

## Consistency Proof for Arithmetic in all Finite Types

東京電機大学 花谷 圭人

この小論では有限 type の primitive recursive functionals を含んだ Peano arithmetic  $\tilde{T}$  の無矛盾性を示す。これは Hanatani 66 の結果を補い、合せて  $\tilde{T}$  における prim. rec. functional の計算可能性を保証するものである。これらに於て有限の立場を越えるものとして仮定されたのは、ある制限付の 2 階述語論理の cut elimination theorem であって、その証明は Takeuti 55 により  $\varepsilon_0$  までの超限帰納法の範囲で与えられている。このような functional の計算可能性は Gödel 58 において自然数論の無矛盾性証明のために仮定されたものであったから、 $\varepsilon_0$  までの超限帰納法の範囲で証明できなくともおかしくないと思っていた。T と  $\tilde{T}$  のちがいはあるが Gödel 58 p284 の次の一節をこれと関連して気になる: » Das System T ist von gleicher Beweisstärke wie ein System der rekursiven Zahlentheorie, in dem vollständige Induktion für alle Ordinalzahlen  $< \varepsilon_0$  (in der gewöhnlichen Darstellung)

zugelassen wird.“

$\tilde{\Gamma}$  の無矛盾性証明は induction の消去を経て行うが、制限付 2 階述語論理の cut elimination theorem を用いるのは induction 消去の際である。 $\tilde{\Gamma}$  において induction と切離せないのは type の概念である。普通の Peano arithmetic とちがって induction の適用できるのは、つまり自然数に等しいのは、全対象ではなくて type 0 として区別されるべき一部分だけだからである。いまこれら type 0 の対象を他から区別する  $Z$  という predicate constant を導入することにすれば全ての type の対象が区別できる。実際  $F_0(t) \equiv Z(t)$ ,  $F_{\alpha+1}(t) \equiv \forall x (F_\alpha(x) \supset F_\alpha(tx))$  とするとき、各 type  $\alpha$  に対し  $F_\alpha(t)$  に相当する formula が  $t$  の type  $\alpha$  なることを表現する。そこで  $\tilde{\Gamma}$  には  $Z$  と、 $Z$  に対応した公理を置いて type の概念を導入し、term 自体には type の区別を設けない。その結果 term は一般に一定形式の様々な type を同時にもつことになる。induction の消去は  $Z$  を 2 階述語論理の表現に翻訳して行う。induction と type の概念はこれで同時に消え去る。

Functional の計算可能性に関する諸研究をみると、term の書きかえに焦点を合せているものが多い。functional はその書きかえ規則とみられ、単純な要素に分解されていることとこれらの要素の数が少ないことが要求される。combinator

や abstraction operator が好んで用いられるのはそれ故であろう。これに対しわれわれは equation がどのように変形され結わつけられて行くのか、つまり equation の deduction に焦点を合わせ、さらには deduction の書きかえに焦点を合わせる。functional の導入に defining equation に基づく普通の方法がとれることとわれわれの方法の利点である。われわれの主題である無矛盾性、即ち計算結果の一意性は、このような defining equation からの deduction が、むだのない形にいつでも書きなおせること (Normalization theorem) を用いて示される。通常一意性証明に用いられる Church-Rosser の方法に代る一方法である。

## 1. Equational calculus $EXTAS^+S^-(PR)$

- 1.1. term: variable, individual constant, これらから 2 つの operator: successor ' と application ( ), を用いて帰納的に構成されたもの。即ち (1)  $t: \text{term} \Rightarrow t'$  は term (2)  $t, u: \text{terms} \Rightarrow (tu)$  は term. ここに individual constant は, (1) 0 (zero), S,  $O_n$ ,  $P_i^n$ ,  $S_{mn}$  (ただし  $m, n \geq 1, 1 \leq i \leq n$ ) (2)  $\theta_1, \theta_2$  が ind. const.  $\Rightarrow C_{\theta_1, \theta_2}, R_{\theta_1, \theta_2}$  をそれぞれ ind. const., によって帰納的に構成されるものとする。
- 1.2. formula:  $t = u$  の形のみ。  $t, u$  は任意の term.
- 1.3. 規約:  $\theta$  は ind. const. を,  $\rho$  は ind. const. 又は variable を表わす。  $t^{(n)}$  は  $t$  に successor を  $n$  個付けたものを表わす。

