

回転および非回転成層流体の  
温度変化過程

京大 工 航空 松 田 卓也

§ 1. 序

鉛直軸のまわりに角速度  $\Omega$  で回転している円柱型容器に入っている流体を考える。容器の角速度をわずかに変化させた場合に流体がどのようにふるまうかを調べるのがいわゆる linear spin-up 問題である。非圧縮性流体で温度が一定の場合には Greenspan & Howard (1963) により、安定な温度成層の場合には Holton (1965), Pedlosky (1967), Walin (1969), Sakurai (1969 a, b), Sakurai, Clark & Clark (1971 a, b) により詳しく研究された。いずれの場合も容器の上下底の水平壁にそってできる Ekman 層が子午面環流を誘起し、それによって角運動量が壁から内部の流体に輸送される。この spin-up time は環流が容器を一周する時間でありその大きさは  $\Omega^{-1} E^{-1/2}$  の程度である。ここで  $E = \nu / H^2 \Omega$  は Ekman 数  $H$  は容器の高さ、 $\nu$  は動粘性係数である。spin-up time は  $E$  が小さいとき粘性拡散時間  $\Omega^{-1} E^{-1}$  より短い。

さて成層流体と回転流体の間にはある対応関係がある事が知られてゐる。(Greenspan 1967) Veronis (1967a, b) はこの問題をさらに詳しく調べ、回転流体を記述する変数を適当によみかえると成層流体の式が得られる事を示した。しかしこの対応は Prandtl 数  $\sigma (= \nu/\kappa)$  が 1 で、さらに成層流体が二次元的運動をする場合に限られる。ここで我々が議論する円柱容器の heat-up は彼の三次元的問題であり、しかも  $\sigma$  を残しておく。回転流体の spin-up に対応する現象は、成層流体の側壁の温度の急激な変化に対する内部流体の温度変化過程 (heat-up) である。この論文では容器が回転してゐる場合と、速く回転してゐる場合の heat-up を調べる。

詳しい定量的議論に入るまえに、側壁の温度を少し変化させた場合どのような事がおこるかを定性的に考えてみよう。たとえば側壁の温度が上昇すると壁近くの流体の温度は熱伝導で上昇し、流体は膨張によつて軽くなつて上昇運動をする。そのような上昇流のある境界層を浮力層と呼ぶ。浮力層内では流体に働く浮力は壁による粘性力とつりあうので

$$(1) \quad \alpha g \bar{T} \sim \nu \bar{q}_z / \delta^2,$$

ここで  $\alpha$  は熱膨張率、 $g$  は重力加速度、 $T$  は基準温度からのずれ、 $q_z$  は  $z$  方向の速さ、 $\delta$  は境界層の厚み、 $\bar{\quad}$  は境界層の量をあらわす。また浮力層内では熱伝導による熱の流入と鉛直流によ

る熱の流出はつりあうので

$$(2) \quad \bar{q}_z \Delta T / H \sim k \bar{T} / \delta^2,$$

ここで  $\Delta T / H$  は基準状態の温度勾配,  $k$  は熱伝導率である。

(1), (2) から浮力層の厚み  $\delta$  を求めると

$$(3) \quad \delta \sim (\sqrt{kD} N^{-1})^{1/2} = \sigma^{1/4} (k/N)^{1/2} = H E_N^{1/2},$$

但し  $N$  は Brunt-Väisälä 振動数,  $E_N$  は Ekman 数に対応した量である。

$$(4) \quad N \equiv (\alpha g \Delta T / H)^{1/2}, \quad E_N \equiv \sqrt{kD} / (H^2 N) = E / (\sigma S)^{1/2},$$

但し  $S$  は thermal Rossby number で  $S \equiv \alpha g \Delta T / (H \Omega^2) = (N / \Omega)^2$ 。

浮力層内の鉛直流は容器内部の非粘性非伝導の流体をすべり内部域の流れを誘起する。連続方程式から

$$(5) \quad \bar{q}_z H \sim \bar{q}_z \delta.$$

内部流体の鉛直方向の移動は対流効果を持つのである点での温度変化は,  $\tau$  をその time-scale とすると次の式であらわせる。

$$(6) \quad \tau / \tau \sim \bar{q}_z \Delta T / H.$$

これらの式から  $\tau$  を求めると

$$(7) \quad \tau \sim \sigma^{1/4} (H^2 / NK)^{1/2} = N^{-1} E_N^{-1/2}.$$

時刻  $\tau$  後には内部流体の温度は壁の温度に一致し, 新しい成層状態が達成される。非回転流体の heat-up time は  $\sigma=1$  のとき  $N$  を  $\Omega$ ,  $E_N$  を  $E$  と読みかえれば一様流体の spin-up time と一致する。

