

退化した放物型方程式について.

名大 理 松沢 忠人.

§1. 序.

$\Omega, I \in$  それぞれ  $R_x = (-\infty < x < \infty), R_t = (-\infty < t < \infty)$  の開区間とし,  $\Omega \times I$  で定義された 次のような微分作用素について考へる:

$$(1.1) \quad P = \frac{\partial}{\partial t} - a(\alpha, t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b(\alpha, t) \frac{\partial}{\partial x} + c(\alpha, t).$$

係数に対する条件として

$$(1.2) \quad a(\alpha, t), b(\alpha, t), c(\alpha, t) \in C^\infty(\Omega \times I),$$

$$(1.3) \quad \operatorname{Re} a(\alpha, t) \geq 0 \quad \text{in } \Omega \times I,$$

(1.4) ある非負整数  $l$  が存在して, 任意の  $\alpha \in \Omega$  を固定する時,  $t$  の関数  $I \ni t \mapsto \operatorname{Re} a(\alpha, t)$  は,  $I$  に於て, 高々  $2l$  次, 偶数次の零をもつ (c.f. Nirenberg & Treves [6]),

$$(1.5) \quad |\operatorname{Im} a(\alpha, t)| \leq C \operatorname{Re} a(\alpha, t) \quad \text{in } \Omega \times I,$$

$$(1.6) \quad |\operatorname{Im} a_x(\alpha, t)| \leq C [\operatorname{Re} a(\alpha, t)]^{\frac{1}{2}} \quad \text{in } \Omega \times I,$$

$$(1.7) \quad |f(\alpha, t)| \leq C [\operatorname{Re} a(\alpha, t)]^{\frac{1}{2}} \quad \text{in } \Omega \times I.$$

以上の条件の下に次の定理を得る。

定理1. 微分作用素  $P$  が (1.2), ..., (1.7) の条件を満たすならば,  $P$  は  $\Omega \times I$  で hypoelliptic である。

例. 作用素

$$\frac{\partial}{\partial t} - (t^{2l} + x^{2m}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + i(t^l + x^m) \frac{\partial}{\partial x} + 1, \quad l, m \text{ integers}, > 0$$

は,  $R_x \times R_t$  の原点の近傍で上記の条件を満たす。

Parametrix を構成することによる放物型方程式の hypoellipticity の証明法が Mizohata, [5] によて与えられている。(c.f. Y. Kato, [4]).

以下では, ほぼ [4], [5] の procedure を pseudo-differential operators (Hörmander [1], [2] など) の言葉で書きあらためることにより 定理1の証明が得られることを示す。

即ち, 方程式

$$(1.8) \quad P_{x,t} E(\alpha, y, t, t') = \delta(\alpha - y, t - t') \quad \text{in } \Omega_x \times \Omega_y \times I_t \times I_{t'}$$

の近似解 (Parametrix) を構成することができることを示す。

## §2. Parametrix の構成.

$v(y, t') \in C_0^\infty(\mathbb{R}_{y, t'}^2)$  に対する部分 Fourier 変換  $\mathcal{E}$

$$(2.1) \quad \hat{v}(\xi, t') = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \int e^{-iy\xi} v(y, t') dy, \quad \xi \in \mathbb{R}_\xi^1$$

の  $j$  にか  $\bar{j}$ 。以下では  $I = (T_1 < t < T_2)$  とする。

今  $P$  の parametrix  $K = K(x, y, t, t') \in \mathcal{D}'(\Omega_x \times \Omega_y \times I_t \times I_{t'})$  が次の形にかけたと仮定する:

$$(2.2) \quad [Kv](x, t) = \int_{T_1}^t \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} K(x, \xi; t, t') \hat{v}(\xi, t') d\xi \right) dt',$$

$$v(y, t') \in C_0^\infty(\Omega_y \times I_{t'}).$$

ここで  $K(x, \xi; t, t')$  は  $(t, t') \in I_t \times I_{t'}$ ,  $\xi$  parameter とする

$\Omega = \Omega_x$  に対する pseudo-differential operator の symbol であり、従って

$$(2.3) \quad K(x, y, t, t') = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-y)\xi} K(x, \xi; t, t') d\xi$$

(Oscillatory sense, [2])

