

壁面が周期的な運動を有する場合の
ナビエ・ストークス方程式について

明治大学・工 森本浩子

はじめに

境界壁が動いている場合のナビエ・ストークス方程式は、藤田氏及び Sauer 氏によって研究され、Höpf クラスの弱解の存在が示されている。（Fujita-Sauer [3], [4], Fujita [2]）この小文では、境界壁が周期的な運動をしている時、同じ周期を持つ Höpf クラスの弱解が存在することを示す。与えられる境界条件及び外力は、もちろん壁の運動と同じ周期を持つものとする。証明の詳細については Moimoto [9] を見られたい。

境界が固定されている場合の周期的弱解の存在は、2次元の場合 Prodi [10], Lions [7] によって示された。m 次元の場合には、例えば Lions [8] Chap 4 を参照されたい。我々の場合も、彼らの方法を適用することは出来たが、境界条件が恒等的に 0 でないので、若干の工夫を要する。

§1. 壁の運動について

流体で充填されている器 $\Omega(t)$ は R^m ($m=2, 3$) の有界領域で、時間 t とともに、周期 $T (>0)$ で動いていふとする。 $\Omega(t)$ の境界を $\Gamma(t)$ 、
 $\hat{\Omega}_\infty = \bigcup_{-\infty < t < \infty} t \times \Omega(t)$, $\hat{\Gamma}_\infty = \bigcup_{-\infty < t < \infty} t \times \Gamma(t)$ とおく。
 各 t に於て、 $\Gamma(t)$ は滑らかな $m-1$ 次元超平面であるのみならず、 $\hat{\Gamma}_\infty$ も、後に述べる如く滑らかとする。 $\Omega(t)$ には島があつてもよいが、その数は常に一定で、消えたり、新たに現われたりはしないものとする。 すなはち

仮定 1.1

(i) $\Omega(t+T) = \Omega(t)$, $\Gamma(t+T) = \Gamma(t)$ があへての $t \in R^1$

に対して成立つ

(ii) $\Gamma(t)$ は j 個の simple closed surfaces から成る。 j は t によらず一定である。

(iii) m 次元空間における距離 $\text{dis}(\Gamma_\alpha(t), \Gamma_{\alpha'}(t))$ ($\alpha \neq \alpha'$) はある正定数 s_0 より常に大きい。

(iv) $\hat{\Gamma}_\alpha = \bigcup_{0 \leq t \leq T} t \times \Gamma_\alpha(t)$ とする。 R^{m+1} の開集合 U_i ($i=1, 2, \dots, k$) が存在して、 $\hat{\Gamma}_\alpha$ は $\bigcup_{i=1}^k U_i$ で覆われ、各 $\hat{\Gamma}_\alpha \cap U_i$ は、 C^3 級関数 $f: R^m \rightarrow R$ で $f(x_1, \dots, x_m, t) = 0$ とみらわされる。しかも $\frac{\partial f}{\partial x_l}$ ($l=1, \dots, m$) は $\hat{\Gamma}_\alpha \cap U_i$ 上で同時に 0 にならない。

§2. 問題の記述と結果

次の方程式を考えよう

$$(2.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - \nabla p - (u \cdot \nabla) u + f_0 \quad \text{in } \hat{\Omega}_\infty$$

$$(2.2) \quad \operatorname{div} u = 0 \quad \text{in } \hat{\Omega}_\infty$$

$$(2.3) \quad u = \beta \quad \text{on } \hat{\Gamma}_\infty$$

$= \tau$ 时 $u = u(t, x)$ は流速をあらわすベクトル、 $p = p(t, x)$ は圧力、 $f_0 = f_0(t, x)$ は外力、 $\beta = \beta(t, \xi)$ は境界での速度である。与えられた f_0 及び β が、特に角し周期 T を持つとき（ $= \tau$ 時 f_0, β は T -periodic と呼ぶ）、方程式 (2.1) (2.2) (2.3) を満たす u, p を求める問題を (P_τ, π) と呼ぶ。

いくつかの関数空間を準備しよう。 Ω は \mathbb{R}^m の有界領域で境界 $\partial\Omega$ は十分滑らかである。

$$L_2(\Omega) = \{ f = (f_1, f_2, f_3) ; \int_{\Omega} |f_j(x)|^2 dx < +\infty \}$$

内積を

$$(f, g)_{L_2(\Omega)} = (f, g)_\Omega = \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega} f_j(x) g_j(x) dx$$

