

# Boltzmann 方程式の解の 存在と一意性について

広島大 理 田中 洋

§ 1 序. この報告では Boltzmann 方程式の解の存在と一意性  
に關し, すでに得られてゐる主要結果について簡単に紹介を  
行ひ, 次に Maxwellian gas の場合の確率微分方程式によ  
る取扱ひについて述べる. 先づ方程式の形から説明しよう.

空間  $R^3$  内に互いに衝突 (binary collision) するが運動  
してゐる  $N$  個の (気体) 分子があるとす (  $N$  は十分大 ). 時  
刻  $t$  における位置が  $d\zeta$ , 速度が  $d\alpha$  の範囲にある分子数を  
 $N u(t, \zeta, \alpha) d\zeta d\alpha$  とすると Boltzmann 方程式は

$$(1) \quad \frac{\partial u(t, \zeta, \alpha)}{\partial t} + (\alpha, \nabla_{\zeta} u) + (F(\zeta), \nabla_{\alpha} u) = B[u]$$

と書かれる. ところで  $x \in R^3$  の関数  $u(x)$  に対し

$$(2) \quad B[u] = \text{const.} \int_{S^2 \times R^3} \{u(x^*)u(y^*) - u(x)u(y)\} |x-y| Q(|x-y|, \theta) \sin \theta \, d\theta d\psi dy$$

で, (1) の右の  $B[u]$  は  $u(t, \zeta, \alpha)$  を  $x$  の関数と見て  $B$  を得る

としたものである。関数  $Q (\geq 0)$  は分子間の力 (pair forces だけ) により定まるもので differential collision cross-section と呼ばれる。  $F$  は outside potential から定まる外力である。速度  $x$  を持つ分子が速度  $y$  を持つ分子に近づく collision を起した結果、速度がそれぞれ  $x^*, y^*$  になったとする。このとき  $x^*, y^*$  は常に  $x, y$  を直径の両端とする球面上にあり、かつこの球に対するある直径の両端に落ちている。  $\theta$  はベクトル (直径)  $x-y$  と  $x^*-y^*$  とのなす角である、即ち  $\theta$  は  $x$  を北極、  $y$  を南極と見たときの  $x^*$  の colatitude であり、  $0 \leq \theta < \pi$ 。  $\psi$  は  $x^*$  の longitude を表わし、  $0 \leq \psi < 2\pi$  である。  $x, y$  を定めると  $\psi = 0$  の位置は適当に決めておく (したがって、  $x^*, y^*$  は  $x, y, \theta, \psi$  の関数に落ちている)。

2つの分子がある一定の距離以上はなれていなければ interaction がないという場合を cut-off とする。 cut-off があることと、 total collision cross-section  $\int_{S^2} Q \sin \theta d\theta d\psi$  が有限であることは同等である。外力  $F$  が 0 であり  $u(t, \mathbf{r}, x)$  が位置  $\mathbf{r}$  に無関係の場合、即ち  $u = u(t, x)$  の方程式が  $\frac{\partial u}{\partial t} = B[u]$  の場合を空間的に一様の場合とする。

3つの典型的な場合をあげておく。

1° gas of hard balls の場合。これは  $Q = \text{const.} > 0$  の場合であり、(2) の  $B[u]$  は次のようにも表わされる:

$$(3) \quad B[u] = \text{const.} \int_{S^2 \times R^3} \{u(x^*)u(y^*) - u(x)u(y)\} |(y-x, l)| dl dy$$

ここで  $dl$  は  $S^2$  上の uniform measure  $\tau$ ,

$$x^* = x + (y-x, l)l, \quad y^* = y - (y-x, l)l.$$

2° Maxwellian gas. 分子間に距離の 5 乗に反比例する斥力を持つ場合  $\tau$ ,  $Q$  は次のように  $\tau$  になる.

