数理解析研究所講究録
178巻 1973年 18-23

t-design と partial design

阪大 教養 野田 隆三郎

§1. 序

D.K. Ray-Chaudhuri and R.M. Wilson 及び P.J. Cameron の次の最近の論文（いずれも to appear）の中の二，三の定理を紹介するのが目的である．（論文(2)は坂内氏（東大）が入手されたものである．）

(1) Ray-Chaudhuri and Wilson : On t-designs.

(2) P.J. Cameron : Near regularity condition for designs.

はじめに用語の定義を述べる．

Def.1. $\mathcal{P}\cap\mathcal{B}=\phi$ であるような二つの集合 $\mathcal{P}$, $\mathcal{B}$ と $\mathcal{P}\times\mathcal{B}$ の部分集合 I の三つの組 $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ を incidence structure という．通常 $\mathcal{P}$ の元を点，$\mathcal{B}$ の元を block という．$\mathcal{P}\ni p$, $\mathcal{B}\ni B$ に対し $(p, B)\in I$ なる時，p と B が incident といい $p\,I\,B$ と書く．

Def.2. incidence structure $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ の dual structure $(\overline{\mathfrak{P}}, \overline{\mathfrak{B}}, \overline{\mathrm{I}})$ とは 次の incidence structure のことである。$\overline{\mathfrak{P}} = \mathfrak{B}$, $\overline{\mathfrak{B}} = \mathfrak{P}$, そして $(B, p) \in \overline{\mathrm{I}}$ と $(p, B) \in \mathrm{I}$ で定義する。

Def. 3. t-(v, k, λ) design とは incidence structure $\mathcal{D} = (\mathfrak{P}, \mathfrak{B}, \mathrm{I})$ で次をみたすものを言う。

(i) $|\mathfrak{P}| = v$.

(ii) $\mathfrak{B} \ni {}^{\forall}B \Rightarrow \#\{p \in \mathfrak{P} \mid p \mathrm{I} B\} = k$.

(iii) $\mathfrak{P}^{(t)} \ni {}^{\forall}(p_1, p_2, \cdots, p_t) \Rightarrow \#\{B \in \mathfrak{B} \mid p_1, p_2, \cdots, p_t \mathrm{I} B\} = \lambda$.

1-design のことを tactical configuration と言う。

Def. 4. class number t の partial design $(v, b, r, k, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t)$ とは tactical configuration $(\mathfrak{P}, \mathfrak{B}, \mathrm{I})$ で次をみたすものを言う。

(i) $|\mathfrak{P}| = v$, $|\mathfrak{B}| = b$.

(ii) $\mathfrak{B} \ni {}^{\forall}B \Rightarrow \#\{p \in \mathfrak{P} \mid p \mathrm{I} B\} = k$.

$\mathfrak{P} \ni {}^{\forall}p \Rightarrow \#\{B \in \mathfrak{B} \mid p \mathrm{I} B\} = r$.

(iii) $\mathfrak{P}$ の上に t 個の classes よりなる association scheme が定義されていて (p, q) が i-th class に属しているならば $\#\{B \mid p, q \mathrm{I} B\} = \lambda_i$ がなりたつ. $(i = 1, 2, \cdots, t)$.

次の定義は一般的なものではないが便宜のため用いることにする．

Def. 5. class number s の *quasi* partial design $(v, b, r, k, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s)$ とは上の定義の (i), (ii) と次の (iii)′ ((iii) を弱めたもの) をみたす tactical configuration を言う．

(iii)′ $\mathcal{P}^{(2)} \ni {}^{\forall}(p, q) \Rightarrow \#\{B \in \mathcal{B} \mid p, q \; I \; B\} = \lambda_i \quad (1 \leq i \leq s)$

但しこの場合は，$i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j$ と約束する．

§2. 二，三の定理．

2-design における最も基本的な定理として Fischer の不等式がよく知られているがこの不等式の t-design への自然な拡張として Ray-Chaudhuri と Wilson が次の不等式を証明した．

定理 A. (Ray-Chaudhuri and Wilson)

t-(v, k, λ) design $\mathcal{D}$ $(t = 2s)$ において $v - s \geqq k$ がみたされているとすると．

(*) $\binom{v}{s} \leqq b$ がなりたつ．但し $b = \#\{B \in \mathcal{B}\}$.

かつ

$\binom{v}{s} = b \Leftrightarrow$ $\mathcal{D}$ の dual が class number s の quasi partial design をなす．

定理Aで $s=1$ の場合がFischerの不等式である.

Def. 6. 定理Aで等号をattainする t-design ($t=2s$) をtight t-designと言う.

次に定理Aとある意味で逆の方向へのFischerの不等式の拡張として class number s の partial design ($v, b, r, k, \lambda_1, \cdots, \lambda_s$) において $r \neq \lambda_i$ ($1 \leq i \leq s$) をみたしておれば $v \leqq \binom{b}{s}$ がなりたつであろうと筆者も証明を考えていたのであるが, 実はこのことは quasi partial design において正しいということを同じ Ray-Chaudhuri と Wilson が証明している.

定理B. (Ray-Chaudhuri and Wilson).

$\underbrace{\text{quasi}}_{\text{class number } s \text{ の}}$ partial design ($v, b, r, k, \lambda_1, \cdots, \lambda_s$) において $r \neq \lambda_i$ ($1 \leq i \leq s$) がみたされておれば $v \leqq \binom{b}{s}$ がなりたつ。

再び $s=1$ の場合がFischerの不等式である。なお Ray-Chaudhuri と Wilsonは上の形では述べていないが定理Bは彼等の結果から直ちに従う。

最後に t-design と partial design に結びつける, P.J. Cameron の非常に興味深い定理を紹介する.

定理C (P.J. Cameron)
$\mathcal{D}=(\mathcal{P},\mathcal{B},I)$ を t-(v,k,λ) design $(t=2(s-1))$ とする. この時 もし $\mathcal{D}$ の dual $(\mathcal{B},\mathcal{P},\bar{I})$ が class number s の quasi partial design をなすとすれば それは class number s の partial design をなす.
特に tight t-design $(t=2s)$ の dual は class number s の partial design をなす.

§3. 今後の問題.

1. まず残されている一番大きな問題は定理Aで等号を attain する tight t-design $(t=2s\geqq 4)$ を決定する問題であろう。自明なもの (つまり, complete s-$(v,s,1)$ design 或いはその complementary design) を除けば現在知られているのは $s=2$ の時の 4-$(23,7,1)$ design だけである。この design は有名な単純群 Mathieu 群の一つに関係するもので他にこのような design が存在するかどうかは群論の方からも非常に興味のもたれる問題である。$s>3$ の場合はまだ何も知られていない。

2. 次に定理Bで等号をattainするquasi partial designはどのようなものであろうか．筆者の知るかぎり それらは定理Aで等号をattainするtight t-designのdualとして与えられている．したがって定理Cにより それらは特にpartial designとなしている。そこで今後の問題として次のような問題が考えられる．

問題1. 定理Bで等号をattainするquasi partial designはpartial designであるか．

問題2. 定理Bで等号をattainするpartial designはtight t-designのdualであるか．

もしこれらが正しいとすると定理A及び定理Bで等号をattainするものを決定する問題は全く同じ問題になるわけである。