とかけるものと仮定するものである。

例之は、

$$P = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

の場合には

$$K(\alpha, \xi; t, t') = \begin{cases} e^{-\xi^2(t-t')} & t \geq t' \\ 0 & t < t' \end{cases}$$

であり.

$$K(\alpha, y, t, t') = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-t')}} \exp\left[-\frac{(\alpha-y)^2}{4(t-t')}\right]$$

であることは容易に確かめられる。

さて (2.2) のようにかけるものと仮定して、両辺に  $P = P_{\alpha, t}$  を施すと.

$$\begin{aligned} P[Kv](\alpha, t) &= \int_{T_1}^t \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \left[ \frac{\partial}{\partial t} - a(\alpha, t) \left( \frac{\partial}{\partial x} + i\xi \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + b(\alpha, t) \left( \frac{\partial}{\partial x} + i\xi \right) + c(\alpha, t) \right] \\ &\quad \cdot K(\alpha, \xi; t, t') \hat{v}(\xi, t') d\xi dt' + \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} K(\alpha, \xi; t, t') \hat{v}(\xi, t') d\xi \Big|_{t'=t} \end{aligned}$$

方程式 (1.8) 及び上記熱方程式の場合に示唆されて 次のような Cauchy 問題が考えられる:

$$\begin{aligned} (2.4) \quad & \left[ \frac{\partial}{\partial t} - a(\alpha, t) \left( \frac{\partial}{\partial x} + i\xi \right)^2 + b(\alpha, t) \left( \frac{\partial}{\partial x} + i\xi \right) + c(\alpha, t) \right] \\ & \cdot K(\alpha, \xi; t, t') = 0 \quad \text{in } \Omega \times R_{\frac{1}{2}} \times \Delta, \\ & \Delta \equiv \{ (t, t') ; T_1 < t' < t < T_2 \}, \end{aligned}$$

$$(2.5) \quad K(\alpha, \xi; t, t') \Big|_{t=t'} = 1,$$

$$(2.6) \quad K(\alpha, \xi; t, t') = 0 \quad t' > t.$$

問題(2.4), (2.5)の解を次のような逐次近似の方法で解きたい。(2.4)の左辺の作用素を2つに分けて

$$L_1 = \frac{\partial}{\partial t} + a(\alpha, t)\xi^2 \quad (\text{主要部}),$$

$$L_2 = -2i\xi a(\alpha, t)\frac{\partial}{\partial x} - a(\alpha, t)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b(\alpha, t)\frac{\partial}{\partial x} + i\xi b(\alpha, t) + c(\alpha, t)$$

とおく。これは  $\Omega_x \times R_\xi \times I_t$  における作用素である。

第1近似を求める:

$$(2.7) \quad L_1 K_0 = \left[ \frac{\partial}{\partial t} + a(\alpha, t)\xi^2 \right] K_0(\alpha, \xi; t, t') = 0$$

in  $\Omega_x \times R_\xi \times \Delta$ ,

$$(2.8) \quad K_0(\alpha, \xi; t, t') \Big|_{t=t'} = 1.$$

これは  $(\alpha, \xi, t)$  を parameter とする常微分方程式 (int) の初期値問題であるが 解  $K_0$  は次のように解ける:

$$(2.9) \quad K_0(\alpha, \xi; t, t') = \exp\left(-\int_{t'}^t a(\alpha, \tau)\xi^2 d\tau\right) \quad \text{in } \Omega_x \times R_\xi \times \bar{\Delta},$$

$$\bar{\Delta} \equiv \{(t, t') ; T_1 < t' \leq t < T_2\}.$$

$$K_0(\alpha, \xi; t, t') = 0 \quad t < t'$$

としよ。

次に  $K_j(\alpha, \xi; t, t')$ ,  $j=0, 1, 2, \dots$  を下のように初期値問題の解として逐次定義する:

$$(2.10) \quad \left[ \frac{\partial}{\partial t} + a(\alpha, t)\xi^2 \right] K_{j+1}(\alpha, \xi; t, t') = -L_2 K_j(\alpha, \xi; t, t')$$

in  $\Omega_x \times R_\xi \times \Delta$ ,

$$(2.11) \quad K_{j+1}(\alpha, \xi; t, t') \Big|_{t=t'} = 0$$

$$(2.12) \quad K_{j+1}(\alpha, \xi; t, t') = 0 \quad \text{if } t < t'.$$

$K_{j+1}$  は容易に求まって.

$$(2.13) \quad K_{j+1}(\alpha, \xi; t, t') = - \int_{t'}^t \exp \left[ - \int_s^t a(\alpha, \tau) \xi^2 d\tau \right] \cdot L_2 K_j(\alpha, \xi; s, t') ds$$

$$= - \int_{t'}^t K_0(\alpha, \xi; t, s) L_2 K_j(\alpha, \xi; s, t') ds$$

in  $\Omega \times R_\xi \times \bar{\Delta}$ .

