

無衝突プラズマ中の 非線型波と熱運動

東工大 工 丹生 慶四郎

§ 1. 序

無衝突プラズマはエネルギーの散逸機構を持たないため、プラズマ中に生じる波は分散性と非線型性に支配される。このような分散性波動はたとえばK-dV方程式のようなモデル方程式を用いてこれまでかなり詳細に調べられてきた。ここではK-dV方程式にまで変形することなく、プラズマに対する基礎方程式に基づいて無衝突プラズマの中に生じる有限振幅波の性質を研究する。波は定常波に限定し、主として粒子の熱運動の効果に着目する。

§ 2. 静電場による波

無衝突プラズマ中の有限振幅波の取り扱いには一般には複雑で解析は容易でない。その中で磁場の関与しない静電場のみによって生じる波が最も取り扱いやすく、また物理的解釈も

つきやすい。この節ではもっぱら静電場のみによる波に考察を限り、取り扱いは Moiseev, Sagdeev,²⁾ Yajima, Taniuti, Outi³⁾ に従うことにする。

基礎方程式として

$$-en_e E - kT_e \frac{\partial n_e}{\partial x} = 0, \quad (1) \quad \frac{\partial n_i^{(l)} u_i^{(l)}}{\partial x} = 0, \quad (l=1,2) \quad (2)$$

$$u_i^{(l)} \frac{\partial u_i^{(l)}}{\partial x} = \frac{e}{m} E, \quad (l=1,2) \quad (3) \quad \frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi e \left(\sum_{l=1}^2 n_i^{(l)} - n_e \right) \quad (4)$$

を選ぶ。(1)式は電子に対する運動方程式である。プラズマ中では電子はイオンに比べて高温であることが多いので、電子の運動方程式中には電子の圧力項を考慮し、しかも到るところ等温であると仮定した。また電子質量はイオン質量に比べて充分小さいので、(1)式では電子の慣性項を無視している。現象は定常次元で、空間座標 x が唯一の独立変数である。(2)式はイオンに対する連続方程式、(3)式はイオンに対する運動方程式である。イオンは電子に比べて冷たいと考えると(3)式で圧力項は無視してある。その代り熱運動を考慮する意味で、イオンは互に速度の異なる二つの冷たい流れから成り立っていると考え、この速度差が熱速度に対応するものとする。流れは電子、イオンとも $x = -\infty$ の無限上流から $x = \infty$ の無限下流に向うものと考え、イオンの速い方の流れに対して添字 1、遅い方の流れに対して添字 2 を付ける。流れの中に有限振幅

波が誘起され、その波のポテンシャルによって、遅いイオン流や場合によっては両方のイオン流が跳ね返されて、これらのイオン流は $x=\infty$ に辿り着くことなく $x=-\infty$ に舞いもどることがあり得る。これらの場合、往路と帰路のイオン流を区別するために遅いイオンの帰路の流れに対して添字 3 を、早いイオンの帰路の流れに対して添字 4 をつける。(4)式は電場に対する Poisson 方程式である。

さてここで(1)~(4)式の境界値問題を解こう。境界条件としては、無限上流 $x=-\infty$ で一様状態であると選ぶ。

すなわち $x=-\infty$ で

$$\begin{aligned} n_e &= n_0, \quad n_i^{(1)} = \beta n_0, \quad n_i^{(2)} = (1-\beta)n_0, \\ U_i^{(1)} &= U_{i0}^{(1)}, \quad U_i^{(2)} = U_{i0}^{(2)} \quad (U_{i0}^{(1)} > U_{i0}^{(2)}), \quad E=0 \end{aligned} \quad (5)$$

である。数密度は電子、イオンとも n_0 で、したがって電気的中性が保たれ電場は存在しない。イオンは $U_{i0}^{(1)}$, $U_{i0}^{(2)}$ と二つの異った速度を持つ流れからなり、その密度比は $0 < \beta < 1$ を満たす β によって特徴づけられる。ただし $x=-\infty$ で、 $n_i^{(2)}$ イオンの跳ね返りの流れ、すなわち $n_i^{(3)}$ が存在するときは、 $n_i^{(2)}$ は修正されて

$$-U_i^{(3)} = U_i^{(2)} = U_{i0}^{(2)}, \quad n_i^{(2)} = n_i^{(3)} = \frac{1-\beta}{2} n_0 \quad (6)$$