$(\dots((tu_1)u_2)\dots u_n)$  ( $n \geq 1$ ) を  $tu_1u_2\dots u_n$ ,  $t(u_1, u_2, \dots, u_n)$ ,  $t\bar{u}$  などと表わし,  $t(u_1\bar{v}, u_2\bar{v}, \dots, u_n\bar{v})$  をさらに  $t(\bar{u}\bar{v})$  と表わす.  
 F, G, H は formula を表わし F が  $t=u$  のとき  $F'$  は  $t'=u'$  を表わす.

#### 1.4. axiom schemas.

E-axiom:  $p = p$

PR-axiom: PR1  $P_i^n(t_1, t_2, \dots, t_n) = t_i$

PR2  $S_{mn}(t, u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n) = t(\bar{u}\bar{v})$

PR3  $C_{\theta_1, \theta_2} = \theta_1 \theta_2$

PR4  $O_n(t_1, t_2, \dots, t_n) = 0$

PR5  $St = t'$

PR6a  $R_{\theta_1, \theta_2} 0 = \theta_1$

PR6b  $R_{\theta_1, \theta_2} t' = \theta_2(R_{\theta_1, \theta_2} t, t)$

これだけで充分なのだが対称性を与えて記述を容易にするために, 上記の PR-axiom を左型とよび両辺を入れ換えた右型を追加しておく. 左型の左辺, 右型の右辺を defined term とする.

#### 1.5. deduction rule の schemas.

X-rule

$$\frac{t = u}{u = t}$$

T-rule

$$\frac{t_0 = t_1 \quad t_1 = t_2 \quad \dots \quad t_{n-1} = t_n}{t_0 = t_n} \quad (n \geq 2)$$

A-rule

$$\frac{t_1 = u_1 \quad t_2 = u_2 \quad \dots \quad t_n = u_n}{t_1 t_2 \dots t_n = u_1 u_2 \dots u_n} \quad (n \geq 2)$$

S-rules:

$$S^+ \text{-rule } \frac{t = u}{t' = u'} \quad , \quad S^- \text{-rule } \frac{t' = u'}{t = u} .$$

各 rule の上式を *premiss*, 下式を *conclusion* とする。特に A-rule の上式のうち一番左のものを A-major premiss とする。

1.6. *deduction* とは有限個の *deduction rule* からなる *tree form* で各枝の先端は *axiom* であるものをいう。一般に  $\mathbb{D}$  で *deduction* を表わす。終式が  $F$  である  $\mathbb{D}$  を  $\mathbb{D}|F$  と表わし、 $F$  に至る  $\mathbb{D}$  とする。  $\mathbb{D}|F$  が存在するとき  $F$  は deducible とする。

$\mathbb{D}$  中に  $X$ -rule が含まれるとき  $\mathbb{D}$  は  $X$ -normal であるということにすれば、任意の  $\mathbb{D}|F$  は  $X$ -normal な  $\mathbb{D}'|F$  に書きかえることができるので以下では  $\mathbb{D}$  はすべて  $X$ -normal と仮定しておく が、一般性を失わない。

## 2. $\mathbb{D}$ の構造に関する定義

2.1. ' $\mathbb{D}$  中  $F$  が  $G$  の祖先[子孫]である' は普通のように定義されているものとする。  $F$  が  $G$  の S-祖先[子孫], T-祖先[子孫], A-祖先[子孫] とは  $F$  が  $G$  の祖先[子孫]であって、それぞれ  $F$  と  $G$  の間に、T-rule も A-rule も現れない場合、T-rule が少くとも1回現れるか A-rule が現れない場合、A-rule が少くとも1回現れるか T-rule が現れない場合をいう。特に  $F$  は  $F$  自身の S-祖先かつ S-子孫ということにしておく。

