpha(t, x) \left(\sum_{k=1}^n D_j A_k \cdot v_{ik} + \sum_{k=1}^n D_i A_k \cdot v_{jk} \right) \\ &+ \alpha(t, x) \sum_{k=1}^n D_i D_j A_k \cdot v_k + \alpha(t, x) D_i B \cdot v_j \\ &+ \alpha(t, x) D_j B \cdot v_i + \alpha(t, x) (D_i D_j B) \cdot v + \alpha(t, x) D_i D_j f \\ v_{ij}(0, x) &= \alpha(x) g_{ij}(x) \\ P v_{ij} |_{x_n=0} &= 0 \quad 0 \leq i, j \leq n-1, \end{aligned} \right.$$

$$(2-5) v_{in} = \alpha(t, x)^2 A_n^{-1} \left[v_{0i} - \sum_{j=1}^{n-1} A_j v_{ij} - \sum_{k=1}^n D_i A_k \cdot v_k - B v_i - D_i B \cdot v - D_i f \right].$$

3) $v_{i_1} \dots v_{i_m}(t, x)$ の構成

$D_{i_1} \dots D_{i_m} \Sigma$ (1-1) に作用させよ。 ($0 \leq i_1, \dots, i_m \leq n-1$)

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (D_{i_1} \dots D_{i_m} u) &= L(t) (D_{i_1} \dots D_{i_m} u) + \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^m D_{i_p} A_k [D_{i_1} \dots \hat{D}_{i_p} \dots D_{i_m} D_k u] \\ &+ \sum_{k=1}^n \sum_{p, q} D_{i_p} D_{i_q} A_k [D_{i_1} \dots \hat{D}_{i_p} \dots \hat{D}_{i_q} \dots D_{i_m} D_k u] + \dots \\ &+ \sum_{k=1}^n (D_{i_1} \dots D_{i_m} A_k) [D_k u] + \sum_{p=1}^m D_{i_p} B \cdot [D_{i_1} \dots \hat{D}_{i_p} \dots D_{i_m} u] \\ &+ \dots + D_{i_1} \dots D_{i_m} B \cdot [u] + D_{i_1} \dots D_{i_m} f \\ (D_{i_1} \dots D_{i_m} u)(0, x) &= g_{i_1 \dots i_m}(x) \quad \left(= \text{the initial value of} \right. \\ &\quad \left. D_{i_1} \dots D_{i_m} u(t, x) \right) \\ P (D_{i_1} \dots D_{i_m} u) |_{x_n=0} &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} D_{i_1} \dots D_{i_{m-1}} D_n u &= A_n^{-1} \left[D_0 D_{i_1} \dots D_{i_{m-1}} u - \sum_{k=1}^{n-1} A_k (D_{i_1} \dots D_{i_{m-1}} D_k u) \right. \\ &- \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^{m-1} D_{i_p} A_k (D_{i_1} \dots \hat{D}_{i_p} \dots D_{i_{m-1}} D_k u) - \dots - \sum_{k=1}^n D_{i_1} \dots D_{i_{m-1}} A_k (D_k u) \\ &- B (D_{i_1} \dots D_{i_{m-1}} u) - \dots - (D_{i_1} \dots D_{i_{m-1}} B) u - (D_{i_1} \dots D_{i_{m-1}} f)(t, x). \end{aligned}$$