上の議論では暗に容器の非回転を仮定した。もし回転し

ているとゴリオリカの為、内部流体は動径方向に自由に動ける  
 ので側壁の境界層の影響はその附近に限定される。側壁  
 の影響を受ける層の厚みを  $\Delta r$  とすると円柱座標をとって  $r, \theta,$   
 $z$  方向の力のつりあいを考えると、 $\rho_0$  を基準密度、 $P$  を圧力とし

$$(8) \quad \rho_0 \Omega g_\theta \sim P/\Delta r,$$

$$(9) \quad g_\theta/t \sim \Omega g_r,$$

$$(10) \quad \rho_0 \alpha g_T \sim P/H.$$

さらに連続の式

$$(11) \quad g_z/H \sim g_r/\Delta r,$$

$$(12) \quad \bar{g}_r/\sigma \sim g_z/H,$$

を用い  $g_r \sim \bar{g}_r$ ,  $T \sim \bar{T}$  を考慮すると

$$(13) \quad \Delta r \sim \sqrt{\sigma} H,$$

$$(14) \quad t \sim (\sigma \rho_0)^{1/2} N^{-1} E_N^{-1/2},$$

を得られる。但し  $\Delta r$  が円柱容器の半径  $R$  より大きい時は  
 $\Delta r = R$  とおいて、 $r_0 \equiv R/H$  とすると次の式を得る。

$$(15) \quad t \sim \sigma^{1/2} r_0 N^{-1} E_N^{-1/2}.$$

## § 2 基礎方程式

我々が用いる基礎方程式は回転系から見た非圧縮性流体の  
 Navier-Stokes 方程式と Boussinesq 近似式で次のように書かれる。

$$(16) \quad \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla \mathbf{q} + 2\Omega \times \mathbf{q} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + g \alpha T \hat{k} + \alpha T \nabla \left( \frac{\Omega^2 r^2}{2} \right) + \nu \nabla^2 \mathbf{q},$$

$$(17) \quad \nabla \cdot \mathbf{q} = 0,$$

$$(18) \quad \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla T + \frac{\Delta T}{H} q_z = \kappa \nabla^2 T,$$

$$(19) \quad P' = -\rho \alpha T,$$

ここで  $\mathbf{q} = (q_r, q_\theta, q_z)$ ,  $\hat{k}$  は z 方向の単位ベクトル,  $\rho$  は平均密度,  $\rho'$  は密度のずれ,  $T$  は安定成層の温度分布からのずれである。

(18) の左辺第三項は安定成層による対流項を別にとり出したものである。いま遠心力が重力に比べて十分小さいとする ( $\Omega^2 R/g \ll 1$ ) と (16) の右辺第三項の遠心力による浮力は無視できる。無次元変数  $q'$  ... を次のように定義する。

$$\frac{\partial}{\partial t} = \sqrt{\frac{g \alpha \Delta T}{H}} \frac{\partial}{\partial t'} = N \frac{\partial}{\partial t'}, \quad \mathbf{q} = \sqrt{\frac{g \alpha H}{\Delta T}} \Delta T_c \mathbf{q}', \quad T = \Delta T_c \sqrt{\sigma} T',$$

$$(20) \quad P = g \alpha \Delta T_c \rho H \sqrt{\sigma} P', \quad \nabla = \nabla' / H,$$

但しここで  $\Delta T_c$  は Heat up の際の壁の温度の変化中である。

(20) を (16)~(19) に代入し、をあとすと

$$(21) \quad \sigma^{-1/2} \left( \frac{\partial \mathbf{q}'}{\partial t'} + \varepsilon \mathbf{q}' \cdot \nabla' \mathbf{q}' \right) + 2(\sigma \sigma')^{1/2} \hat{k} \times \mathbf{q}' = -\nabla' P' + T' \hat{k} + E_N \nabla'^2 \mathbf{q}',$$

$$(22) \quad \nabla' \cdot \mathbf{q}' = 0,$$

$$(23) \quad \sigma^{-1/2} \left( \frac{\partial T'}{\partial t'} + \varepsilon \mathbf{q}' \cdot \nabla' T' \right) + q'_z = E_N \nabla'^2 T',$$