となり、さらに $n_i^{(4)}$ が存在するときは

$$n_i^{(1)} = n_i^{(4)} = \frac{\beta}{2} n_0, \quad n_i^{(2)} = n_i^{(3)} = \frac{1-\beta}{2} n_0, \quad (7)$$

$$-u_i^{(1)} = u_i^{(4)} = u_{i0}^{(1)}, \quad -u_i^{(3)} = u_i^{(2)} = u_{i0}^{(2)} \quad (7)$$

と修正される。

$$\lambda = \left(\frac{kT_e}{4\pi n_0 e^2} \right)^{1/2}, \quad \tau = \frac{\lambda}{u_0} \quad (8)$$

を長さと同時間の単位に選ぶ n_0, u_0 を用いて上式で現れる変量を以下のように $(-)$ のついた無次元量に変換する。

$$n_e = n_0 \bar{n}_e, \quad n_i = \beta n_0 \bar{n}_i^{(l)} \quad (l=1, 4), \quad (9)$$

$$n_i = (1-\beta) n_0 \bar{n}_i^{(l)} \quad (l=2, 3), \quad u_i = u_0 \bar{u}_i^{(l)} \quad (l=1, 2, 3, 4)$$

$$E = kT_e/e\lambda \cdot \bar{E}, \quad x = \lambda \bar{x}, \quad t = \tau \bar{t}.$$

またイオン音波の伝播速度 $a = (kT_e/m_i)^{1/2}$ を用いて

$$M_1 = \frac{u_{i0}^{(1)}}{a}, \quad M_2 = \frac{u_{i0}^{(2)}}{a}, \quad K = \frac{M_1^2}{M_2^2} \quad (10)$$

なる無次元量が定義される。(9)を用いると(1)~(4)式は

$$\bar{n}_e \bar{E} + \frac{\partial \bar{n}_e}{\partial \bar{x}} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial (\bar{n}_i^{(l)} \bar{u}_i^{(l)})}{\partial \bar{x}} = 0 \quad (l=1, 2, 3, 4) \quad (12)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i^{(l)}}{\partial \bar{x}} = \frac{\bar{E}}{M_l^2} \quad (l=1, 2, 3, 4) \quad (13)$$

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{x}} = \frac{\beta}{2} (\bar{n}_i^{(1)} + \bar{n}_i^{(4)}) + \frac{1-\beta}{2} (\bar{n}_i^{(2)} + \bar{n}_i^{(3)}) - \bar{n}_e \quad (14)$$

となる。ただし(14)式で $\bar{n}_i^{(4)}$ が存在しない場合は $\bar{n}_i^{(1)} = 2\bar{n}_i^{(1)}$, $\bar{n}_i^{(3)}$ も存在しない場合は $\bar{n}_i^{(2)} = 2\bar{n}_i^{(2)}$ と置きかえる。以下では変数上の $(-)$ は省略する

a) 孤立波

プラズマは無衝突であるから、流れが自ら誘起した電場に

よって一つ、または二つのイオン流が一度跳ね返されると、再び向きをかえることなく $x = -\infty$ まで舞い戻る。今このような跳ねかえりイオンのない場合は恒等的に $n_i^{(3)} = n_i^{(4)} = 0$ で、

(1)~(4)式は

$$n_e E = - \frac{dn_e}{dx} \quad (15), \quad n_i^{(1)} u_i^{(1)} = 1 \quad (16), \quad n_i^{(2)} u_i^{(2)} = \frac{M_2}{M_1} \quad (17),$$

$$u_i^{(1)} \frac{du_i^{(1)}}{dx} = \frac{E}{M_1^2} \quad (18), \quad u_i^{(2)} \frac{du_i^{(2)}}{dx} = \frac{E}{M_1^2} \quad (19), \quad \frac{dE}{dx} = \beta n_i^{(1)} + (1-\beta) n_i^{(2)} \quad (20)$$