従って $U_{i_1, \dots, i_m}(t, x)$ を次の様に定義する。

$0 \leq i_1, \dots, i_m \leq n-1$ のとき

(2-6)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} U_{i_1, \dots, i_m} &= L(t) U_{i_1, \dots, i_m} + \alpha(t, x) \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^m (D_{i_p} A_k) U_{i_1, \dots, \hat{i}_p, \dots, i_m, k} \\ &+ \alpha(t, x) \sum_{k=1}^n \sum_{p, q=1}^m (D_{i_p} D_{i_q} A_k) U_{i_1, \dots, \hat{i}_p, \dots, \hat{i}_q, \dots, i_m, k} + \dots \\ &\dots + \alpha(t, x) \sum_{k=1}^n (D_{i_1} \dots D_{i_m} A_k) U_k + \alpha(t, x) \sum_{p=1}^m (D_{i_p} B) U_{i_1, \dots, \hat{i}_p, \dots, i_m} \\ &+ \dots + \alpha(t, x) (D_{i_1} \dots D_{i_m} B) U + \alpha(t, x) D_{i_1} \dots D_{i_m} f \\ U_{i_1, \dots, i_m}(t_0, x) &= \alpha(x) g_{i_1, \dots, i_m}(x) \\ P U_{i_1, \dots, i_m} |_{x=0} &= 0 \end{aligned}$$

$\{i_1, \dots, i_m\} \ni n$ のとき

(2-7)

$$\begin{aligned} U_{i_1, \dots, i_{m-1}, n} &= \alpha(t, x)^2 A_n^{-1} \left[U_0 U_{i_1, \dots, i_{m-1}} - \sum_{k=1}^{n-1} A_k U_{i_1, \dots, i_{m-1}, k} \right. \\ &- \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^{m-1} D_{i_p} A_k U_{i_1, \dots, \hat{i}_p, \dots, i_{m-1}, k} - \dots - \sum_{k=1}^m D_{i_1} \dots D_{i_m} A_k U_k \\ &\left. - B U_{i_1, \dots, i_m} - \dots - (D_{i_1} \dots D_{i_m}) B \cdot U - (D_{i_1} \dots D_{i_m} f) \right] \end{aligned}$$

連立方程式 (2-6) (2-7) の解として $U_{i_1, \dots, i_m}(t, x)$ を決める。

次に [仮定 I-1] を用いて $U_{i_1, \dots, i_m}(t, x)$ を評価してゆく。

$$\phi_{m-l, l}(t) = \sum_{i_1, \dots, i_{m-l}=0}^{n-1} \| U_{i_1, \dots, i_{m-l}, \underbrace{n, \dots, n}_l}(t) \| \quad (l=0, 1, \dots, m)$$

とおく。

support of α が与えられた data はすべて analytic な α の様な評価式が成立する事がわかる。

$$\left| \alpha(t, x) D_{i_1} \dots D_{i_p} A_k \right| \leq p! a^p K \quad (k=1, \dots, n)$$

$$(2-8) \left\{ \begin{array}{l} |\alpha(t, x) D_{i_1} \dots D_{i_p} B| \leq p! a^p \cdot K \\ |\alpha(t, x) A_m^{-1}| \leq K \\ \|\alpha(t) D_{i_1} \dots D_{i_p} f(t)\| \leq p! a^p \cdot K \sigma \\ \phi_{m,0}(0) \leq m! p^m \cdot A \end{array} \right.$$

但し, a, p, K, A は正の定数, $M = [m_{ij}]$ は $N \times N$ 行列とすれば

$$\text{すなわち } |M| \stackrel{\text{def.}}{=} \sup_{i,j} |m_{ij}|, \quad \|M\| \text{ は 行列 norm } (= \sup_{\|u\|=1} \|Mu\|) \text{ と}$$

すれば σ は $\|M\| \leq \sigma |M|$ を満たす N へのみ依存する正の定数。

このとき次の Lemma が成立する。

[Lemma 2-1] μ_0, c_0, d_0, a, n, A 及び $\gamma_1 = K\sigma/2$ はすべて 1 より

大, かつ $p \geq 3 \cdot a n (1 + p_1)$, $p_1 = a n (1 + \gamma_1^2) \gamma_1 d_0 + \gamma_1^2$ とすれば

すなわち $\phi_{m,0}(t) + \phi_{m-1,1}(t)$ は $m \geq 1$ のとき次の不等式を満たす。

$$(2-9) \quad \phi_{m,0}(t) + \phi_{m-1,1}(t) \leq m! \left(p(1+t) e^{a n \gamma_1 (1 + \gamma_1^2) d_0 t} \right)^m 3 \cdot (1 + \gamma_1^2) c_0 A e^{\mu_0 t}$$