但し  $\varepsilon \equiv \Delta T_c / \Delta T$  は非線型性の程度を示す。非線型項を無視し  $F \equiv (\sigma S)^{-1/2}$  とおき (21)~(23) を円柱座標でかくと

$$(24) \quad \sigma^{-1/2} \frac{\partial q_r}{\partial t} - 2Fq_\theta = -\frac{\partial P}{\partial r} + E_N \mathcal{L} q_r$$

$$(25) \quad \sigma^{-1/2} \frac{\partial q_\theta}{\partial t} + 2Fq_r = E_N \mathcal{L} q_\theta$$

$$(26) \quad \sigma^{-1/2} \frac{\partial q_z}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z} + T + E_N \nabla^2 q_z$$

$$(27) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r q_r) + \frac{\partial q_z}{\partial z} = 0$$

$$(28) \quad \sigma^{1/2} \frac{\partial T}{\partial t} + q_z = E_N \nabla^2 T$$

$$\text{但し} \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \mathcal{L} = \nabla^2 - \frac{1}{r^2}$$

流れ函数  $\psi$  を次のように定義すると (27) は自動的に満たされる。

$$(29) \quad q_r = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad q_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \psi)$$

(29) を (24)~(28) に代入し (24) と (26) から  $P$  を消去し、さらに次のような scale 変換を行う。

$$(30) \quad t = \sigma^{1/2} E_N^{-1/2} t^*, \quad \psi = E_N^{1/2} \psi^*,$$

そして \* をとると

$$(31) \quad E_N \left( \frac{\partial}{\partial t} - \sigma E_N^{1/2} \mathcal{L} \right) \mathcal{L} \psi - 2F \sigma \frac{\partial q_\theta}{\partial z} + \sigma \frac{\partial T}{\partial r} = 0,$$

$$(32) \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} - \sigma E_N^{1/2} \mathcal{L} \right) q_\theta + 2F \sigma \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0,$$

$$(33) \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} - E_N^{1/2} \nabla^2 \right) T - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\psi) = 0.$$

$F=0$ とおけば非回転の式が得られる。

$$\text{初期条件} \quad \psi = \varrho_\theta = T = 0, \quad t \leq 0,$$

$$\text{境界条件} \quad \psi = \partial\psi/\partial z = \varrho_\theta = 0, \quad T = \Delta T_c(\delta) \quad \text{for } z = \delta, \quad 0 \leq r < r_0, \quad t > 0$$

$$\psi = \partial\psi/\partial r = \varrho_\theta = 0, \quad T = \Delta T_c(z) \quad \text{for } 0 < z < 1, \quad r = r_0.$$

ここで  $\delta = 0$  or  $1$ ,  $\Delta T_c(z)$  は側壁の温度変化量である。次の

§3 で  $F=0$  の場合と §4 で  $F=O(1)$  の場合を調べる。

### §3. 非回転の場合\*

変数を内部成分と浮力層成分の和としてあらわす。

$$(34) \quad T = T_I + \bar{T}, \quad \psi = \psi_I + \bar{\psi}$$

そしてそれぞれを次のように展開する。

$$(35) \quad T_I = T_I^{(0)} + E_N^{1/2} T_I^{(1)} + E_N^{1/4} T_I^{(2)} + \dots, \dots,$$

内部非粘性非伝導域

(34), (35) と (31)~(33) に代入し,  $F=0$  とおいて, さらに 0 次項のみを

とると

$$(36) \quad \frac{\partial T_I^{(0)}}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial T_I^{(0)}}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\psi_I^{(0)}).$$

これを解くと

$$(37) \quad T_I^{(0)} = T_w^{(0)}(z, t), \quad \psi_I^{(0)} = \psi_w^{(0)}(z, t) r/r_0.$$