となる。これらの式より

$$\frac{1}{2} E^2 = \frac{M_1^2 \beta}{n_i^{(1)}} + \frac{M_2^2 (1-\beta)}{n_i^{(2)}} + n_e - \left\{ 1 + M_1^2 \beta + M_2^2 (1-\beta) \right\}, \quad (21)$$

$$n_i^{(1)} = \left(1 - \frac{2}{M_1^2} \log n_e \right)^{1/2} \quad (22), \quad n_i^{(2)} = \left(1 - \frac{2}{M_2^2} \log n_e \right)^{1/2} \quad (23)$$

が得られる。 $x = -\infty$ の近傍での E の振舞いは(21)の右辺を $(n_e - 1)$ で展開して

$$E^2 \approx \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{M_1^2} + \beta \left(\frac{1}{M_2^2} - \frac{1}{M_1^2} \right) \right\} (n_e - 1)^2 \quad (24)$$

で与えられる。 $n_e \sim 1$ で $E^2 > 0$, すなわち

$$1 > \frac{1-\beta}{M_2^2} + \frac{\beta}{M_1^2} \quad (25)$$

が無限上流の一樣状態から波が立ち上がるための必要条件である。(23)式で $n_i^{(2)} = 0$ を満す n_e を n_{ec} と書くと

$$n_{ec} = e^{\frac{M_2^2}{2}} \quad (26)$$

となるが、イオンに跳ね返りがないことはこのような電子密度が実現しないことであって、 $n_e = n_{ec}$ で $E^2 < 0$ なることに対応する。この条件は

$$e^{\frac{M_2^2}{2}} < 1 + \beta M_1^2 + (1-\beta) M_2^2 \quad (27)$$

で与えられる。(25),(27)は波が正
ってしかも波によるイオンの跳
ね返りのない場合である。この
場合の n_e と E との関係は図1に、
(15)式を用いての物理面での変動
の様相を図2に示す。図2に示
す波形は明らかに孤立波である。
図中 Φ は電場のポテンシャルを
表わし、

$$\Phi = \int_{-\infty}^x E dx = \log n_e \quad (28)$$

なる関係を有する。

b) 準衝撃波

遅いイオン流のみが波面で跳
ね返される場合を考えよう。こ

の場合には $n_e = n_{ec}$ で $E^2 > 0$ 、すなわち

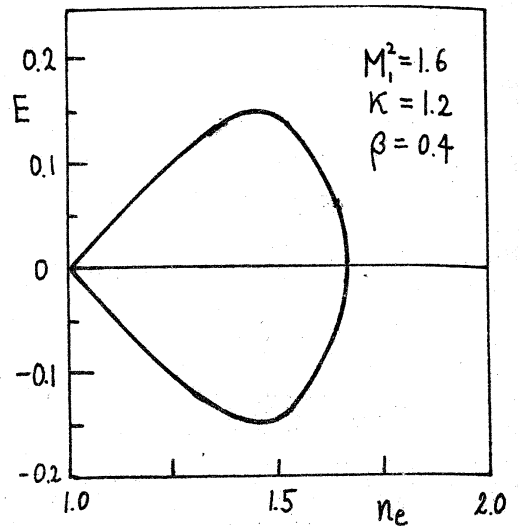
$$e^{\frac{M_2^2}{2}} \geq 1 + \beta M_1^2 + (1 - \beta) M_2^2 + \beta M_1 (M_1^2 - M_2^2)^{1/2} \quad (29)$$