[証明] m に関して帰納法で示す。まず $v(t)$ を評価する。

(2-1) に [仮定 1-1] を適用すると

$$\|v(t)\| \leq c_0 e^{\mu_0 t} \|\alpha g\| + d_0 \int_0^t e^{\mu_0(t-s)} \|\alpha(s) f(s)\| ds \leq l_0 e^{\mu_0 t}$$

$$\text{こゝで } l_0 = c_0 A + d_0 \gamma_1 / 2 \mu_0 .$$

(2-3) より $i=0, 1, \dots, n-1$ のとき

$$\begin{aligned} \|v_i(t)\| &\leq c_0 e^{\mu_0 t} \|g_i\| + d_0 \int_0^t e^{\mu_0(t-s)} \left\{ \sigma \sum_{j=1}^n |\alpha D_i A_j| \cdot \|v_j\| \right. \\ &\quad \left. + \sigma |\alpha D_i B| \cdot \|v\| + \|\alpha D_i f\| \right\} ds \\ &\leq c_0 e^{\mu_0 t} \|g_i\| + a K \sigma d_0 \int_0^t e^{\mu_0(t-s)} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \|v_j\| + \|v\| + 1 \right) ds \end{aligned}$$

一方 (2-3)' より

$$\|V(t)\| \leq (\sigma K)^2 \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} \|U_j\| + \|V(t)\| + 1 \right\},$$

従って

$$\phi_{1,0}(t) \leq c_0 e^{M_0 t} \cdot \phi_{1,0}(0) + a n k \sigma d_0 \int_0^t e^{M_0(t-s)} \left\{ \phi_{1,0}(s) + \phi_{0,1}(s) + \|V(s)\| + 1 \right\} ds,$$

$$\phi_{0,1}(t) \leq (\sigma K)^2 \left\{ \phi_{1,0}(t) + \|V(t)\| + 1 \right\},$$

これから $m=1$ に対する (2-9) が得られる。

次に $(m-1)$ まで (2-9) が成立すると仮定し、 m のとき (2-9) が成立することを示す。(2-6) から $0 \leq i_1, \dots, i_m \leq n-1$ のとき

$$\begin{aligned} \|v_{i_1 \dots i_m}(t)\| &\leq c_0 e^{M_0 t} \|v_{i_1 \dots i_m}(0)\| + d_0 \int_0^t e^{M_0(t-s)} \left[\right. \\ & a k \sigma \sum_{\hat{p}} \sum_{\hat{q}} \|v_{i_1 \dots \hat{i}_p \dots \hat{i}_q \dots i_m}\| + 2! a^2 k \sigma \sum_{\hat{k}} \sum_{\hat{p}, \hat{q}} \|v_{i_1 \dots \hat{i}_p \dots \hat{i}_q \dots i_m}\| \\ & + \dots + m! a^m k \sigma \sum_{\hat{k}} \|v_{\hat{k}}\| + a k \sigma \sum_{\hat{p}} \|v_{i_1 \dots \hat{i}_p \dots i_m}\| \\ & \left. + \dots + m! a^m k \sigma \|V(s)\| + m! a^m k \sigma \right] ds, \end{aligned}$$

これより $i_1 \dots i_m = 0$ かつ $n-1$ まで加えると

$$\begin{aligned} (2-10) \quad \phi_{m,0}(t) &\leq c_0 e^{M_0 t} \phi_{m,0}(0) + d_0 \gamma_1 \int_0^t e^{M_0(t-s)} \left[m! (a n)^m (1 + \|V(s)\|) \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^m k! (a n)^k \binom{m}{k} (\phi_{m+1-k,0}(s) + \phi_{m-k,1}(s)) \right] ds \end{aligned}$$