2.2.  $\mathbb{D}$  中  $F$  が T-knot であるとは、 $F$  が T-conclusion でありそれかゝる  $T$ -premiss の S-祖先でもある場合をいう。 $\mathbb{D}$  中  $F$  が A-knot であるとは、 $F$  が A-conclusion でありかつそれか

いかなる A-major premiss の S-祖先でもない場合をいう。

2.3.  $D$  中  $F$  が  $G$  の T-source であるとは、 $F$  が  $G$  の T-祖先でありかつ  $F$  が axiom 又は A-knot であることをいう。 $D$  中  $F$  が  $G$  の A-source であるとは、 $F$  が  $G$  の A-祖先であり、 $F$  が axiom か T-knot か A-knot であって、 $F$  と  $G$  の間に他の A-knot が存在しない場合をいう。 $F$  がさらに A-major premiss の S-祖先であるとき、 $F$  は  $G$  の A-major source であるという。

2.4.  $G, H$  をある共通の  $F$  の二つの T-sources とするとき、 $G$  の子孫と  $H$  の子孫にそれぞれあたる二つの formulas を共に上式として含むような T-rule が必ずちようど一つ存在するから、それら子孫の間の左右位置関係をそのまま  $G$  と  $H$  の間の左右位置関係と定義すれば、 $F$  の T-source 全体はこの順序関係により列をなす。この列を  $F$  の T-source sequence といい  $\textcircled{F}$  で表わす。 $F$  に注目しないときは単に T-source sequence といい  $\textcircled{\quad}$  で表わす。 $\textcircled{\quad}$  の長さを  $l\textcircled{\quad}$  で表わす。

2.5.  $\textcircled{\quad}$  中の formulas を左から順に  $F_1, F_2, \dots, F_n$  とする。

$\textcircled{\quad}$  が normal であるとは、 $\textcircled{\quad}$  中に  $N1$  を満たす  $F_i t$ ,  $N2a$  や  $N2b$  を満たす  $F_i, F_{i+1}$  も、 $N3$  を満たす  $F_{i-1}, F_i, F_{i+1}$  も存在しないことをいう。 $\textcircled{\quad}$  が strongly normal であるとは上の条件中  $N3$  を  $N3^*$  で置きかえた場合をいう。

$N1$   $F_i$  が  $t=t$  の形である。

N2a  $F_i, F_{i+1}$  が共に A-knot である。

N2b  $F_i, F_{i+1}$  が共に PR-axiom で、 $F_i$  の右辺、 $F_{i+1}$  の左辺が共に defined term である。

N3  $F_{i-1}, F_i, F_{i+1}$  において  $F_i$  が A-knot でその A-major source が E-axiom であり、 $F_{i-1}, F_{i+1}$  が共に PR-axiom で  $F_{i-1}$  の右辺、 $F_{i+1}$  の左辺が共に defined term である。

N3\*  $F_{i-1}, F_i, F_{i+1}$  において  $F_i$  が A-knot、 $F_{i-1}, F_{i+1}$  が共に PR-axiom で  $F_{i-1}$  の右辺、 $F_{i+1}$  の左辺が共に defined term である。

$\mathbb{D}$  中すべての  $\odot$  が normal [strongly normal] であるとき、 $\mathbb{D}$  は normal [strongly normal] であるという。 $\mathbb{D}|F$  はそれを normal な deduction  $\mathbb{D}'|F$  に書きなおせるとき normalizable であるという。

### 3. EXTASTS(PR) に関する定理

定理 1.  $\odot_F$  が strongly normal  $\Rightarrow F$  は  $t'=0$  や  $0=t'$  でない。

定理 2.  $\mathbb{D}$  が normal  $\Rightarrow \mathbb{D}$  は strongly normal.

定理 3. (Normalization Theorem)  $\mathbb{D}$  は normalizable.