さて (2.2) 式のようにして  $K_j(\alpha, y, t, t') \in \mathcal{D}'(\Omega_x \times \Omega_y \times I_t \times I_{t'})$  が次のように定義されるものとする:

$$(2.14) \quad [K_j v](\alpha, t) \equiv \int_{T_1}^t \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha\xi} K_j(\alpha, \xi; t, t') \hat{v}(\xi, t') d\xi \right) dt'$$

$v \in C_0^\infty(\Omega_y \times I_{t'})$ .

即ち

$$(2.15) \quad K_j(\alpha, y, t, t') = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\alpha-y)\xi} K_j(\alpha, \xi; t, t') d\xi$$

と定義されるものとする。と  $K_j(\alpha, \xi; t, t')$  の作り方 (c.f. (2.10)) から形式的な計算により

$$(2.16) \quad P_{\alpha, t} [K_0(\alpha, y, t, t') + \dots + K_\mu(\alpha, y, t, t')] \\ = \delta(\alpha-y, t, t') + \int_{T_1}^t \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\alpha-y)\xi} L_2 K_\mu(\alpha, \xi; t, t') d\xi$$

が成り立つことが分る。

次の §2 (2.16) 式が実際に意味をもち  $\sum_{j=0}^{\mu} K_j$  が parametrix としての性質をもつことを説明する。

§3.  $K_j(\alpha, \xi; t, t')$ ,  $K_j(\alpha, y, t, t')$  の性質。まとめ。

記号を整理しておく。

$\Omega$ :  $R_x = (-\infty < x < \infty)$  の開区間,

$I$ :  $R_t$  の開区間:  $(T_1 < t < T_2)$ ,

$\Delta = \{ (t, t'); T_1 < t' < t < T_2 \}$ ,

$\bar{\Delta} = \{ (t, t'); T_1 < t' \leq t < T_2 \}$ .

次に  $\Omega$  に於ける pseudo-differential operator の symbol の定義を [2] から引用する:

$m, p, \delta$  は実数で  $0 \leq p \leq 1, 0 \leq \delta \leq 1$  とする。この時  $a = a(x, \xi) \in C^\infty(\Omega \times R_{\frac{1}{3}})$  が  $S_{p, \delta}^m(\Omega \times R_{\frac{1}{3}})$  に属する (次数  $m$ , type  $p, \delta$  の symbol である) とは, 任意の compact set  $K \subset \Omega$  と任意の整数  $\alpha, \beta (\geq 0)$  に対して ある定数  $C_{\alpha, \beta, K}$  が存在して不等式

$$(3.1) \quad |D_x^\beta D_\xi^\alpha a(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta, K} (1 + |\xi|)^{m - p\alpha + \delta\beta}, \quad x \in K, \xi \in R_{\frac{1}{3}}$$

が成り立つ時を云う。

$$S^{-\infty} = S_{p, \delta}^{-\infty} = \bigcap_m S_{p, \delta}^m$$

と略記する。  $S_{p, \delta}^m(\Omega \times R_{\frac{1}{3}})$  は (3.1) の best constants による位相で Fréchet 空間となる。

定義 3.1.  $\Lambda \subset R_t \times R_{t'}$  に対して  $K(x, \xi; t, t') \in \mathcal{E}^0(\Lambda; S_{p, \delta}^m(\Omega \times R_{\frac{1}{3}}))$  とは

- i)  $K(x, \xi; t, t') \in S_{p, \delta}^m(\Omega \times R_{\frac{1}{3}}) \quad \forall (t, t') \in \Lambda,$
- ii)  $(t, t')$  が  $\Lambda$  に動く時  $K(x, \xi; t, t')$  は  $S_{p, \delta}^m(\Omega \times R_{\frac{1}{3}})$  に値をとる連続写像となる。