\* この場合は Sakurai & Matsuda (1972) により調べられた。

## 浮力層域

§1 で浮力層の厚みは  $E_N^{1/2}$  である事が知られているので

$$r = r_0 - E_N^{1/2} \beta$$

で浮力層内の stretched variable  $\beta$  を導入する。

$$(38) \quad \frac{\partial^4 \bar{\Psi}^{(0)}}{\partial \beta^4} + \frac{\partial \bar{T}^{(0)}}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial^2 \bar{T}^{(0)}}{\partial \beta^2} - \frac{\partial \bar{\Psi}^{(0)}}{\partial \beta} = 0.$$

これらと次の境界条件のもとに解く。

$$(39) \quad \Psi^{(0)} (= \Psi_I^{(0)} + \bar{\Psi}^{(0)}) = 0, \quad \partial \Psi^{(0)} / \partial r = 0, \quad T^{(0)} (= T_I^{(0)} + \bar{T}^{(0)}) = \Delta T_c(z) \text{ at } r = r_0.$$

(38) の解は

$$(40) \quad \bar{\Psi}^{(0)} = -\Psi_w^{(0)} e^{-\beta/\sqrt{2}} \left[ \cos \frac{\beta}{\sqrt{2}} + \sin \frac{\beta}{\sqrt{2}} \right],$$

$$(41) \quad \bar{T}^{(0)} = \sqrt{2} \Psi_w^{(0)} e^{-\beta/\sqrt{2}} \cos \frac{\beta}{\sqrt{2}}.$$

温度に対する側壁の境界条件は結局、次のようになる。

$$(42) \quad T_w^{(0)} + \sqrt{2} \Psi_w^{(0)} = \Delta T_c(z).$$

(36), (37), (42) から  $\Psi_w^{(0)}$  のみたすべき式は

$$(43) \quad \frac{\partial \Psi_w^{(0)}}{\partial t} + \frac{\sqrt{2}}{r_0} \Psi_w^{(0)} = 0.$$

$t=0$  で  $T_w^{(0)}(z,0) = 0$  であるから  $\Psi_w^{(0)}$  の初期条件は  $\Psi_w^{(0)}(z,0) = \Delta T_c(z) / \sqrt{2}$ 。

結局求める解は

$$(44) \quad \Psi_I^{(0)} = \frac{\Delta T_c(z)}{\sqrt{2}} \frac{r}{r_0} e^{-\frac{\sqrt{2}}{r_0} t}, \quad T_I^{(0)} = \Delta T_c(z) [1 - e^{-\frac{\sqrt{2}}{r_0} t}].$$

これらの解は上下底での境界条件を満足しているのと、 $T$  と  $\Psi$  の接続は上下底にそう適当な境界層を通じて達成される。



## § 4. 回転の速い場合\*

ここでは  $F=O(1)$  つまり  $\sqrt{N} \sim \Omega$  の場合を考える。

内部非粘性非伝導域の解を  $E_N^{1/4}$  で展開し 0 次項のみをとると

$$(45) \quad 2F \frac{\partial \varrho_0^{(0)}}{\partial z} - \frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} = 0,$$

$$(46) \quad \frac{\partial \varrho_0^{(0)}}{\partial t} + 2F\sigma \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial z} = 0,$$

$$(47) \quad \frac{\partial T^{(0)}}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \psi^{(0)}) = 0,$$

内部域を示す添字 I ははぶいた。

## 側壁の境界層

側壁にその境界層は  $F=O(1)$  の場合、 $E_N^{1/2}$  の厚さの浮力層と  $E_N^{1/4}$  の拡散境界層がある。次の式で  $E_N^{1/4}$  層、 $E_N^{1/2}$  層内の stretched variable  $\alpha, \beta$  を定義する。

$$(48) \quad r = r_0 - E_N^{1/4} \alpha, \quad r = r_0 - E_N^{1/2} \beta.$$

側壁の境界層で変数をつきのように展開する。

$$(49) \quad \begin{aligned} \psi &= \psi^{(0)}(r, z) + E_N^{1/4} \psi^{(1)}(r, z) + \dots \\ &+ \bar{\psi}^{(0)}(\alpha, z) + E_N^{1/4} \bar{\psi}^{(1)}(\alpha, z) + \dots \\ &+ \bar{\bar{\psi}}^{(0)}(\beta, z) + E_N^{1/4} \bar{\bar{\psi}}^{(1)}(\beta, z) + \dots \end{aligned}$$