$$\begin{aligned} |x-y| Q(|x-y|, \theta) &= Q_M(\theta) \quad (\theta \text{ は } \tau \text{ の角数}) \\ &= \text{const.} \frac{(\cos 2\phi)^{\frac{5}{2}}}{\sin \theta \sin 2\phi \{ \cos^2 \phi K(\sin \phi) - \cos 2\phi E(\sin \phi) \}} \\ &\sim \text{const.} \theta^{-\frac{5}{2}}, \quad \theta \downarrow 0. \end{aligned}$$

ここで  $\phi$  は  $\frac{\pi-\theta}{2} = (\cos 2\phi)^{\frac{1}{2}} K(\sin \phi)$  であるから  $\tau$ ;

$K(x), E(x)$  はそれぞれ第 1 種, 第 2 種の complete elliptic integrals である.  $Q_M(\theta)$  は  $\theta$  の単調減少関数で  $Q_M(\pi) > 0$ . (Uhlenbeck & Ford [1] の Chapter IV 参照).

3° Maxwellian gas with cut-off. これは  $|x-y| Q(|x-y|, \theta)$  が  $\theta$  は  $\tau$  の関数  $Q(\theta)$  になる  $\tau$  あり,  $\tau$  total collision cross-section が有限の場合がある.

§ 2. Maxwellian gas with cut-off. 空間的に一様な場合  $\tau$  取扱う. (2) における const. は省略して次の方程式を考へる.

$$(4) \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \int_{S^2 \times R^3} \{u(t, x^*)u(t, y^*) - u(t, x)u(t, y)\} Q(\theta) \sin \theta d\theta d\psi dy$$

$\therefore \exists ! Q(\theta) \geq 0$   $\because \int_0^\pi Q(\theta) \sin \theta d\theta < \infty$   $\exists$  である。2つと3は  
 初期条件  $u(0, x) = f(x)$  ( $f \geq 0, \int f dx = 1$ ) のもとで、  
 (4)の解  $u(t, x)$   $\exists$   $u(t, x) \geq 0, \int u(t, x) dx = 1$   $\exists$   $\forall t \geq 0$   
 $\exists$  unique に存在する。いま  $u(t, \Gamma) = \int_\Gamma u(t, x) dx, \Gamma \in \mathcal{B}(R^3)$   
 とおくと、(4)は

$$(5) \frac{\partial u(t, \Gamma)}{\partial t} = \int_{R^3 \times R^3} \{ \pi(x, y, \Gamma) - \delta(x, \Gamma) \} u(t, dx) u(t, dy)$$

とある。 $\therefore \exists !$

$$\begin{cases} \int \delta = 2\pi \int_0^\pi Q(\theta) \sin \theta d\theta \\ \pi(x, y, \Gamma) = \frac{1}{\delta} \int_{S^2} \delta(x^*, \Gamma) Q(\theta) \sin \theta d\theta d\psi \end{cases}$$

$R^3$ 上の2つの確率測度  $u, v$  に対し、確率測度  $u * v$   $\exists$

$$(u * v)(\Gamma) = \int_{R^3 \times R^3} \pi(x, y, \Gamma) u(dx) u(dy)$$

により定義すると、 $u$  の "prob. measure"  $\exists$  である  $\Rightarrow$  "条件の下で"

$$u'(t) = \delta \{ u(t) * u(t) - u(t) \}$$

と書くととが出来る。これは容易に解くととが出来る。

$f$  (= 確率測度)  $\exists$  initial data とする解は

$$(b) u(t) = e^{-\delta t} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-\delta t})^{n-1} \sum_{\tau \in T_n} |\tau| f_\tau \quad (\text{Wild's sum})$$

び与えられる。  $f$  が density として  $u(t)$  を与えている。  
 記号  $\tau, |\tau|, f_\tau, T_n$  の意味は次の通り: integer  $n \geq 1$  の complete partitions の全体を  $T_n$  とする;  $T_n$  は次のように定義される。  
 $T_1$  は唯一つの要素から成るものとし,  $T_1, \dots, T_{n-1}$  は定義されたとす

$$T_n = \left\{ \tau = (\tau_1, \tau_2) \mid \tau_1 \in T_{n_1}, \tau_2 \in T_{n_2}, n_1 + n_2 = n \right\}$$