を満足し、かつ(22)式で $M_2 = 0$ と置いて求まる $n_e = n_{ecc}$ に対して

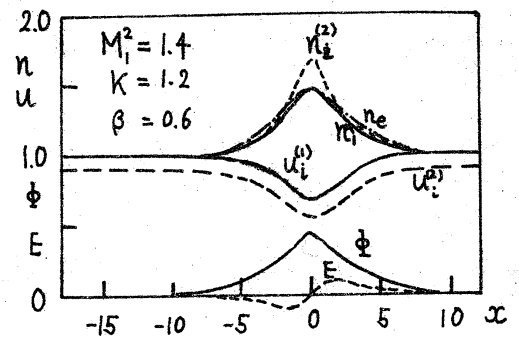
$E^2 < 0$ 、すなわち

$$e^{\frac{M_1^2}{2}} \leq 1 + \beta M_1^2 + (1 - \beta) M_2^2 \quad (30)$$

も満足する場合に相当する。この際波面後方では $n_e^{(2)} = 0$ とな
るので、波面後方での n_e と E との関係は



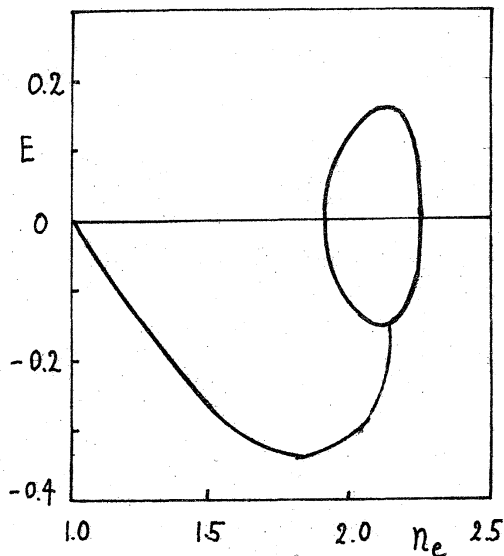
(図 1)



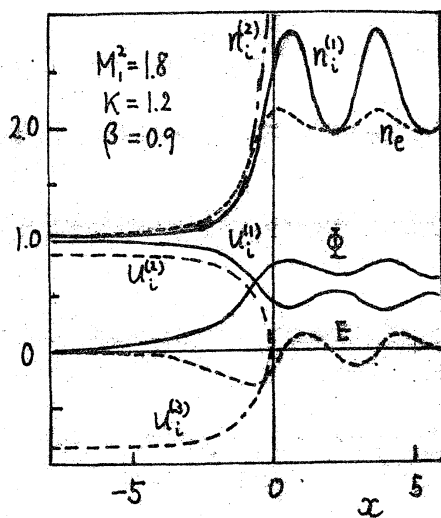
(図 2)

$$\frac{E^2}{2} = M_1^2 \beta \sqrt{1 - \frac{2}{M_1^2} \log n_e} + n_e - \left\{ 1 + \beta M_1^2 + (1 - \beta) M_2^2 \right\} \quad (31)$$

で与えられる。Eと n_e との関係は図3に、物理面での諸量の変動の様子は図4に示す。この場合波は準衝撃波と呼ばれるものとなる。



(図 3)



(図 4)

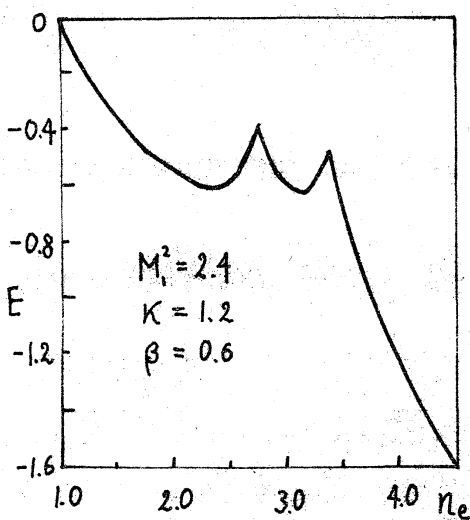
c) 閉じ込め波

2つのイオン流が共に波面で跳ね返される場合は $n_e = n_{ecc}$ で $E^2 > 0$ となり、

この条件は

$$e^{\frac{M_1^2}{2}} > 1 + \beta M_1^2 + (1 - \beta) M_2^2 \quad (32)$$

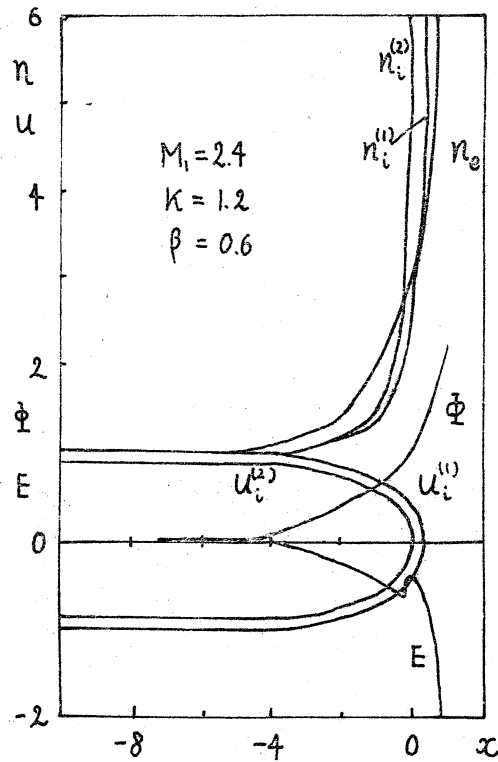
で与えられる。この場合の n_e とEとの関係は図5に、物理面での諸量の変動の様子は図6に示す。波面の後