(2-7) より

$$\begin{aligned} \|v_{i_1 \dots i_{m-1}, n}(t)\| &\leq K \sigma \left\{ \|v_{i_1 \dots i_{m-1}}\| + K \sigma \sum_{\hat{k}=1}^{m-1} \|v_{i_1 \dots i_{m-1}, \hat{k}}\| + \dots \right. \\ & \dots + (m-1)! a^{m-1} K \sigma \sum_{\hat{k}=1}^m \|v_{\hat{k}}\| + K \sigma \|v_{i_1 \dots i_{m-1}}\| \\ & \left. + a K \sigma \sum_{\hat{p}=1}^{m-1} \|v_{i_1 \dots \hat{i}_p \dots i_{m-1}\| + \dots + (m-1)! a^{m-1} K \sigma \|V(s)\| \right. \\ & \left. + (m-1)! a^{m-1} K \sigma \right\}. \end{aligned}$$

$i_{m-l+1} = \dots = i_{m-1} = n$ とおき、 i_1, \dots, i_{m-l} により $0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_{m-l} \leq n-1$ なる事により次の不等式が得られる。

$$(2-11) \quad \phi_{m-l, l}(t) \leq \gamma_1^2 \left\{ \phi_{m-l+1, l-1}(t) + \sum_{k=1}^{m-l} k! \binom{m-l}{k} (an)^k \sum_{i=0}^k \phi_{m-k-l, i}(t) + (m-l)! (an)^{m-l} \cdot (1 + \|u\|) \right\},$$

(2-10) 及び $l=1$ のときの (2-11) を u につける事により一般の m に対し (2-9) が成立する事がわかる (証明)。

l に関する帰納法により (2-11) から次の不等式を得る。

$$(2-12) \quad \phi_m(t) = \sum_{i_1, \dots, i_m=0}^n \|u_{i_1, \dots, i_m}\| = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \phi_{m-k, k} \leq m! p_0^m \cdot A_0$$

$$p_0 = 2(1+3\gamma_1^2) p(1+t) e^{an\gamma_1(1+\gamma_1^2)t}, \quad A_0 = 3(1+\gamma_1^2) C_0 A e^{\text{Not}}$$

(4-12) より $D_{i_1} \dots D_{i_m} u$ の maximum norm の評価をする。

そのとき Sobolev の Lemma を少し変形して使う。 $U \subset V$ を (t_0, x_0) の近傍で $U \subset D$ とする。 $\beta(t, x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$ を $\beta \equiv 1$ on U かつ $\text{supp}[\beta] \subset D$ とする。 $B = \text{supp}[\beta]$ とかくなら Sobolev の Lemma

$$\text{より} \quad \sup_U |u(x)| \leq \sup_B |\beta u| \leq C \sum_{|\nu| \leq [\frac{n+1}{2}] + 1} \|D^\nu u\|_{L^2(B)}$$

となる。 C は β と n により depend する正の定数。

一方、 $u_{i_1, \dots, i_m} = D_{i_1} \dots D_{i_m} u$ in anbd of D なるので

$$\begin{aligned} \sum_{i_1, \dots, i_m} \sup_U |D_{i_1} \dots D_{i_m} u| &\leq C \sum_{i_1, \dots, i_m} \sum_{|\nu| \leq [\frac{n+1}{2}] + 1} \|D^\nu u_{i_1, \dots, i_m}\|_{L^2(B)} \\ &\leq \text{const.} \sum_{i_1, \dots, i_m, i_{m+1}, \dots, i_{m+[\frac{n+1}{2}] + 1}} \|u_{i_1, \dots, i_m, i_{m+1}, \dots, i_{m+[\frac{n+1}{2}] + 1}\|_{L^2(B)} \\ &\leq \text{const.} (m + [\frac{n+1}{2}] + 1)! p_1^{m + [\frac{n+1}{2}] + 1} \cdot A' \end{aligned}$$

従って u は (t_0, x_0) で (t, x) に関して analytic である (証明)

§.3. Symmetric hyperbolic systems

$A_i(t, x)$ ($i=1, \dots, n$) が Hermitian 行列, かつ A_n は正則行列であり, $\text{Ker } P$ は $L(t)$ に対し $\text{maximal non-positive}$, 即ち $-A_n(t, x, 0)$ が非正となる C^N の subspace の中で極大のものであるならば, この方程式系は [仮定1-1], [仮定1-2], [仮定1-3] を満足する事を証明する。