と定義する。そして  $|\tau|$  および  $f_\tau$  は

- i)  $\tau \in T_1$  ならば  $|\tau| = 1, f_\tau = f$
- ii)  $\tau = (\tau_1, \tau_2) \in T_n$  ならば  $|\tau| = \frac{|\tau_1| + |\tau_2|}{n-1}, f_\tau = f_{\tau_1} * f_{\tau_2}$  により定義する。

方程式(5)は次のように一般の形に与えられたと見られる。  
 空間  $R^3$  を一般の空間  $Q$  (diff. collision cross-section とは別) にし,  
 $\pi(x, y, \Gamma)$  を一般にし (ただし  $x, y \in Q$  を固定したとき,  $\Gamma$  につき  $Q$  の上の確率測度), さらに  $g$  を  $x \in Q$  の関数  $g(x)$  にと  
 する。このようにする場合でも上記 Wild's sum (6) の一般化が可能  
 である ([6], [7]), さらに上野, 高橋氏により collisions の  
 様子を表現するよう無限粒子のマルコフ過程の構成や, 線  
 型化の問題 (interaction semigroup), 分枝マルコフ過程との  
 関係等が研究されている。これらについては上野 [7], 高橋  
 [9], 池田 [10, §5] を見られたい。

§3. Gas of hard balls の場合. 空間的一粒の場合に,

Carleman [3], Povzner [5] の研究がある.

1° Carleman の結果:  $f$  は

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \text{ continuous, } \int_{R^3} f(x) dx = 1 \\ f(x) \leq \frac{a}{(1+|x|^2)^\kappa}, \quad \kappa > 3, \text{ } a \text{ は定数} \end{cases}$$

とみたせば,  $f$  は初期値とす

$$(7) \quad \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \int_{S^2 \times R^3} \{u(t, x^*)u(t, y^*) - u(t, x)u(t, y)\} |(\gamma - x, l)| dl dy$$

の解  $u(t, x)$  は

$$0 \leq u(t, x) \leq \frac{\text{const.}}{(1+|x|^2)^\kappa}, \quad \int u(t, x) dx = 1$$

とみたすものが存在する. またこの解は unique である.

2° Povzner の結果: Povzner は modified spatially inhomogeneous の場合を扱っているが (もともとの意味での spatially inhomogeneous の場合は含まない — この解の場合の解の存在と一意性についてはわかっている), 227では空間的一粒の場合の結果を述べる. 前節と同様に  $u(t, \Gamma)$  を考へ

と (7) は

$$\frac{\partial u(t, \Gamma)}{\partial t} = \int_{S^2 \times R^3 \times R^3} |(\gamma - x, l)| \{ \delta(x^*, \Gamma) - \delta(x, \Gamma) \} dl u(t, dx) u(t, dy)$$

とする.  $C_b(R^3)$  を  $R^3$  上の有界連続実数値関数の全体とし,

$\varphi \in C_b(\mathbb{R}^3)$  に対し  $u(t, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(x) u(t, dx)$  とおき, 方程式

$$(8) \quad \frac{\partial u(t, \varphi)}{\partial t} = \int_{S^2 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} |(y-x, l)| \{ \varphi(x^*) - \varphi(x) \} dl u(t, dx) u(t, dy), \quad \forall \varphi \in C_b(\mathbb{R}^3)$$

を考へる.  $\sim$  ま, mass, momentum, energy の保存とは  $u(t, \cdot)$  が  
 $\int u(t, dx) = \text{const.}, \int x u(t, dx) = \text{const.}, \int |x|^2 u(t, dx) = \text{const.}$   
 を意味するものとすると, Povzner の結果は次のようになる  
 ( $f$  は  $\mathbb{R}^3$  上の確率測度とする):