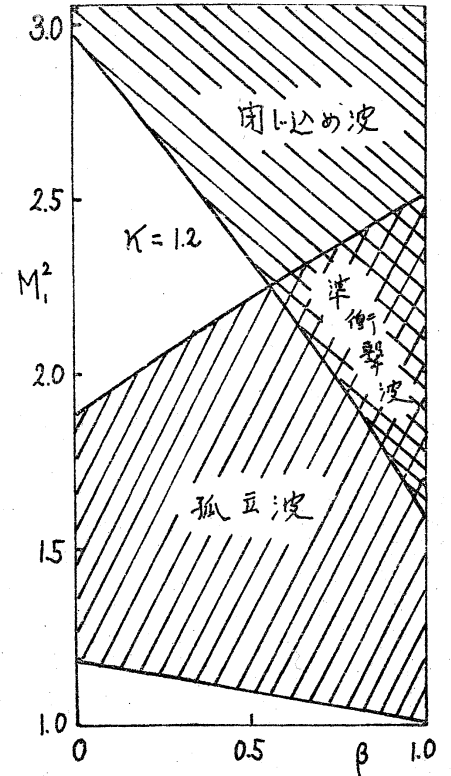
(図 5)

201

方ではイオンは存在しないので閉じ込め波と呼ぶことにする。
 β と M_1 に対して3つの波の存在する範囲を図7に示す。



(図 6)



(図 7)

以上の結果をみてわかる通り、イオンに速度のバラツキが全くない($\beta=0$)冷い流れの場合か、またはバラツキがあっても流れのMach波が小さくて誘起される電場のポテンシャルが小さいときは、全イオンは $-\infty$ から $+\infty$ まで全領域を運動して、出現する波は孤立波となる。しかしイオンに熱運動がある場合で($\beta \neq 0$)、流れのMach波が比較的大きくなると、誘起された電場のポテンシャルによってイオンの一部は $-\infty$ に跳ね返されて $+\infty$ に達することは出来ない。このような状況の

下では $-\infty$ と $+\infty$ での状態は必然的に異なり、波は準衝撃波となる。この事情はプラズマが磁場中に存在する場合も、磁場と流れが直交しない限り同じで、熱運動によるイオン速度のバラツキが孤立波の出現をはばんで、準衝撃波を誘起することを知らるのである。

§3. 磁場に斜めに伝播する波; 巨視的取り扱い。

前節で論じた粒子の跳ね返りを考慮することなしに、なおかつ無衝突プラズマ中に衝撃波を実現する機構が存在するであろうか。ここでまず思い当るのが Saffman⁽⁴⁾の示唆である。外部磁場中の無衝突プラズマ中を磁場に斜めに伝播する波は、粒子の跳ね返りが存在しなくとも準衝撃波を形成する可能性が存在する。以下これを解析する。

基礎方程式としてはイオンと電子に対する連続方程式;

$$\operatorname{div}(n_i v_i) = 0 \quad (33), \quad \operatorname{div}(n_e v_e) = 0 \quad (34),$$

運動方程式;

$$m_i (v_i \cdot \operatorname{grad}) v_i = e (E + v_i \times H) - \frac{1}{n_i} \operatorname{grad} P_i, \quad (35).$$

$$m_e (v_e \cdot \operatorname{grad}) v_e = -e (E + v_e \times H) - \frac{1}{n_e} \operatorname{grad} P_e, \quad (36)$$

状態方程式;

$$P_i \propto n_i \quad (37), \quad P_e \propto n_e \quad (38),$$

電磁場に対する Maxwell 方程式;

$$\operatorname{div} H = 0 \quad (39), \quad \operatorname{div} E = 4\pi e (n_i - n_e) \quad (40),$$

$$\text{rot } H = \frac{4\pi e}{c} (n_i v_i - n_e v_e) \quad (41), \quad \text{rot } E = 0 \quad (42)$$