§.2 の証明の所々触れた様に $P(t, x)$ は [Eq. 0] と思ひ議論を進めていく。係数は $C^m(V)$ (m は十分大) に属すると仮定しておく。

① L が t に independent のとき

L の $L^2(\mathbb{R}_+^n)$ での定義域 $\mathcal{D}(L)$ を $\{u(x) \in H^1(\mathbb{R}_+^n); P u|_{x_n=0} = 0\}$ の graph norm $\|Lu\| + \|u\|$ による closure とすれば, Lax and Phillips [2] の結果より L は $L^2(\mathbb{R}_+^n)$ での或る semi-group $\{T(t)\}$ の生成作用素となる。これより $g \in \mathcal{D}(L)$, $f(t, x) \in E_t^1(L^2)$ のとき $E_t^1(L^2) \cap \mathcal{D}(L)$ に入る (1-1) の解 $u(t, x)$ が次の様に一意に決まる,

$$(3-1) \quad u(t, x) = T(t)g + \int_0^t T(t-s)f(s) ds$$

従って x -方向に regularity を上げる事を論じる。(1-1) を x で形式的に微分したとき $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ ($i=1, \dots, n$) を未知函数 v_i でおきかえて導かれる次の様な方程式を考へる,

$$(3-2) \quad \begin{cases} \frac{\partial v_i}{\partial t} = L v_i + \sum_{k=1}^n \frac{\partial A_k}{\partial x_i} v_k + \frac{\partial B}{\partial x_i} u + \frac{\partial f}{\partial x_i} \\ v_i(0, x) = \frac{\partial g}{\partial x_i} \\ P v_i|_{x_n=0} = 0 \end{cases} \quad (i=1, \dots, n-1)$$

$$(3-3) \quad v_n = A_n^{-1} \left[\frac{\partial u}{\partial t} - B u - f - \sum_{k=1}^{n-1} A_k v_k \right]$$

$g \in H^2(\mathbb{R}^n)$, $f(t, x) \in \mathcal{E}_t^2(L^2) \cap \mathcal{E}_t^1(H^1)$ であり g, f が order 1 の compatibility 条件を満足するならば (3-1) より $u(t, x) \in \mathcal{E}_t^2(L^2) \cap \mathcal{D}(L)$. 従って逐次近似法により $\mathcal{E}_t^1(L^2)$ に入る (3-2), (3-3) の解 u_1, \dots, u_n が一意的に定まる。一方 $\frac{\partial u}{\partial x_i} = v_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) が Kajitani [1] と同様にして証明出来る。よってこのとき (1-1) の解 $u(t, x)$ は $\mathcal{E}_t^1(L^2) \cap \mathcal{E}_t^0(H^1)$ に入り (1-4), (1-5) のタイプの不等式及び n 次不等式を満足する。

$$(3-4) \quad \| \| u(t) \| \|_{1,0} \leq e^{\mu_1 t} \| \| u(0) \| \|_{1,0} + d \int_0^t e^{\mu_1(t-s)} \| \| f(s) \| \|_{1,0} ds.$$

$$\text{where } \| \| u(t) \| \|_{1,0} = \| u'(t) \| + \sum_{j=1}^{n-1} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j}(t) \right\|.$$

次に g, f に対する仮定を弱める。従って $g(x) \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{D}(L)$, $f(t, x) \in \mathcal{E}_t^1(L^2) \cap \mathcal{E}_t^0(H^1)$ とする。 $g_m \in H^2(\mathbb{R}^n)$, $f_m \in \mathcal{E}_t^2(L^2) \cap \mathcal{E}_t^1(H^1)$ かつ g_m, f_m は order 1 の compatibility 条件を満足し $g_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} g$ in $H^1(\mathbb{R}^n)$, $f_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} f$ in $\mathcal{E}_t^1(L^2) \cap \mathcal{E}_t^0(H^1)$ となる数列 g_m, f_m が存在する。 g_m, f_m に対する (1-1) の解を $u_m(t, x)$ とすれば (1-5) のタイプのエネルギー不等式より $u_m(t, x)$ は $\mathcal{E}_t^1(L^2) \cap \mathcal{E}_t^0(H^1)$ の収束列となる。その極限函数を $u(t, x)$ とすると u は明らかに $\{g, f\}$ に対応する (1-1) の解で [A.1-1] を満足する。