- (a)  $\int |x|^2 f(dx) < \infty$  ならば,  $f \in \text{initial data}$  とする (8) の解  
 $u(t, \cdot)$  は mass, momentum を保存するものが存在する.
- (b)  $\int |x|^3 f(dx) < \infty$  ならば,  $f \in \text{initial data}$  とする (8) の  
 解  $u(t, \cdot)$  は mass, momentum, energy を保存するものが存在する.
- (c)  $\int |x|^4 f(dx) < \infty$  ならば,  $f \in \text{initial data}$  とする (8) の  
 解  $u(t, \cdot)$  は mass, momentum, energy を保存し,  $\mu(t) = \int |x|^4 u(t, dx)$  が  
 $t$  の任意の有限区間で有界と存するものが存在する. またこのよう解は unique である.  
 もし  $f$  が density かつ  $u(t, \cdot)$  もそうである.

§4. マルコフ過程. 空間的に一様な gas of hard balls の  
 場合, Povzner の結果をもとにして次のことを証明することが出来る.

「初期分布  $f$  が  $\int |x|^4 f(dx) < \infty$  をみたすとき, §3(c) のべ

$T=0$  の unique solution  $\Sigma u(t, \cdot)$  とする.  $z$  のとき, 任意の  $x \in \mathbb{R}^3$  に対し,  $v(t, \Gamma)$   $\Sigma$  未知とする方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial v(t, \Gamma)}{\partial t} = \int_{S^2 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} |(y-x, l)| \left\{ \frac{\delta(y^*, \Gamma) + \delta(z^*, \Gamma)}{2} - \delta(x, \Gamma) \right\} dl v(t, dy) u(t, dz) \\ v(0, \Gamma) = \delta(x, \Gamma) \quad (y^* = y + (z-y, l)l, z^* = z - (z-y, l)l) \end{cases}$$

は unique 有解  $\Sigma$  あり,  $z$  あり  $\Sigma P_f(t, x, \Gamma)$  とするとき

$$\begin{cases} u(t, \Gamma) = \int_{\mathbb{R}^3} P_f(t, x, \Gamma) f(dx), \quad P_f(t, x, \mathbb{R}^3) = 1 \\ P_f(t+s, x, \Gamma) = \int_{\mathbb{R}^3} P_f(t, x, dy) P_{u(t)}(s, y, \Gamma) \end{cases}$$

が成り立つ。

このより, 次のようなマルコフ過程  $(\Omega, X(t, \omega), \mathcal{B}, P_f)$  が存在することになる:

- (i)  $X: [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  であり, 各  $\omega$  に対し  $X(t, \omega)$  は  $t$  の関数として step function である。
- (ii)  $\mathcal{B}_t = \sigma\{X(s, \omega) : 0 \leq s \leq t\}$ ,  $\mathcal{B} = \bigvee_t \mathcal{B}_t$  とするとき  $P_f$  は  $(\Omega, \mathcal{B})$  における確率測度であり,

$$P_f \{ X(t+s, \omega) \in \Gamma / \mathcal{B}_t \} = P_{u(t)}(s, X(t, \omega), \Gamma) \quad \text{a.s.}$$

ただし記号  $\sigma\{ \dots \}$  は  $\sigma$ -field の意味とする。このようにマルコフ過程は通常の (時間的一格点) マルコフ過程と異なる

もので McKean [4] によりはじめに導入されたものである。

§5. Maxwellian gas (without cut-off). この場合は空間的一様に限って解の存在一意性に関することは殆んどわかっていない。しかし、確率微分方程式を用いることにより、前節でのべたようなマルコフ過程を直接的に構成することが出来る。詳しいことはいずれ何らかの形で発表することにし、ここでは結果だけのおべておく。

$S = (0, 1) \times (0, \pi) \times [0, 2\pi)$  とし,  $S$  上の測度  $\lambda \in$

$$d\lambda = d\alpha \otimes Q_M(\theta) \sin \theta d\theta \otimes d\psi$$

により定める。  $f \in R^3$  上の確率分布で  $\int |x| f(dx) < \infty$  とする。

このとき、適当な確率空間  $(\Omega, \mathcal{B}, P)$  の上に

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{sub-}\sigma\text{-fields の増大族 } \{\mathcal{B}_t\}_{t \geq 0} \\ dt \otimes d\lambda \text{ に対応する } (0, \infty) \times S \text{ 上の Poisson 加法系 } \{p(A, \omega)\} \\ R^3\text{-valued process } \{X(t, \omega), 0 \leq t < \infty\} \end{array} \right.$$