と定義すれば、 $L_2(\Omega)$ は Hilbert 空間である。内積から決まるノルムを $\|f\|_{L_2(\Omega)} = \|f\|_\Omega$ などと書く。Sobolev 空間

$$W_2^1(\Omega) = \{ f = (f_1, f_2, f_3) \in L_2(\Omega) ; \frac{\partial}{\partial x_j} f \in L_2(\Omega), j=1, 2, 3 \}$$

以上と同様に内積、ノルムを定義する。

$$\mathcal{D}_c(\Omega) = \{ \varphi \in C_c^\infty(\Omega) ; \operatorname{div} \varphi = 0 \text{ in } \Omega \}$$

$H_\sigma(\Omega) = D_\sigma(\Omega) \cap L_2(\Omega)$ に於る完備化

$H_\sigma^1(\Omega) = D_\sigma(\Omega) \cap W_2^1(\Omega)$ に於る完備化。

注意 2.1

$H_\sigma(\Omega)$ の元 φ が適当になめらかであれば、 Ω に於て φ の法線成分は 0 となるか、 φ は必ずしも 0 ではない。

次に周期関数の空間を導入しよう。 $\hat{\Omega}_\infty, \hat{\Gamma}_\infty$ は既に定義 (T)。 $\hat{\Omega}, \hat{\Gamma}$ は各々 $\hat{\Omega}_\infty, \hat{\Gamma}_\infty$ の一周期分、みなわち

$$\hat{\Omega} = \bigcup_{0 \leq t \leq T} \Omega(t), \quad \hat{\Gamma} = \bigcup_{0 \leq t \leq T} \Gamma(t)$$

である。

$$\begin{aligned} \hat{D}_\sigma(\hat{\Omega}_\infty; \pi) &= \left\{ \varphi \in C^\infty(\hat{\Omega}_\infty); \operatorname{div} \varphi = 0 \text{ in } \hat{\Omega}_\infty, \right. \\ &\quad \left. \hat{\Gamma}_\infty \text{ の近傍で } \varphi \equiv 0, \varphi(t+T) = \varphi(t) \right\} \end{aligned}$$

$$\hat{H}_\sigma(\hat{\Omega}_\infty; \pi) = \hat{D}_\sigma(\hat{\Omega}_\infty; \pi) \cap L_2(\hat{\Omega}) \text{ ルムに於る}$$

完備化

$$\hat{H}_\sigma^1(\hat{\Omega}_\infty; \pi) = \hat{D}_\sigma(\hat{\Omega}_\infty; \pi) \text{ のルム}$$

$$\nu(\varphi) = \|\nabla \varphi\|_{\hat{\Omega}} = \left(\int_{\hat{\Omega}} |\nabla \varphi|^2 dx dt \right)^{1/2}$$

による完備化

仮定 2.2

i) $f_0 \in \hat{H}_\sigma(\hat{\Omega}_\infty; \pi)$

ii) β は $\hat{\Gamma}_\infty$ の近傍で定義された滑らかで T periodic な関数

$$c = c(t, x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad b(t, x) = \operatorname{rot} c(t, x) \text{ とかけた } b \text{ の}$$

42

\hat{H}_∞ の制限になつてゐる。

注意 2.3

$b|_{\hat{H}_\infty} = \beta$, $\operatorname{div} b = 0$ となるベクトル b の存在は.

$$\int_{\Gamma_\alpha^{(t)}} (\beta \cdot n) dS = 0 \quad (n: \text{外向法線})$$

がうき。保証される。(Ladyzhenskaya [6]) 特に

$$\int_{\Gamma_\alpha^{(t)}} (\beta \cdot n) dS = 0 \quad \alpha=1, \dots, j$$

が成立つときは、適当なベクトル c が存在して.

$$b = \operatorname{rot} c$$

と書かれる。ベクトル b のなめらかさは β 及び Γ のなめらかさから決る。このうな b を求まれば、適当なスカラーフィル $h(t, x)$ をとて、 $b^* = \operatorname{rot}(hc)$ をすれば、 b^* が再び仮定 2.2 ii) を満たすようになる。(補題 3.2 参照)