定義 3.2. 同じく  $\Lambda \subset R_t \times R_{t'}$  と整数  $p \geq 0$  に対して  $K(x, \xi; t, t') \in \mathcal{E}^p(\Lambda; S_{p, \delta}^m(\Omega \times R_{\frac{1}{3}}))$  とは



i)  $D_{t,t'}^j K(\alpha, \xi; t, t') \in \mathcal{E}^0(\Lambda; S_{p,\delta}^m(\Omega \times \mathbb{R}_\xi^3))$ ,  $0 \leq j \leq P$   
 二で  $D_{t,t'}^j$  は  $t, t'$  に関する  $j$  次の微分を表わすものとす。

$\Omega, I$  を少し縮小する二により (それら二再び  $\Omega, I$  とかく二にして) 次の Proposition を得る。

Proposition 3.3.  $\forall \varepsilon > 0$  と  $0 < \forall \lambda < 1$  二対して

$$(3.2) \quad K_j(\alpha, \xi; t, t') \in \bigcap_{p \geq 0} \mathcal{E}^p(\Lambda; S_{1, \frac{2\ell}{2\ell+1}}^{2+2p - \frac{\lambda j}{2\ell+1}}(\Omega \times \mathbb{R}_\xi^3)), \quad j=0, 1, 2, \dots,$$

$$(3.3) \quad |(K_0(\alpha, \xi; t, t') - 1)(1 + |\xi|)^{-\varepsilon}| \rightarrow 0 \text{ in } \Omega \times \mathbb{R}_\xi^3 \text{ when } t \downarrow t',$$

$$(3.4) \quad |D_{t,t'}^p D_x^\beta D_\xi^\alpha K_0 (1 + |\xi|)^{\frac{-\beta \times 2\ell}{2\ell+1} - 2p + \alpha - \varepsilon}| \rightarrow 0 \text{ in } \Omega \times \mathbb{R}_\xi^3 \text{ when } t \downarrow t' \text{ if } 2p < \alpha,$$

$$(3.5) \quad |D_{t,t'}^p D_x^\beta D_\xi^\alpha K_j (1 + |\xi|)^{\frac{-\beta \times 2\ell}{2\ell+1} - 2p + \alpha + \frac{\lambda j}{2\ell+1} - \varepsilon}| \rightarrow 0 \text{ in } \Omega \times \mathbb{R}_\xi^3 \text{ when } t \downarrow t' \text{ if } 0 \leq p < j.$$

二の命題の証明二は次の二つの Lemma 二基本的である。

Lemma 3.4. (c.f. [5], [6]) 条件 (1.3), (1.4) の下二。

任意の compact set  $K \subset \Omega \times I$  二対してある定数  $C > 0$  二存在して

$$(3.7) \quad |\operatorname{Re} a_n(\alpha, t)| \leq C (\operatorname{Re} a_n(\alpha, t))^{\frac{1}{2}} \quad \alpha, t) \in K.$$

Lemma 3.5. (C.f. [6]) 条件 (1.3), (1.4) の下は, 任意の Compact set  $K \subset \Omega \times I$  に対してある定数  $\delta > 0$  が存在して

$$(3.8) \quad \delta (t-t')^{2l+1} \leq \operatorname{Re} \int_{t'}^t a(\alpha, \tau) d\tau,$$

$\Rightarrow \exists (\alpha, t), (\alpha, t') \in K$  かつ  $t' \leq t$  とする。

さて Proposition 3.3 をよ。

$$K_j(\alpha, y, t, t') = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\alpha-y)\xi} K_j(\alpha, \xi; t, t') d\xi, \quad j=0,1,\dots,$$

$$F_j(\alpha, y, t, t') = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\alpha-y)\xi} L_2 K_j(\alpha, \xi; t, t') d\xi, \quad j=0,1,\dots$$