以上の結果として、

定理 4.  $t'=0$  や  $0=t'$  は EXTASTS(PR) で deducible ではない。

### 4. 定理の証明に用いられる PR-axiom の性質など

4.1. 一般に  $t$  は  $(\dots((p^{(k_0)} t_1)^{(k_1)} t_2)^{(k_2)} \dots t_n)^{(k_n)}$  の形をしているといえる。ただし  $n \geq 0, k_i \geq 0$ 。このような表わし方は一意的

であり,  $n$  を dept  $t$  で,  $p^{(k_0)}$  を kert  $t$  で表わし, それぞれ  $t$  の 深さ,  $t$  の 核 といふ.  $\sum_{i=0}^n k_i$  を #t で表わす.  $\text{dept}=0$  で  $p$  が  $0$  又は variable のとき  $t$  は numerical term と呼ばれる.

4.2.  $t$  を defined term,  $u$  を他辺とする PR-axiom に 於て,

PT1. kert  $t$  は numerical term ではない.

PT2.  $\#t = 0$ . したがって  $\#t \leq \#u$ .

$t_i$  を defined term,  $u_i$  を対応する他の辺とする 2 つの PR-axioms ( $i=1, 2$ ) において,

PT3. kert  $t_1$  と kert  $t_2$  が同一ならば  $\text{dept}_1 = \text{dept}_2$ .

PT4.  $t_1$  と  $t_2$  が同一ならば  $u_1$  と  $u_2$  も同一である.

PT5. kert  $t_1$  と kert  $t_2$  が同一ならば PT2, PT3 より  $t_i$  はそれぞれ  $\theta t_{i1} t_{i2} \dots t_{in}$  と仮定してよいが, この場合は,  $\theta$  が  $R_{\theta, \theta_2}$  の形の時を別にすれば次の性質が成り立つ「 $t_{1j} = t_{2j}$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ) がすべて deducible ならば  $u_1 = u_2$  も deducible」.  $\theta$  が  $R_{\theta, \theta_2}$  の形の時には axiom schema が 2 通りあるが, 内題の PR-axiom が両方ともどちらか一方の axiom schema に依っている場合には上記の性質が成り立つ. 残るのは  $t_i$  の一方が  $R_{\theta, \theta_2}$  他方が  $R_{\theta, \theta_2} u'$  の形をしている場合であり, 上記の性質の後置が「 $0 = u'$  [又は  $u' = 0$ ] が deducible」となる場合である.

## 5. 定理 1, 2 の証明

5.1. 定理 1 の証明には PT1, PT2 と次の補題 1 を用いる.



補題1.  $\mathcal{D}$  を strongly normal とする.  $F$  が  $\mathcal{D}$  中の PR-axiom でその左[右]辺が defined term であれば,  $\mathcal{D}$  中  $F$  より左[右]にある PR-axiom はすべてその左[右]辺が defined term である.

5.2. 定理2の証明は  $\mathbb{D}$  中の T-knot の数に関する帰納法により, 次の補題2と PT3 を用いる.

補題2.  $\mathbb{D}$  が strongly normal ならば  $\mathbb{D}$  中どの T-knot  $F$  をとっても, その両辺の核の少くとも一方は  $F$  の祖先において, PR-axiom の defined term の核として現われる.

[証明]  $\mathbb{D}$  中の T-knot の数に関する帰納法による. 補題1と PT3 を用いる.

## 6. 定理3の証明

6.1.  $\mathbb{D}$  の degree,  $\deg \mathbb{D}$  は  $\mathbb{D}$  の終式の  $\mathbb{D}$  における degree とする.

$F$  の  $\mathbb{D}$  における degree,  $\deg F$  は次のように定義される.

(1)  $F$  が axiom の時,  $\deg F = 0$ .

(2)  $T \frac{F_1, \dots, F_n}{F}$  の時,  $\deg F = (\deg F_1)^* + \dots + (\deg F_n)^*$ .

ただし  $(\deg F_i)^* = \begin{cases} \deg F_i & F_i \text{ が T-conclusion の S-子孫の時.} \\ \deg F_i + 1 & \text{それ以外} \end{cases}$

(3)  $A \frac{F_1 F_2 \dots F_n}{F}$  の時,  $\deg F = \max\{(\deg F_1)^*, \deg F_2, \dots, \deg F_n\}$ .