[2] L が t に depend するとき。

$g(x) \equiv 0$, $f(t, x) \in \mathcal{E}_t^1(L^2) \cap \mathcal{E}_t^0(H^1)$ かつ $f(0, x) \equiv 0$ のとき [A.1-1] の事実が成立すると仮定する。すると $g(x) \in H^2(\mathbb{R}^n)$, $f(t, x) \in \mathcal{E}_t^2(L^2) \cap \mathcal{E}_t^1(H^1) \cap \mathcal{E}_t^0(H^2)$ かつ g, f が order 1 の compatibility 条件を満足すると仮定すれば $v(t, x) = u(t, x) - g(x) - t(L(0)g + f(0, x))$

は次の方程式を満足する。

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = L(t)v + F(t,x) ; & F \in E_t^1(L^2) \cap E_t^0(H^1), & F(0,x) \equiv 0, \\ v(0,x) = 0 \\ P v |_{x_n=0} = 0 \end{cases}$$

従って最初の仮定より $v(t,x) \in E_t^1(L^2) \cap E_t^0(H^1)$ が一意的に定まる。これより g, f に対応する (1-1) の解 $u(t,x) \in E_t^1(L^2) \cap E_t^0(H^1)$ が求まる。解が $E_t^1(L^2) \cap E_t^0(H^1)$ に入ると boundary 条件が maximal non-positive なので (1-4), (1-5) のタイプの不等式を満足する事は確かである。この事実より $g \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{D}(L)$, $f \in E_t^1(L^2) \cap E_t^0(H^1)$ と g, f の仮定を弱める事は易しい。方法はこの §. の II で述べたのと同様なので省略する。故に一般性を失う事なく $g \equiv 0$, $f(t,x) \in E_t^1(L^2) \cap E_t^0(H^1)$, $f(0,x) \equiv 0$ と仮定する。このとき $E_t^1(L^2) \cap E_t^0(H^1)$ に入る解 $u(t,x)$ が存在する事を証明する。

Cauchy の折線により示す。 $\Omega = [0, T] \times \mathbb{R}^n$ とおく。

$[0, T]$ の m 等分割 $\Delta_m : 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = T$ に対し次の様に Cauchy の折線 $u_m(t,x)$ を構成する。

$u_{m,i}(t,x)$ は ($i \geq 1$) $[t_{i-1}, t_i]$ で def. された次の方程式の解とする。このとき $u_{m,0}(t_0) = g(x)$ である。

$$(3-5) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u_{m,i}(t,x) = L(t_{i-1}) u_{m,i} + f(t,x) \\ u_{m,i}(t_{i-1}) = u_{m,i-1}(t_{i-1}) \\ P u_{m,i} |_{x_n=0} = 0 \end{cases}$$

$$u_m(t, x) = u_{m,i}(t, x) \quad t \in [t_{i-1}, t_i] \quad (i=1, \dots, m)$$

と定める。 $u_m \in E_t^0(H^1)$, $u_m \in E_t^1(L^2)$ ($t \neq t_i$) である事がすぐわかる。不等式(3-4)を各 $u_{m,i}(t, x)$ に適用し、これを合成して「 ϵ 」事により $\{u_m(t, x)\}$ は $H^1(\Omega)$ の有界列となる事がわかる。従ってもし必要あるは部分列をとる事により $\{u_m(t, x)\}$ は $H^1(\Omega)$ のある函数 $u(t, x)$ に弱収束する事がわかる。