は意味をもち (2.16) 式が成り立つこと分かる。

又 Prop. 3.3 から次のこと分かる。

Proposition 3.6.  $K_j(\alpha, y, t, t'), F_j(\alpha, y, t, t'), j=0,1,\dots,$

は  $W = \{(x, y, t, t') \in \Omega \times R_y \times I \times I; |\alpha-y| + |t-t'| > 0\}$  に対して無限回微分可能である。更には

$$(3.9) \quad D_{t,t'}^p D_x^\beta D_y^\alpha K_j(\alpha, y, t, t') \in C^0(\Omega_x \times R_y \times I \times I)$$

if  $\frac{\beta \times 2l}{2l+1} + \alpha + 2p < \frac{j}{2l+1} - 1,$

$$(3.10) \quad D_{t,t'}^p D_x^\beta D_y^\alpha F_j(\alpha, y, t, t') \in C^0(\Omega_x \times \Omega_y \times I \times I)$$

if  $\frac{\beta \times 2l}{2l+1} + \alpha + 2p + 2 < \frac{j}{2l+1} - 1.$

Proposition 3.7. 各  $K_j(\alpha, y, t, t')$  は  $(y, t')$  及び  $(x, t)$  に関して regular (Schwarz, [9] の意味で) である。

以上の考察をまとめると 得る

$$P_{\alpha, t} \left( \sum_{j=1}^{\mu} K_j(\alpha, y, t, t') \right) = \delta(\alpha y, t, t') + F_{\mu}(\alpha, y, t, t'), \quad \mu = 0, 1, 2, \dots$$
 が成り立ち. 命題 3.6, 3.7 とにより 次の二つに分れた.

(i)  $\sum_{j=0}^{\mu} K_j(\alpha, y, t, t') \in C^{\infty}(W), \quad \mu = 0, 1, 2, \dots,$

(ii)  $\sum_{j=0}^{\mu} K_j(\alpha, y, t, t')$  は Schwartz, [9] の意味で very regular である,

(iii)  $F_{\mu}(\alpha, y, t, t')$  は  $\mu$  が大きくなるにつれて  $\Omega \times \mathbb{R}_y \times I \times I$  に於て より滑らかな関数となる.

以上の三つの事実から  $P$  の共役作用素  $tP$  が  $\Omega \times I$  で hypoelliptic なることが従う.  $t \rightarrow -t$  なる変換により  $tP$  が 5.1 の諸条件を満すことが分るから. 結局  $P$  の  $\Omega \times I$  に於ける hypoellipticity が分る.

以上. 定理 1 の一つの証明法のアラマシを述べた.

最後に. 今考えられる問題を少し挙げておく.

問題 1. 係数  $a(\alpha, t), b(\alpha, t), c(\alpha, t)$  及び右辺  $f(\alpha, t)$  が  $C^{\infty}(\Omega \times I)$  である上に  $x$ -方向に解析的であ

る時 解  $u(x, t)$  も  $x$  方向に解析的であることを証明する。

問題 2. 係数に対して同じ条件の下に、

$$\sum_{j=0}^{\infty} K_j(x, y, t, t')$$

が収束することを証明する。

問題 3. 係数に対する滑らかさの仮定をもっと弱くして Parametrix (or 素解) を構成する。

問題 4. もっと広い範囲の退化した放物型作用素に対して Parametrix (or 素解) を構成する。

例としては

a) 多変数の作用素の場合に <sup>ついで</sup> 考えること、

b) もっと essential に広い範囲の作用素に対して考察することなど。

## References

- [1] Hörmander, L.: Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations, Amer. Math. Soc. Symp. Pure Math., 10 (1966), Singular integral operators, 138-183.
- [2] Hörmander, L.: Fourier integral operators, I, Acta Math., 127 (1971), 79-183.
- [3] Hörmander, L.: Hypoelliptic second order differential equations, Acta Math. 119 (1968), 147-171.
- [4] Kato, Y.: The hypoellipticity of degenerate parabolic differential operators, Jour. Funct. Analysis, Vol. 7, No. 1 (1971), 116-131.
- [5] Mizokata, S.: Hypoellipticité des équations paraboliques, Bull. Soc. Math. France, 85 (1957), 15-50.
- [6] Nirenberg, L. & Treves, F.: On local solvability of linear partial differential equations, Part I: Necessary conditions. Comm. Pure Applied Math., Vol. 24<sup>3</sup> (1970), 1-38.
- [7] Treves, F.: A new method of proof of the subelliptic estimates, Comm. Pure Applied Math., Vol. 24 (1971), 71-115.
- [8] Treves, F.: Analytic-hypoelliptic partial differential equations of principal type, Comm. Pure Applied

Math., Vol. 24 (1971), 537-570.

- [9] Schwartz, L.: *Théorie des distributions*, Vol. I,  
Hermann, Paris, (1957).