定義 2.4

u が (P_h, π) の弱解であるとは

i) 仮定 2.2 をみたす b に対して、 $n - b \in \hat{H}'(\hat{\Omega}_\infty; \pi)$

$$\text{かつ } \operatorname{ess. sup}_{t \in [0, T]} \|u(t) - b(t)\|_{\hat{\Omega}(t)} < +\infty$$

ii) $\hat{D}_\sigma(\hat{\Omega}_\infty; \pi)$ の任意の元 φ に対して、

$$\begin{aligned} F(u, \varphi) &\equiv \int_0^T \left\{ (u, \varphi_t)_{\hat{\Omega}(t)} + (-u, \Delta \varphi)_{\hat{\Omega}(t)} + (u, (u \cdot \nabla) \varphi)_{\hat{\Omega}(t)} \right\} dt \\ &= - \int_0^T (f_0, \varphi)_{\hat{\Omega}(t)} dt \end{aligned}$$

定理 2.5

仮定 1.1 及び仮定 2.2 をもつて (P_h, π) の弱解 u が存在す

る。 u はすべての $t \in R^+$ に対して定義され、 $\hat{D}_o(\hat{\Omega}_\infty; \pi)$ の任意の元 φ との内積 $(u(t), \varphi(t))_{\Omega(t)}$ は T -periodic な連続関数と τ である。

注意 2.6

$$(u(t), \varphi(t))_{\Omega(t)} = (u(0), \varphi(0))_{\Omega(0)} + \\ + \int_0^t \left\{ (u(s), \varphi_s(s))_{\Omega(s)} + (u(s), \Delta \varphi(s))_{\Omega(s)} + (u(s), (\nabla \cdot \nabla) \varphi(s))_{\Omega(s)} \right\} ds \\ + \int_0^t (f_o(s), \varphi(s))_{\Omega(s)} ds. \\ \varphi \in \hat{D}_o(\hat{\Omega}_\infty; \pi)$$

が成立つ。さらに、次のエネルギー不等式が成立つ。

$$\|u(t) - b(t)\|^2 + \int_0^t \|\nabla u(s) - \nabla b(s)\|^2 ds \leq C$$

但し C は $\hat{\Omega}$ 及び f_o, b による定数である。

§ 3. 不等式

この節では、定理 2.5 の証明に必要な L^p 不等式をいくつかあげよう。証明は省略する。

R^m の有界領域 B は、なめらかな境界 ∂B を持つ。各 t に於て $\Omega(t)$ を含み、さらには $\text{dis}(\partial B, \Gamma(t)) \geq \delta_0 > 0$ であるとする。又、 $\hat{B}_\infty = \hat{B}_\infty - \hat{\Omega}_\infty$, $\hat{E} = \hat{B} - \hat{\Omega}$ とする。

ε, δ は十分小さい正数、 $\varepsilon < \delta$ とする。

$$w_\varepsilon(t; \delta) = \{ x \in \Omega(t) ; \text{dis}(x, \Gamma(t)) < \delta \}$$

44

$$\omega_e(t; \delta) = \{x \in B - \overline{\Omega(t)} ; \text{dis}(x, \Gamma(t)) < \delta\}$$

$$\omega(t; \varepsilon, \delta) = \{x \in \Omega(t) ; \varepsilon < \text{dis}(x, \Gamma(t)) < \delta\}$$

とある。又。

$$\hat{\omega}_e(\delta) = \bigcup_{0 \leq t \leq T} t \times \omega_e(t; \delta)$$

$$\hat{\omega}_e(\delta) = \bigcup_{0 \leq t \leq T} t \times \omega_e(t; \delta)$$

とある。

補題 3.1

仮定 1.1のもとで、次の不等式が、すべての $\varphi \in H_0^1(B)$ と
すべての $t \in R^1$ について成立 \rightarrow

$$i) \|\varphi\|_{\omega(t; \delta)}^2 \leq C \delta \left\{ \|\varphi\|_{\Gamma(t)}^2 + \|\varphi\|_{\omega(t; \delta)} \|\nabla \varphi\|_{\omega(t; \delta)} \right\}$$

$$ii) \delta \|\varphi\|_{\Gamma(t)}^2 \leq C \left\{ \|\varphi\|_{\omega(t; \delta)}^2 + \delta \|\varphi\|_{\omega(t; \delta)} \|\nabla \varphi\|_{\omega(t; \delta)} \right\}$$

$$iii) \left\| \frac{\varphi}{P} \right\|_{\omega(t; \varepsilon, \delta)}^2 \leq C \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \|\varphi\|_{\Gamma(t)}^2 + \|\nabla \varphi\|_B^2 \right\}$$