と、次の (i) — (iv) をみたすように構成することが出来る。

(i)  $X(0, \omega)$  の分布 =  $f$

(ii)  $X(t, \omega)$  は右連続, 左極限をもつ,  $t$  を固定したとき  $\omega$  の関数として  $\mathcal{B}_t$ -可測。

(iii)  $\sigma\{p(A, \omega) : A \subset (0, t] \times S\} \subset \mathcal{B}_t$

$\sigma\{p(A, \omega) : A \subset (t, \infty) \times S\}$  と  $\mathcal{B}_t$  とは独立。

(iv) 確率空間  $(0, 1), \mathcal{B}(0, 1), dx)$  の上に定義された  $\mathbb{R}^3$ -valued process  $\{y(t, \alpha), 0 \leq t < \infty\}$  と  $\{x(t, \omega), 0 \leq t < \infty\}$  と同法則の  $t$  の  $\alpha$  を保存して

$$x(t, \omega) = x(0, \omega) + \int_{(0, t] \times S} \{x^*(x(s, \omega), y(s, \alpha), \theta, \psi) - x(s, \omega)\} p(ds d\alpha d\theta d\psi, \omega) \quad (\text{a.s.})$$

さらに、次の 2 とが成立する。

(v) 確率過程  $\{x(t, \omega), 0 \leq t < \infty\}$  の分布は  $f$  より unique に定まり、前節の意味でのマルコフ過程となる。

(vi)  $u(t, \cdot) \in \mathcal{X}(t, \omega)$  の分布とすると

$$\forall \varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^1, \in C^1, \text{supp}(\varphi) : \text{compact}$$

に対して

$$\frac{\partial u(t, \varphi)}{\partial t} = \int_{(0, \pi) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \{\varphi(x^*) - \varphi(x)\} Q_M(\theta) \sin \theta d\theta d\psi u(t, dx) u(t, dy)$$

(vii) (a) momentum が保存される:  $E\{x(t, \omega)\} = \text{const.}$

(b)  $\int |x|^2 f(dx) < \infty$  ならば energy が保存される:

$$E\{|x(t, \omega)|^2\} = \text{const.}$$

#### References

- [1] G. E. Uhlenbeck and G. W. Ford: Lectures in Statistical Mechanics, Amer. Math. Soc. 1963.  
 [2] E. Wild: On Boltzmann's equation in the kinetic theory of gases, Proc. Camb. Phil. Soc. 47(1951), 602-609.

- [3] T. Carleman; Problemes Mathematiques dans la Theorie Cinetiques des Gaz, Uppsala 1957.
- [4] H. P. McKean, Jr.: A class of Markov processes associated with nonlinear parabolic equations, Proc. Nat. Acad. Sci. 56(1966), 1907-1911.
- [5] A. Ya. Povzner: On Boltzmann's equation in the kinetic theory of gases, Mat. Sb. 58(1962), 63-86.
- [6] S. Tanaka: An extension of Wild's sum for solving non-linear equation of measures, Proc. Japan Acad. 44(1969), 884-889.
- [7] T. Ueno: A class of Markov processes with interaction I, II, Proc. Japan Acad. 45(1969), 348-353, 437-440.
- [8] H. Tanaka: Propagation of chaos for certain purely discontinuous Markov processes with interactions, J. Fac. Sci., Univ. of Tokyo, Sec. 1, 17(1970), 259-272.
- [9] Y. Takahashi: Markov semigroups with simplest interactions I, II, (to appear in Proc. Japan Acad.).
- [10] 池田信行: 確率過程と非線型方程式  
(数理学講義録106 非線型発展方程式とその近似理論)