これらと (31)~(33) に代入し  $\bar{\psi}^{(0)}(\alpha \rightarrow \infty) = 0$ ,  $\bar{\bar{\psi}}^{(0)}(\beta \rightarrow \infty) = 0$  などに注意すると境界層方程式が得られる。0 次項のものだけ書くと

\* この場合少し異なった定式化が Matsuda & Sakurai (1972) により行なわれている。

$$(50) \quad \frac{\partial \bar{q}_0^{(0)}}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \bar{q}_0^{(0)}}{\partial \alpha^2}$$

$$(51) \quad \frac{\partial^2 \bar{\Psi}^{(0)}}{\partial \beta^4} + \frac{\partial \bar{T}^{(0)}}{\partial \beta} = 0$$

$$(52) \quad \frac{\partial^2 \bar{T}^{(0)}}{\partial \beta^2} - \frac{\partial \bar{\Psi}^{(0)}}{\partial \beta} = 0$$

(50) の解  $\bar{q}_0^{(0)}$  は内部解に影響を与えない。(51), (52) の解は、すでに与えられておるのでこれを用いると側壁での温度に対する境界条件が決定される。

$$(53) \quad T^{(0)} + \sqrt{2} \Psi^{(0)} = \Delta T_c(z) \quad \text{on } r=r_0, \quad 0 < z < 1.$$

### 水平壁の境界層

水平壁にとっては厚さ  $E_N^{1/4}$  の拡散境界層の他に厚さ  $E^{1/2}$  の Ekman 層があるが  $E_N = FE$  だから  $F=O(1)$  のとき  $E_N^{1/2}$  層と考えると良い。

$$(54) \quad Z_j = j + (-1)^j E_N^{1/4} \xi_j, \quad Z_j = j + (-1)^j E_N^{1/2} \eta_j \quad \text{but } j=0, 1$$

で拡散境界層, Ekman 層の stretched variable  $\xi_j, \eta_j$  を定義する。

$$(55) \quad \begin{aligned} \Psi_j &= \Psi_j^{(0)}(r, z) + E_N^{1/4} \Psi_j^{(1)}(r, z) + \dots \\ &+ \hat{\Psi}^{(0)}(r, \xi_j) + E_N^{1/4} \hat{\Psi}^{(1)}(r, \xi_j) + \dots \\ &+ \hat{\Psi}^{(0)}(r, \eta_j) + E_N^{1/4} \hat{\Psi}^{(1)}(r, \eta_j) + \dots \end{aligned}$$

のように変数を展開し (31), (33) に代入, 0 次項のみをとると

$$(56) \quad \frac{\partial \hat{T}_j^{(0)}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \hat{T}_j^{(0)}}{\partial \xi_j^2}$$

$$(57) \quad \frac{\partial^4 \hat{\Psi}_j^{(0)}}{\partial \eta_j^4} + 2F(-1)^j \frac{\partial \hat{q}_{0j}^{(0)}}{\partial \eta_j} = 0$$

$$(58) \quad \frac{\partial^2 \hat{q}_0^{(0)}}{\partial \eta_i^2} - 2F(-1)^j \frac{\partial \hat{\Psi}_j^{(0)}}{\partial \eta_i} = 0$$

$\hat{T}_j^{(0)}$  は内部解に影響を与えない。 (57)(58) に適当な境界条件を

$$(59) \quad \hat{\Psi}_j^{(0)} = -\frac{1+i}{2} \Psi^{(0)} [e^{-\sqrt{F}(1+i)\eta_i} - i e^{-\sqrt{F}(1-i)\eta_i}] ,$$

$$(60) \quad \hat{q}_0^{(0)} = (-1)^j \sqrt{F} \Psi^{(0)} [e^{-\sqrt{F}(1+i)\eta_i} + e^{-\sqrt{F}(1-i)\eta_i}] .$$