$\varepsilon = \tau$ 、 C は φ , t , δ , ε によらない定数, $P = P(x)$ は x

から $\Gamma(t)$ への距離、 $\omega(t; \delta)$ は $\omega_e(t; \delta)$ ある \cup $\omega_e(t; \delta)$
である。

補題 3.2

仮定 1.1 が成立しているとする。任意の正数 ε に対して、
定数 C 及び仮定 2.2 を満たす関数 $b(t, x)$ が存在して、すべて
の $\varphi \in H_0^1(B)$, $t \in R^1$ に対して次の不等式が成立 \rightarrow

$$|((\varphi, \nabla \varphi), b)_B| \leq \varepsilon \|\nabla \varphi\|_B^2 + C(X(t, \cdot)\varphi, \varphi)_B$$

但し $X = X(t, x)$ は \hat{E}_∞ の特性関数、即ち \hat{E}_∞ 上で $X = 1$,

$\hat{\Omega}_\infty$ 上で $\chi \equiv 0$ である。

注意 3.3

ナビエ・ストークス方程式の定常問題で、恒等的に 0 でない境界条件がついている場合、上に類似の不等式

$$|((g, \nabla) \psi, b)| \leq 2 \|\nabla \psi\|_2 \quad \psi \in H_0^1(\Omega)$$

が用いられる。このようなく b を構成する技巧は Hopf [5] に
ある。補題 3.2 の $b(t, x)$ は、Fujita [1] に従って構成され
るが、その際、補題 3.1 の不等式が有用である。

3.4. 処罰法

方程式 (2.1) ~ (2.3) は、境界 $\Gamma(t)$ が動いているので直接には考慮しない。 $\Omega(t)$ を、固定された領域へ写す変換を行って、方程式を変形して問題を考えることも出来るが、これは、处罚法と呼ばれる方法で、(2.1) を近似する（良い性質をもつ）方程式をまず考えた。处罚法については Lions [8] Chap. 3 参照のこと。

u^n , p^n は、補助領域 \hat{B}_∞ で定義された関数とする。 \bar{f}_n は f_n 在 $\hat{\Omega}_\infty$ 外では 0 と置いて、 \hat{B}_∞ へ拡張したもの、 n は正整数とする。

$$(4.1) \quad \frac{\partial u^n}{\partial t} = \Delta u^n - \nabla p^n - (u^n \cdot \nabla) u^n - n \chi (u^n - b) + \bar{f}_n \quad \text{in } \hat{B}_\infty$$

$$(4.2) \quad \operatorname{div} u^n = 0 \quad \text{in } \hat{B}_\infty$$

46

$$(4.3) \quad u^n = 0 \quad \text{on } \mathbb{R}^l \times 2B.$$

(4.1) ~ (4.3) を合て T-periodic な T の u^n , p^n を求める問題を、
 $(AP)_n$ と呼ぶ。

注意 4.1

(4.1) は $\hat{\Omega}$ 上では (2.1) と一致する。

注意 4.2

$u - b = v$, $u^n - b = v^n$ とおけば, v , v^n は次の方程式を
 求める。

$$(4.4) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v - \nabla p - (v \cdot \nabla) v - (v \cdot \nabla) b - (b \cdot \nabla) v + f$$

$$(4.5) \quad \frac{\partial v^n}{\partial t} = \Delta v^n - \nabla p^n - (v^n \cdot \nabla) v^n - n \chi v^n - (v^n \cdot \nabla) b \\ - (b \cdot \nabla) v^n + \bar{f}$$

但し $f = f_0 + \Delta b - (b \cdot \nabla) b - b_t$, $\bar{f} = \bar{f}_0 + \Delta b - (b \cdot \nabla) b - b_t$.

$(AP)_n$ をガレルキンの方法に従って解く。 $A = A(B)$ は、
 $H_0(B)$ で定義されたストークス作用素, $\{\varphi_j\}$ は、その固有
 関数系, $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ が張る m 次元ベクトル空間を \mathbb{V}_m とする。