を選ぶ。現象は定常と仮定する。Saffmanの方程式系に比べて、運動方程式中に圧力項を附加したが本質的な変化はない。無限上流での Alfvén 速度 $a_0 = H_0 / \sqrt{4\pi n_0 (m_i + m_e)}$ を用いて、長さの単位として

$$l = a_0 \sqrt{m_i m_e} / e H_0 \quad (43)$$

を導入し、また無限上流での流れの x 方向の速度成分 U を速度の単位に選び、変数を

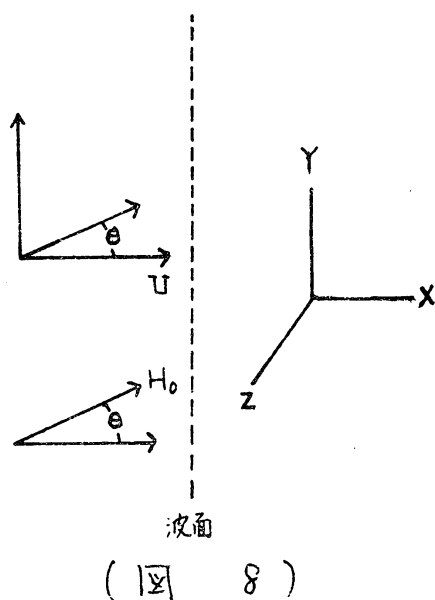
$$\begin{aligned} \psi_i &= U \bar{\psi}_i = U(\bar{u}, \bar{v}_i, \bar{w}_i), \quad \psi_e = U \bar{\psi}_e = U(\bar{u}, \bar{v}_e, \bar{w}_e) \\ \alpha &= e \bar{\alpha}, \quad H = H_0 \bar{H} = H_0(\cos \theta, \bar{H}_2, \bar{H}_3), \quad E = E_0 \bar{E} = E_0(E, 0, 0) \\ n_i &= n_0 \bar{n}_i, \quad n_e = n_0 \bar{n}_e, \quad n_i = n_e, \quad p_i = p_{i0} \bar{p}_i, \quad p_e = p_{e0} \bar{p}_e \end{aligned}$$

と無次元化する。現象は一次元で α のみに依存し、電氣的に準中性の仮定を使用する。無限上流 $\alpha = -\infty$ で流れと磁場とは平行で、座標軸とこれらの方向との関係を図 8 に示す。無次元変数の $\bar{\Gamma}$ を省略し、(33)~(42) より必要な方程式を抜き出すと、

$$\frac{M U}{\gamma} \frac{d\psi_i}{d\alpha} = E + U \times H - P_i' U \frac{dU}{d\alpha} \hat{i}, \quad (44)$$

$$M \gamma U \frac{d\psi_e}{d\alpha} = -E - U \times H - P_e' U \frac{dU}{d\alpha} \hat{i}, \quad (45)$$

$$U \text{rot } H = \frac{A}{\gamma + \gamma^{-1}} (\psi_i - \psi_e) \quad (46)$$



(図 8)

で、ここに $\gamma^2 = m_e/m_i$, $A = \Omega/a_0$ である。さてここで

$$\frac{dx}{dt} = u \quad (47)$$

を用いて独立変数を x より t に変換する。 t に関する微分を (*) で表わせば (44)~(46) より

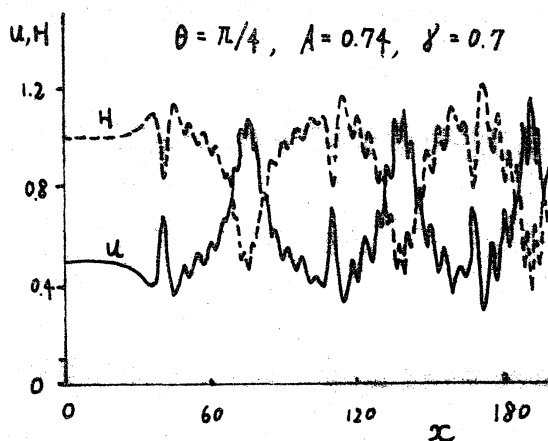
$$\ddot{H}_2 + (\gamma^{-1} - \gamma) A^{-1} \dot{H}_3 \cos \theta - H_2 (u - A^{-2} \cos^2 \theta) = -\sin \theta (1 - A^{-2} \cos \theta), \quad (48)$$