ただし  $(\deg F_1)^* = \begin{cases} \deg F_1 & F_1 \text{ が A-conclusion の S-子孫の時.} \\ \deg F_1 + 1 & \text{それ以外.} \end{cases}$

(4)  $S \frac{G}{F}$  の時,  $\deg F = \deg G$ .

6.2.  $D|F$  において  $F$  が  $T$ -conclusion の  $S$ -子孫である時,  $D$  は  $T$ -end であるといい,  $\Theta_F$  を  $\Theta_D$  と表わす.  $l_T D$  の定義は:

$$l_T D = \begin{cases} l \Theta_D & D \text{ が } T\text{-end の時} \quad (\text{この時 } l \Theta_D \geq 2) \\ 1 & \text{そうでない時.} \end{cases}$$

6.3.  $\Theta_F$  と  $F$  とにはさまれた  $D$  の部分を  $F$  の  $T$ -scope とよぶ.  $T$ -scope はそこに現われるどの  $T$ -rule の上にも  $S^-$ -rule がなくどの  $T$ -rule の下にも  $S^+$ -rule が無い時, normal といい, そこに現われる  $T$ -rule がただ一つの時 simple という.

補題 3.  $F$  も  $\Theta_F$  も  $\deg F$  も変えないうで  $F$  の  $T$ -scope を normal か simple に書きなおすことができる.

証明は略す. まず normal にすることを考えればよい.

6.4. 次のような場合に分けて  $D$  の normalizability を考える.

$$\deg D \leq 1 \quad \text{(I)}$$

$$\deg D \geq 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} l_T D = 1 \\ l_T D \geq 2 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \Theta_D \text{ が normal} \\ \Theta_D \text{ が normal でない} \end{array} \right. \quad \text{(II)}$$

$$\Theta_D \text{ が normal でない} \quad \text{(III)}$$

(I) の場合  $D$  は normal. (II) の場合  $D|F$  の normalizability は  $F$  の  $A$ -sources 又は  $T$ -sources に至る各部分  $D_i$  のそれに帰着. ここに  $\deg D_i < \deg D$ . (III) の場合次にみるようにある特殊な場合を除けば  $D|F$  はある形  $D^*|F$  に書きなおし得る. すなわち  $D$  の normalizability は  $D^*$  のそれに帰着する. ここに  $\deg D^* < \deg D$ ,

あるいは  $\deg D^* \leq \deg D$  かつ  $l_T D^* < l_T D$ . しかし, 実は今除外したような場合は,  $\deg D' < \deg D$  なる  $D'$  がすべて normalizable であるという仮定のもとでは起り得ないのである. これは定理 1, 2 により保証される. 以上 (I) (II) (III) の各場合の考察を合せ考えれば,  $\deg D$  と  $l_T D$  に関する二重帰納法により  $D$  の normalizability を得ることを知る. あと証明すべきは唯次のみ.

補題 4.  $l_T D \geq 2$  で  $\mathcal{G}_D$  が normal でなく次の条件 C を満たす  $D|F$  は関係  $R(D, D^*)$  をみたす  $D^*|F$  に書きなおせる.

C:  $\mathcal{G}_D$  中の  $F$  は  $t'=0$  や  $0=t'$  の形の A-source をもたない.

$R(D, D^*)$ :  $\deg D^* < \deg D$ , あるいは  $\deg D^* \leq \deg D$  かつ  $l_T D^* < l_T D$ .

[証明]  $l_T D$  に関する帰納法を用いる. [I]: Base, [II]: Induction Step.

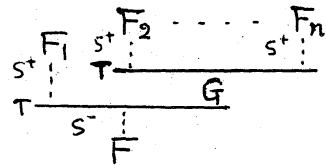
[I]  $l_T D = 2$  で  $\mathcal{G}_D$  が, (1) N1 を満たす  $F$  を含む, (2) N2a を満たす,

(3) N2b を満たす, 各場合と, (4)  $l_T D = 3$  で  $\mathcal{G}_D$  が N3 を満たす場合.

それぞれ  $\mathcal{G}_D$  を消去するような常識的な書きなおしをすればよい. (3) には PR-axiom の性質 PT4 が, (4) には PT5 が関係する.