(4.5) を考慮して、次の常微分方程式をすく調べよう。

$$(4.6) \quad \begin{aligned} & \frac{d}{dt} (w_m(t), \varphi_j) + (\nabla w_m, \nabla \varphi_j) - ((w_m \cdot \nabla) \varphi_j, w_m) \\ & + n (\chi w_m, \varphi_j) - ((b \cdot \nabla) \varphi_j, w_m) + ((w_m \cdot \nabla) b, \varphi_j) \\ & = (\bar{f}, \varphi_j) \quad j=1, \dots, m \end{aligned}$$

$$(4.7) \quad w_m(0) = w_{m0}$$

但し (\cdot, \cdot) は $L_2(B)$ の内積を表す。

補題 3.2 に於て, $\varepsilon = \frac{1}{4}$ とし Γ を定める整数 $n_0 > C_{\frac{1}{4}}$, 且
く函数 $b = b(t, x) \in \Gamma$ とし、固定する。補題 3.2 によるアソカレ
の不等式

$$\|\varphi\|_B^2 \leq \frac{1}{\lambda_0} \|\nabla \varphi\|_B^2 \quad \varphi \in H_\sigma^1(B)$$

を用いて、

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \|w_m(t)\|^2 + \|\nabla w_m(t)\|^2 + 2(n-n_0)(\chi w_m(t), w_m(t)) \\ \leq \frac{2}{\lambda_0} \|\bar{f}(t)\|^2 \end{aligned}$$

及び

$$(4.9) \quad \|w_m(t)\|^2 \leq \left\{ \|w_m(0)\|^2 + \frac{2}{\lambda_0} \int_0^t e^{\lambda_0 \tau} \|\bar{f}(\tau)\|^2 d\tau \right\} e^{-\lambda_0 t} \quad \forall t \in [0, T]$$

が (4.8) をみたす $w_m(t)$ に於いて成立。従って、(4.6)

(4.7) は任意の初期値 $w_{m_0} \in \Phi_m$ に対し解 $w_m(t)$ を持つ。

写像 T_m は、 w_{m_0} に対し $w_m(T)$ を対応させようとする。

正の定数 R を

$$R^2 \geq \frac{2}{\lambda_0(e^{\lambda_0 T}-1)} \int_0^T e^{\lambda_0 t} \|\bar{f}(t)\|^2 dt$$

とすれば、(4.9) より

$$T_m : \Phi_R = \{ \varphi \in \Phi_m ; \|\varphi\|_B \leq R \} \rightarrow \Phi_R$$

であるから、ラウア-の不動点定理により、 T_m は不動点
が存在することが言える。すなわち、次の命題が成立。

命題 4.3

方程式 (4.6) の T -periodic 方解 w_m^n が存在して、評価

$$\begin{aligned} \|w_m^n(t)\|_B^2 + \int_0^t \|\nabla w_m^n(s)\|_B^2 ds + 2(n-n_0) \int_0^t (\chi w_m^n(t), w_m^n(t))_B dt \\ \leq R^2 + \frac{2}{\lambda_0} \int_0^t \|\bar{f}(s)\|_B^2 ds \quad t \in [0, T] \end{aligned}$$

が成立。

二のようにして得られた $\{w_m^n\}_{m=1}^\infty$ の適当な部分列は、実は $(AP)_n$ の解に収束していることを次に示そう。 $D(A)$ は $A = A(B)$ の定義域、即ち $D(A) = \{u \in W_2^2(B) \cap H_0(B) ; u = 0 \text{ on } \partial B\}$ である。 $D(A)$ の共役空間 $D(A)'$ は、1ルム Banach 空間になる。 $D(A)$ の共役空間 $D(A)'$ は、1ルム

$$\|f\|_{D(A)'} = \sup_{u \in D(A)} \frac{|\langle f, u \rangle|}{\|u\|_{D(A)}}$$

互いに、Banach 空間となる。

命題 4.4

$\left\{\frac{d}{dt} w_m^n(t)\right\}_{m=1}^\infty$ は $L_2(0, T : D(A)')$ の有界集合である。
(証明略)

ここで、後に必要なコンパクト性に関する補題を述べておく。 X_0, X_1, X_2 は Hilbert 空間とし、作用素 $P : X_0 \rightarrow X_1$, $S : X_0 \rightarrow X_2$ は次の性質を持つとする。

i) P, S は完全連続、線形作用素である。

$$ii) Sv = 0 \Rightarrow Pv = 0 \quad (v \in X_0)$$

区间 (α, β) で定義され X_i 上に値をとる関数の作った Hilbert 空間 $L_2(\alpha, \beta : X_i)$ を考え。作用素 \hat{P}, \hat{S} を次のようには定義する。

$$(\hat{P}v)(t) = Pv(t)$$

$$(\hat{S}v)(t) = Sv(t) \quad v(t) \in L^2(\alpha, \beta; X_0)$$

$$\hat{P}: L_2(\alpha, \beta; X_0) \rightarrow L_2(\alpha, \beta; X_1), \quad \hat{S}: L_2(\alpha, \beta; X_0) \rightarrow L_2(\alpha, \beta; X_2)$$