$$\ddot{H}_3 - (\gamma^{-1} - \gamma) A^{-1} \dot{H}_2 \cos \theta - H_3 (u - A^{-2} \cos^2 \theta) = 0, \quad (49)$$

$$u + \frac{1}{2} A^{-2} (H_2^2 + H_3^2) + p' u^{-1} = 1 + p' + \frac{1}{2} \sin \theta \quad (50)$$

の3式を得る。ただし、 $p' = p'_i + p'_e$ である。まずこれらの方程式の線型解を求め、数値計算で非線型解をこの線型解に接続する。 $\theta = \pi/4$, $A = 0.74$, $\gamma = 0.7$ の場合の u と $H^2 = H_2^2 + H_3^2$ の変動の様を図9に示す。Saffman

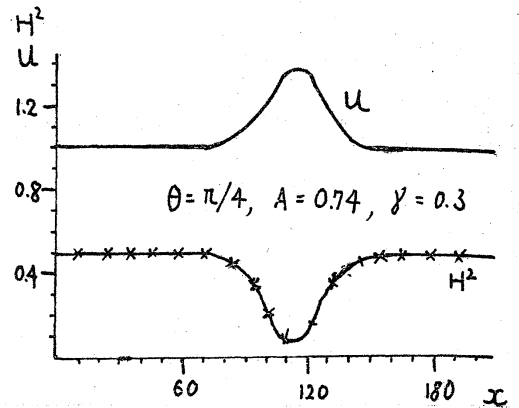
の示唆した通り、巨視的方程式を用い熱運動の効果を陽に考慮することなしに、準衝撃波形が求められたことは確かである。しかし同じ $\theta = \pi/4$, $A = 0.74$ の場合、



(図 9)

$\gamma = 0.3$ に選べば、波としては図10に示す通り孤立波しか得られない。他の Alfvén 数に対しても電子とイオンの質量比を小さく選べば波はことごとく孤立波に落ちつくので、実在の質量比に対して、この節での

解析方法では準衝撃波の解は
求め得ないように思われる。



(図 10)

§ 4 磁場に斜めに伝播する波; 微視的取り扱い

前節の問題に対して、§ 2 でイオンに対して取り扱ったと
同じ方法をイオンと電子に適用してみよう。^{5,6)} 基礎方程式は

$$\frac{dn_i^{(l)} U_i^{(l)}}{dx} = \frac{dne^{(l)} U_e^{(l)}}{dx} = 0, \quad (l=1,2) \quad (51)$$

$$m_i U_i^{(l)} \frac{dU_i^{(l)}}{dx} = e (\mathbb{E} + \mathcal{V}_i^{(l)} \times \mathbb{H}), \quad (l=1,2) \quad (52)$$

$$m_e U_e^{(l)} \frac{dU_e^{(l)}}{dx} = -e (\mathbb{E} + \mathcal{V}_e^{(l)} \times \mathbb{H}), \quad (l=1,2) \quad (53)$$

$$\sum_{l=1}^2 (n_i^{(l)} - n_e^{(l)}) = 0 \quad (54)$$

$$\frac{dH_2}{dx} = 4\pi e \sum_{l=1}^2 (n_i^{(l)} U_i^{(l)} - n_e^{(l)} U_e^{(l)}) \quad (55)$$

$$\frac{dH_3}{dx} = -4\pi e \sum_{l=0}^2 (n_i^{(l)} \mathcal{V}_i^{(l)} - n_e^{(l)} \mathcal{V}_e^{(l)}) \quad (56)$$