C は PT5 の例外が起らないことを保証する. 書きなおした結果の  $D^*$  が  $R(D, D^*)$  を満たすことはそれぞれの場合に確かめればよい.

[II] 上の (1)-(4) 以外の場合.  $\mathcal{G}_D$  を  $F_1, F_2, \dots, F_n$  とする. 左右対称性および補題 3 を考慮すれば  $D$  の終式  $F$  の T-scope が次のような場合を考えれば十分といえる.



$\textcircled{G}: F_2, \dots, F_n$  は normal でない.

この場合  $G$  に至る部分 deduction  $D_0$  は補題の各条件を満たし、 $h \vdash D_0 < h \vdash D$ . よって帰納法の仮定により  $D_0 \mid G$  は  $D_0^* \mid G$  に書きなおすことができ  $R(D_0, D_0^*)$  をみたち。この書きなおしにより  $D$  が  $D^*$  になったとすればあきらかに  $R(D, D^*)$  が成立する。終。

6.5. Remark. 必要不可欠な rule ではないが abstraction や extensionality に相当する次の B-rule を  $\text{EXTAS}^+ \text{S}(\text{PR})$  に追加した時も同様の結論を得るであろうか。

B-rule  $\frac{ta=ua}{t=u}$  ただし  $a$  は  $t, u$  に含まれない variable.

この問題を考えてみると、type の区別に関連した制限がわれわれの system にないことからくる困難に出会う。例えば B-rule のあとに S-rule が続く場合など、そういう制限が十分にあれば起り得ないことである。このような考察は別の機会にゆずるか、 $\bar{\Gamma}$  の無矛盾性証明のためだけならばわれわれの system で十分まにあう。

## 7. $\bar{\Gamma}$ の定義

7.1. 公理は  $\text{EXTAS}^+ \text{S}(\text{PR})$  に対する  $\bar{E}, \bar{P}, \bar{PR}$  と、 $Z$  に関する  $\bar{Z}$ .

$\bar{E}: \begin{cases} E1, E2, E3 \text{ 即ち } \forall x(x=x), \forall x \forall y(x=y \supset y=x), \forall x \forall y \forall z(x=y \& y=z \supset x=z) \\ EA, ES \text{ 即ち } \forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2(x_1=x_2 \& y_1=y_2 \supset (x_1 y_1)=(x_2 y_2)), \forall x \forall y(x=y \supset x'=y') \end{cases}$

$\bar{P}: P3 \ P4 \text{ 即ち } \forall x \forall y(x'=y' \supset x=y), \forall x \neg(x'=0)$

$\overline{PR}$ :  $EXTAS^+S^-(PR)$  の各 PR-axiom に対応する  $\forall$ -prenex closed form

$\overline{Z}$ :  $Z_0, Z_S, Z_E$  即ち  $Z(0), \forall x(Z(x) \supset Z(x')), \forall x \forall y (x=y \& Z(x) \supset Z(y))$

7.2. 論理系は LK に次の形の Grundsequenz を許したものの,  $LK^I$ .

$\mathcal{O}(0), \forall x(\mathcal{O}(x) \supset \mathcal{O}(x')), Z(t) \rightarrow \mathcal{O}(t)$  ( $\mathcal{O}(x)$  は任意の formula)

## 8. $\overline{\Gamma}$ の無矛盾性

**定理5.**  $\overline{\Gamma}$  は無矛盾である.

[証明]  $\overline{\Gamma}$  が矛盾していると仮定して定理4に反することを示す. 証明を次の三段階に分けよう.