となる。

補題 4.5 (Fujita-Sauer [4])

\hat{P}, \hat{S} は上で定義された作用素である。 $\{v_n(t)\}_{n=1}^\infty$ が
 $L_2(\alpha, \beta; X_0)$ の有界集合で、 $\{\frac{d}{dt}\hat{S}v_n\}_{n=1}^\infty$ が $L_2(\alpha, \beta; X_2)$
>の有界集合であるならば、 $\{\hat{P}v_n\}_{n=1}^\infty$ から部分列を選んで
 $L_2(\alpha, \beta; X_1)$ で強収束するようになれる。

証明は Morimoto [9] を見られたい。

我々が $\{w_m^n\}_{m=1}^\infty$ に立つべきである。命題 4.3, 4.4 によると
 $\{w_m^n\}$ は $X_0 = H_\sigma^1(B)$, $X_1 = H_\sigma(B)$, $X_2 = (D(A))'$, P, S
>は injection として補題 4.5 の仮定をみたす。故に $\hat{A}_\sigma(\hat{B}_\infty; \pi)$
>で強収束する部分列 $\{w_{m_j}^n(t)\}_{j=1}^\infty$ が選べる。その極限を v^n
>とすれば、 $u^n = v^n + b$ は以下の次が成立する。

$$(4.10) \quad u^n - b \in \hat{H}_\sigma^1(\hat{B}_\infty; \pi), \quad \text{ess. sup}_t \|u^n(t) - b(t)\| < +\infty$$

$$(4.11) \quad \begin{aligned} & \int_0^T \{(u^n, \varphi_t)_B + (\Delta u^n, \Delta \varphi)_B + (u^n, (u^n \cdot \nabla) \varphi)_B\} dt \\ &= n \int_0^T (\chi(u^n - b), \varphi)_B dt - \int_0^T (\bar{f}_0, \varphi)_B dt \\ & \qquad \varphi \in \hat{D}_\sigma(\hat{B}_\infty; \pi) \end{aligned}$$

$$(4.10) \quad (u^n(t), \varphi(t))_B = (u^n(0), \varphi(0))_B + \int_0^t (u^n(s), \varphi_s(s))_B ds + \\ + \int_0^t (u^n, \Delta \varphi)_B ds + \int_0^t (u^n, (u^n \cdot \nabla) \varphi)_B ds +$$

$$+ \int_0^t (\bar{f}_0, \varphi)_B ds - n \int_0^t (\chi(u^n - b), \varphi)_B ds \\ g \in \hat{D}_\sigma(\hat{B}_\infty; \pi)$$

$$(4.13) \|v^n(t)\|_B^2 + \int_0^t \|\nabla v^n(t)\|_B^2 dt + 2(n-n_0) \int_0^t (\chi v^n, v^n)_B dt \\ \leq R^2 + \frac{2}{\lambda_0} \int_0^t \|\bar{f}(s)\|_B^2 ds \quad t \in [0, T]$$

但し $\bar{f} = \bar{f}_0 + \Delta b - (\delta \cdot \nabla) b - b_t$.

§ 5. 定理 2.5 の証明

前節で求めた $\{v^n\}$ は実は (P_n, π) の弱解に収束して $v^n \rightharpoonup v^*$ と示す。評価 (4.10) ~ (4.13) より次の収束が成立つ。すなわち、 $\{v^n\}$ の部分列 $\{v^{n_j}\}$ が存在して $\varphi \in \hat{D}_\sigma(\hat{B}_\infty; \pi)$ に対して $(v^{n_j}(t), \varphi(t))_{\Omega(t)} \rightarrow (v^*(t), \varphi(t))_{\Omega(t)}$ 一様。
 $v^{n_j} \rightarrow v^*$ $\hat{H}_\sigma^1(\hat{B}_\infty; \pi)$ で弱収束。

v^* は $\text{ess. sup } \|v^*(t)\|_B < +\infty$, $\|v^*\|_E = 0$ である。

$v^* + b \in \hat{B}_\infty$ への制限が定義 2.4 ii) 式をみたすことを言えれば定理は証明される。そのためには、 $\{v^n\}$ の任意の部分列が