よって $u(t, x)$ は次の方程式を満たす。

$$(3-6) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u = L(t)u + f & \text{in } L^2(\Omega) \\ u(0, x) = g(x) \equiv 0 & \text{in } L^2(\mathbb{R}_+^n) \\ Pu|_{x_n=0} = 0 & \text{in } H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_+^1 \times \mathbb{R}^{n-1}). \end{cases}$$

$$\text{一方 } \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \|u_m\|_{H^1(\Omega)} \quad \text{なので}$$

$$(3-7) \quad \int_{(0, \delta) \times \mathbb{R}_+^n} |u(t, x)|^2 dt dx \leq \text{const. } \delta^2$$

この $u(t, x)$ が $E_t^1(L^2)$ 、 $E_t^0(H^1)$ に入る事は mollifier とエネルギー不等式により証明する。

$$p(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1), \text{ supp}[p] \subset (-2, -1), \int p(t) dt = 1, \quad p_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon} p\left(\frac{t}{\epsilon}\right)$$

$$\varphi_\epsilon(t, x') = p_\epsilon(t) \cdot \prod_{j=1}^{n-1} p_\epsilon(x_j) \quad \text{とおき } \varphi_\epsilon \text{ と } u \text{ の合成積を}$$

$u_\epsilon(t, x)$ とおく。 ($0 < \epsilon < \epsilon_0/2$, ϵ_0 は十分小さな正の定数)

$u_\epsilon(t, x) \in E_t^\infty(H^1)$, $t \in [0, T - \epsilon_0]$ であり、更に、

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} = L(t)u_\epsilon + f_\epsilon + C_\epsilon u \\ u_\epsilon(0, x) = g_\epsilon(x) \\ Pu_\epsilon|_{x_n=0} = 0 \end{cases},$$

where $C_\varepsilon u = [\varphi_{\varepsilon(t,x)}^*, L(t)] u$, $g_\varepsilon(x) = \int \varphi_\varepsilon(s, y') u(-s, x'-y', x_n) ds dy'$

これより次のエネルギー不等式が得られる。

$$(3-8) \quad \|u_\varepsilon(t) - u_{\varepsilon'}(t)\|_{1,0} \leq e^{M_1 t} \|u_\varepsilon(0) - u_{\varepsilon'}(0)\|_{1,0} \\ + \text{const.} \int_0^t e^{M_1(t-s)} \left\{ \|f_\varepsilon(s) - f_{\varepsilon'}(s)\|_{1,0} + \|C_\varepsilon u - C_{\varepsilon'} u\|_{1,0} \right\} ds$$

$$(3-9) \quad \|u_\varepsilon(t) - u_{\varepsilon'}(t)\|_1 \leq \text{const.} \|u_\varepsilon(t) - u_{\varepsilon'}(t)\|_{1,0} \\ + \text{const.} \left\{ \|f_\varepsilon(t) - f_{\varepsilon'}(t)\| + \|C_\varepsilon u(t) - C_{\varepsilon'} u(t)\| \right\}.$$

(3-7) より $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u_\varepsilon(0)\|_{1,0} = 0$ である。又 (3-8), (3-8)' の右辺に表われる他の量も $\varepsilon, \varepsilon' \rightarrow 0$ のとき 0 に収束する事がすぐわかる。従って $u_\varepsilon(t, x)$ は $\varepsilon \rightarrow +0$ のとき $E_t^1(L^2) \cap E_t^0(H^1)$ での収束となる事がわかる。その極限函数が $u(t, x)$ となる事は明らか。よって L が t に depend する場合も [A.1-1] は成立する。

[A.1-2] 即ち伝播速度が有限である事はまだ証明していないが、方法は双曲型 Cauchy 問題の場合をそのまま適用すれば出来るのではないかと思われる。(終)

参考文献

- [1] K. Kajitani ; First Order hyperbolic systems : Jour. Mathe. Kyoto Univ. 11
- [2] Lax and Phillips : Local boundary conditions for dissipative symmetric systems ; C. P. A. M. vol. 13 (1960) p. 427-455
- [3] S. Mizohata. : Analyticity of solutions of hyperbolic systems, C. P. A. M. 14
- [4] M. Ikawa : A mixed problems for hyperbolic equations ----
Publ. R. I. M. S., Kyoto Univ. vol 5, p. 119-147.