[I]  $LK^I \vdash \overline{E}, \overline{P}, \overline{PR}, \overline{Z} \rightarrow \Rightarrow LK \vdash \overline{E}, \overline{P}, \overline{PR} \rightarrow$

[II]  $LK \vdash \overline{E}, \overline{P}, \overline{PR} \rightarrow \Rightarrow$  ある  $t$  に対し  $LK \vdash \overline{E}, \overline{P}, \overline{PR} \rightarrow t'=0$

[III]  $LK \vdash \overline{E}, \overline{P}, \overline{PR} \rightarrow t'=0 \Rightarrow EXTAS^+S^-(PR) \vdash t'=0$

[I]  $Z(*)$  を全て  $\forall \varphi [\varphi(0) \& \forall x (\varphi(x) \supset \varphi(x')) \supset \exists y (y=* \& \varphi(y))]$  に書きかえる操作を formula  $\mathcal{O}$  に施した結果を  $\mathcal{O}^\circ$  と表わせば,  $\mathcal{O}^\circ$  は, 2階の quantification を1階の formula にしか施さないよう制限した  $G^1LC$  ( $G^1LC^*$  と表す) の formula であり, 次が確かめられる.

**補題5.**  $\mathcal{O}(0)^\circ, \forall x(\mathcal{O}(x) \supset \mathcal{O}(x'))^\circ, Z(t)^\circ, \overline{E} \rightarrow \mathcal{O}(t)^\circ$  は  $G^1LC^*$  で証明可能.

**補題6.** (1)  $E1 \rightarrow Z_0^\circ$ , (2)  $ES \rightarrow Z_S^\circ$ , (3)  $E3 \rightarrow Z_E^\circ$  は  $G^1LC^*$  で証明可能.

したがって  $\Gamma, \Theta$  を  $Z$  を含まない formula の列とすれば,

$LK^I \vdash \Gamma, \overline{Z} \rightarrow \Theta$  より  $G^1LC^* \vdash \Gamma, \overline{Z}^\circ, \overline{E} \rightarrow \Theta$  さらに  $G^1LC^* \vdash \Gamma, \overline{E} \rightarrow \Theta$ .

ここで  $G^1LC^*$  の cut elimination theorem を用いて  $LK \vdash \Gamma, \overline{E} \rightarrow \Theta$ .

[II] 仮定より明らかに  $LK \vdash \overline{E}, \overline{P}, \overline{PR} \rightarrow \exists x(x'=0)$ . ここで LK に対

する verschärfte Hauptsatz と次の補題を考慮すればよい。

補題7.  $\forall$ 左,  $\exists$ 右,  $\exists$ 右 の推論図を含まないLKの証明図は終式を変えないで次のようなLKの証明図 $\mathbb{P}$ に書きなおせる。即ち $\mathbb{P}$ においては Verdünnung右, Vertauschung右の下式を除けば Sequenzの右辺は formula を高々一つしか含まない。

[Ⅳ] 仮定より  $NK(\bar{E}, P3, \bar{P}R) \vdash t' = 0$ 。一ち  $\bar{E}, P3, \bar{P}R$  はすべて、 $NK$  に  $EXTAS^+S^-(PR)$  をつけ加えた体系  $NK(EXTAS^+S^-(PR))$  で証明可能。したがって  $NK(EXTAS^+S^-(PR)) \vdash t' = 0$ 。ここでLKのHauptsatzに相当する Prawitz 70 の Normalization theorem を用いれば、このような証明図から論理記号に属する推論を含ませぬ  $t' = 0$  に至る証明図を得ることが出来る。そのような証明図は実は  $EXTAS^+S^-(PR)$  における  $t' = 0$  に至る deduction である。定理4 と矛盾。終。Remark.  $\tilde{T}$  には type に関するきびしい制限を置かなかつたので type をもたない term を含み、またそれらを含んだ命題が証明される。制限を加えて証明力を小さくすればなおさら無矛盾になる。

## 文 献

K. Gödel (1958) Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes, *Dialectica* 12, 280-287

Y. Hanatani (1966) Calculabilité des Fonctionnelles Récursives Primitives de Type Fini sur les Nombres Naturels, *Ann. of the Japan Assoc. for Philo. of Sci.*, vol 3, No 1, 19-30

D. Prawitz (1970) Ideas and results in proof theory, *Proc. of the Second Scandinavian Logic Symposium* (North-Holland 1971), 235-307

G. Takeuti (1955) On the fundamental conjecture of GLC I. *Journal of the Math. Soc. of Japan*, vol. 7, No. 3, 249-275