$\hat{H}_\sigma(\hat{B}_\infty; \pi)$ で強収束する部分列を含むことと言えればよい。

Fujita-Sauer ^[4] は従って証明のあらあじを記す。

$$X_0 = \{u \in W_2^1(\Omega); \operatorname{div} u = 0\}, \quad X_1 = H_\sigma(\Omega), \quad X_2 = D(A(\Omega))'$$

とし、 $P: X_0 \rightarrow X_1$, $S: X_0 \rightarrow X_2$ は次のように定義した。

$$P u = P(\Omega) u \quad u \in X_0$$

$$S u (\varphi) = \langle S u, \varphi \rangle = (u, \varphi)_B \quad u \in X_0, \varphi \in D(A(\Omega))$$

但し $P(\Omega)$ は $L_2(\Omega)$ から $H_0(\Omega)$ への射影である。又 α, β 及び領域 Ω を, $(\alpha, \beta) \times \Omega \subset \hat{\Delta}_\infty$ となるようにとる。ニヤミ。

補題 5.1

$\{\hat{P}v^n\}$ は $L_2(\alpha, \beta; X_1)$ のコンパクト集合, 従って,

$\{P(\Omega)v^n\}$ は $L_2((\alpha, \beta) \times \Omega)$ のコンパクト集合である。

証明

(4.12) 及び (4.13) より $\{v^n\}$ は $L_2(\alpha, \beta; X_0)$ の有界集合,

$\left\{\frac{d}{dt}\hat{S}v^n\right\}$ は $L_2(\alpha, \beta; X_2)$ の有界集合であることを不言之。

従って補題 4.5 より結論とする。

補題 5.2

n に依らない定数 C が存在して

$$\|v^n\|_{\hat{A}} \leq C n^{-\frac{1}{4}}$$

証明

補題 3.1 ii) を $\omega = \omega_e$ に対して用いれば

$$\|v^n\|_{\hat{A}}^2 \leq C \left\{ s^{-1} \|v^n\|_{\hat{E}}^2 + \|v^n\|_{\hat{E}} \|\nabla v^n\|_{\hat{B}}^2 \right\}$$

(4.13) より

$$\|v^n\|_{\hat{E}} \leq \left\{ \frac{C_1}{2(n-n_0)} \right\}^{1/2}$$

$$\|\nabla v^n\|_{\hat{B}} \leq C_1^{1/2}$$

但し $C_1 = R^2 + \frac{2}{\lambda_0} \int_0^T \|\bar{f}(s)\|_B^2 ds$, 従って求める不等式が十分大きい n に対して成立。

52

次の 2 つの補題は v^n の収束を示すのに役立つ。証明は、
Fujita-Sauer [4] を見られ $T=1$ 。

補題 5.3

$G = (\alpha, \beta) \times \Omega \subset \hat{\Omega}_\infty$ とする。この時、 G に依らない定数 C が存在して、不等式

$$\int_\alpha^\beta \|w(t) - P(\Omega)w(t)\|_{\Omega}^2 dt \leq C \int_\alpha^\beta \|w(t)\|_{\partial\Omega}^2 dt$$

がすべての $w \in \hat{H}_\sigma^1(\hat{B}_\infty; \pi)$ に対して成立。

補題 5.4

$G = (\alpha, \beta) \times \Omega \subset \hat{\Omega}_\infty$, $(\alpha, \beta) \times 2\Omega \subset \hat{\omega}_i(s)$ とする。

この時、 G と s に依らない定数 C が存在して、不等式

$$\int_\alpha^\beta \|w(t)\|_{\partial\Omega}^2 dt \leq C \left\{ \int_\alpha^\beta \|w(t)\|_{\Gamma(t)}^2 dt + s \int_\alpha^\beta \|\nabla w(t)\|_{B}^2 dt \right\}$$

がすべての $w \in \hat{H}_\sigma^1(\hat{B}_\infty; \pi)$ に対して成立。

これで定理の証明の準備は整った。以下を次のように“細分”する。 $\{t_j\}$ は $[0, T]$ の可算な稠密な集合とする。

$$G_{j,k,\ell} = (t_j, t_k) \times \Omega^\ell(t_j)$$

$$\Omega^\ell(t_j) = \Omega(t_j) - \overline{w_i}(t_j; \frac{1}{\ell})$$

$$= \{x \in \Omega(t_j); \text{dist}(x, \Gamma(t_j)) > \frac{1}{\ell}\}$$

$\hat{\Omega}$ の空でない開集合 $G_{j,k,\ell}$ の全体を \mathcal{G} とおく。補題 5.1 より、必要ならばさらに部分列 $\{v^{n'}\}$ を選んで、すべての $G \in \mathcal{G}$ に対して $\{P(\Omega)v^{n'}\}$ が $L_2(G)$ で強収束するように出来る。このようにして選んだ部分列は実は $L_2(\hat{\Omega})$ で強収