で与えられる。

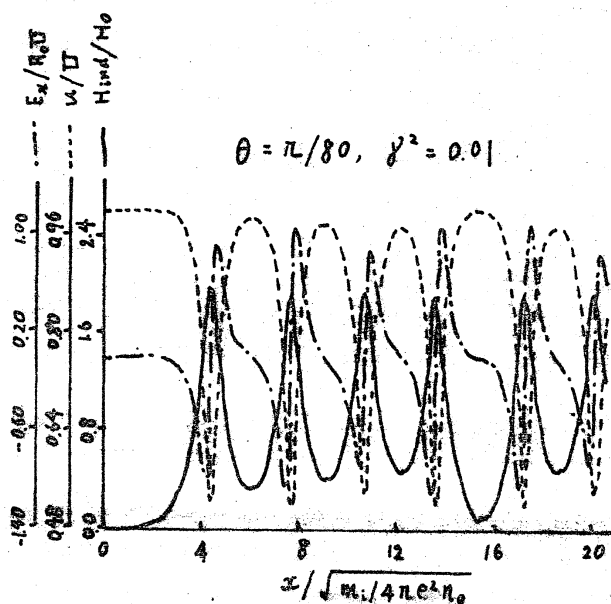
$$\begin{aligned} \mathcal{V}_i^{(1)} &= (U_0 + P_i \cos \theta, P_i \sin \theta, 0), & \mathcal{V}_e^{(1)} &= (U_0 + P_e \cos \theta, P_e \sin \theta, 0) \\ \mathcal{V}_i^{(2)} &= (U_0 - P_i \cos \theta, -P_i \sin \theta, 0), & \mathcal{V}_e^{(2)} &= (U_0 - P_e \cos \theta, -P_e \sin \theta, 0) \end{aligned} \quad (57)$$

$$n_i^{(1)} = n_i^{(2)} = n_e^{(1)} = n_e^{(2)} = n_0/2, \quad \mathbb{B} = B_0 (\cos \theta, \sin \theta, 0)$$

$$\mathbb{E} = B_0 U_0 (0, 0, -\sin \theta)$$

を初期値とし、 $\theta = \pi/80$, $P_e/\bar{v} = P_i/\bar{v} = 0.01$, $\gamma^2 = 0.1$ に対して、
上式の数値計算を行った結果は図11に示す。

$P_e = P_i = 0$ とおけば波形は孤立波となるが、 P_e および P_i に有限値を与えると波は図11に示すように準衝撃波となる。この節の取り扱い方法においては θ を小さくしても準衝撃



(図 11)

波形は孤立波に移ることはなく、電子の運動による高周波成分が増加した波形が与えられる。

電子もイオンも完全に冷たい流れの場合には、分散性と非線型性が丁度釣り合って孤立波が得られるのに、粒子速度にばらつきを与えることによって波形が準衝撃波に移行するのは、多流体流れのすべてに対して波形がもとの一様流に復元するような非線型性と分散性との釣り合いが実現せず、各流れの変動効果か他と組み合わせると、何時までも不規則な振動を繰り返すのではなからうかと考えられる。

§ 5 結論

§ 2 と § 4 とにおいて、無衝突プラズマの熱運動が、有限

振幅波として準衝撃波を形成する上に二つの効果を持つことを指摘した。その一つは速度差があるために、一部の遅い粒子の電場のポテンシャルによる跳ね返りであり、他の一つは磁場中を運動する流れの速度差による非線型性と分散性とのアンバランスである。この論文では専ら定常解のみを考察し、以上二つの熱運動の効果が無衝突プラズマ中で孤立波ではなく準衝撃波を実現させる原因を作ることを指摘したが、もし非定常運動を考えるならば、孤立波の不安定性等、準衝撃波形を導く要因は他にも求められるであろう。

以上の数値結果を導くにあたって、東大宇宙研の橋本英典先生を始め研究室の皆様方に大層お世話になった事を附記して、ここに厚く御礼申し上げる。

参 考 文 献

- 1) S. S. Moiseev and R. Z. Sagdeev: J. Nuclear Energy C5 ('63) 43.
- 2) N. Yajima, T. Taniuti and A. Outi: J. Phys. Soc. Japan 21 ('66) 575.
- 3) 丹生慶四郎, 林敏明: 電磁流体シンポジウム ('72) 80.
- 4) P. G. Saffman: J. Fluid. Mech. 11 ('61) 552.
- 5) K. Abe and K. Niu: J. Phys. Soc. Japan 32 ('72) 1121.
- 6) K. Abe: Submitted to J. Phys. Soc. Japan.