束していることを以下で示そう。任意の正数 ε が与えられた時、(4.13) を考慮すれば

$$\delta \|\nabla v^n\|_{B}^2 < \varepsilon \quad n=1, 2, \dots$$

が成立つなら $\delta > 0$ が存在する。この時、有限個の点の元 $G_1, G_2, \dots, G_{N(\delta)}$ を選んで

$$i) \hat{\Omega} - \bigcup_{j=1}^{N(\delta)} G_j \subset \hat{\omega}_c(s)$$

$$ii) \forall x \in \bigcup_{j=1}^{N(\delta)} G_j \text{ は高さ } 2\gamma \text{ の } G_j \text{ にしか属さない}$$

と出来る。各 G_j は $(\alpha_j, \beta_j) \times \Omega_j$ と表わされていとする。

$$w = v^{n'} - v^{m'} \text{ とおく。}$$

$$\|w\|_{\hat{\Omega}}^2 \leq \sum_{j=1}^{N(\delta)} \|P(\Omega_j) w\|_{G_j}^2 + \sum_{j=1}^{N(\delta)} \|w - P(\Omega_j) w\|_{G_j}^2 + \|w\|_{\hat{\omega}(s)}^2$$

に於て、左辺第一項は $n', m' \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する。

第二項は補題 5.3, 5.4 及び G_j のかぎり具合にすり。

$$C \{ \|w\|_{\hat{\Omega}}^2 + \delta \|\nabla w\|_{B}^2 \}$$

で上から評価される。これはさらに、補題 5.2 と δ の選び方にすり

$$C \left(\frac{1}{\sqrt{m'}} + \frac{1}{\sqrt{m''}} + 2\varepsilon \right) \text{ で評価される。第三項}$$

は補題 3.1 の不等式 i) を用いて

$$\begin{aligned} \|w\|_{\hat{\omega}(s)}^2 &\leq C (\delta \|w\|_{\hat{\Omega}}^2 + \delta^2 \|\nabla w\|_{B}^2) \\ &\leq C \delta \left(\frac{1}{\sqrt{m'}} + \frac{1}{\sqrt{m''}} + 2\varepsilon \right) \end{aligned}$$

$$\text{従って } \lim_{m', n' \rightarrow \infty} \|w\|_{\hat{\Omega}}^2 \leq C \cdot \varepsilon$$

故に $\{v^{n'}\}$ は $L_2(\hat{\Omega})$ で強収束する。よって定理は証明された。

引用文献

- [1] H. Fujita : On the existence and regularity of the steady-state solutions of the Navier-Stokes equation, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect I 9 (1961), 59-102
- [2] H. Fujita : 壁面加動くときのナビエ-ストークス方程式 I = 1962, 数理科学講究録 106
- [3] H. Fujita and N. Sauer : Construction of weak solutions of the Navier-Stokes equations in a non-cylindrical domain, Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1965), 465-468
- [4] H. Fujita and N. Sauer : On existence of weak solutions of the Navier-Stokes equations in regions with moving boundary, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I 17 (1970), 403-420.
- [5] E. Hopf : On nonlinear partial differential equation, Lecture series of symposium on partial differential equations, Univ. of Kansas (1952), 1-32
- [6] O. A. Ladyzhenskaya : The mathematical theory of viscous incompressible flow, Gordon and Breach, New York, 1963.
- [7] J. L. Lions : Sur la régularité et l'unicité des solutions turbulentes des équations de Navier-Stokes,

Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 30 (1960), 16 - 23

- [8] J. L. Lions ; Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires , Dunod, Paris , 1969.
- [9] H. Morimoto : On existence of periodic weak solutions of the Navier-Stokes equations in regions with periodically moving boundaries, to appear in J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect I.
- [10] G. Prodi : Qualche risultato riguardo alle equazioni di Navier-Stokes nel caso bidimensionale , Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 30 (1960) , 1 - 15.