内部解  $q_0^{(0)}$  に対する境界条件は (60) を用いて

$$(61) \quad q_0^{(0)} + 2(-1)^j \sqrt{F} \Psi^{(0)} = 0 .$$

(45)~(47) を解く為に Laplace 変換を行う。  $\Psi^{(0)}, q_0^{(0)}, T^{(0)}$  の  $z$  に関

して Laplace 変換した量を  $\Psi, Q, J$  とあらわすと (45)~(47) は

$$(62) \quad S \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Psi) \right) + 4 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0$$

$$(63) \quad Q = -\frac{2F\sigma}{\tau} \frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

$$(64) \quad J = \frac{1}{r\tau} \frac{\partial}{\partial r} (r \Psi)$$

となる。境界条件 (53), (61) は次のようになる。

$$(65) \quad \tau \sqrt{2} \Psi + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Psi) = \Delta T_c \quad \text{on } 0 < z < 1, r = r_0$$

$$(66) \quad \tau \Psi - (-1)^j \sqrt{F} \sigma \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0 \quad \text{on } z = j, 0 \leq r < r_0$$

(62) の解を浮力層によつて駆動される部分  $\Psi_B$  と、その反作用としての Ekman 層による流れ  $\Psi_E$  とに分ける。  $\Psi_E$  は (65) で  $\Delta T_c = 0$  とした時に満足される解である (Sakurai, Clark & Clark 1971a)。

$$(67) \quad \Psi = \Psi_E + \Psi_B,$$

$$(68) \quad \Psi_E = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n^s (\sinh M_n Z + \sinh M_n (1-Z)) + A_n^a (\sinh M_n Z - \sinh M_n (1-Z))] J_1(M_n \hat{r}),$$

$$(69) \quad \Psi_B = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n\pi Z I_1(n\pi \hat{r}).$$

但しここで  $\hat{r} \equiv 2r/\sqrt{s}$ ,  $J_n, I_n$  はそれぞれ  $n$  次の Bessel, 変形 Bessel 関数である。(68)で  $A_n^s, A_n^a$  はそれぞれ  $Z = \frac{1}{2}$  に関して対称, 反対称部分の係数である。(69)で  $n$  が奇数の時  $\Psi_B$  は反対称, 偶数の時対称である。 $\Psi_E$  を (65) に代入し  $\Delta T_c = 0$  とかくと固有値  $M_n$  を求める方程式が得る。

$$(70) \quad J_1(M_n \hat{r}_0) + \frac{\sqrt{2} M_n}{\tau \sqrt{s}} J_0(M_n \hat{r}_0) = 0.$$

$\Psi_B$  を (65) に代入すると  $B_n$  が求まる。

$$(71) \quad B_n = \frac{b_n}{\sqrt{2} I_1(n\pi \hat{r}_0)} \left[ \tau + \sqrt{\frac{2}{s}} n\pi \frac{I_0(n\pi \hat{r}_0)}{I_1(n\pi \hat{r}_0)} \right]^{-1},$$

但しここで  $b_n$  は  $\Delta T_c$  の Fourier 成分で

$$(72) \quad \Delta T_c(Z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos n\pi Z.$$

(68), (69) を (66) へ代入すれば  $A_n$  が求まるが  $\Psi_E$  は Laplace 逆変換が困難なので、ここでは結果を省略する。 $\Psi_E$  は  $\Psi_B$  の結果として生じるものであるのと  $\tau \rightarrow 0$  と  $\tau \rightarrow \infty$  では  $\Psi_E$  の寄与は無い。その事は  $A_n$  の形からも分る。(69), (71) を (63), (64) に代入して  $\tau \rightarrow 0$  の極限を調べる事により  $\Psi_0^{(0)}, T^{(0)}$  の  $\tau \rightarrow \infty$  での漸近形を求める事ができる。

$$(73) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} q_0^{(0)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{s} I_1(n\pi \hat{r})}{I_0(n\pi \hat{r}_0)} b_n \sin n\pi z,$$

$$(74) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} T^{(0)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_0(n\pi \hat{r})}{I_0(n\pi \hat{r}_0)} b_n \cos n\pi z.$$

$z \rightarrow \infty$  を調べる事により  $\Psi^{(0)}$  の  $t \rightarrow 0$  での形を決定できる。

$$(75) \quad \Psi^{(0)}(t \rightarrow 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_1(n\pi \hat{r})}{I_1(n\pi \hat{r}_0)} b_n \cos n\pi z \exp\left[-\frac{\sqrt{2}}{s} n\pi \frac{I_0(n\pi \hat{r}_0)}{I_1(n\pi \hat{r}_0)} t\right].$$

この式から heat-up time  $t_h$  は次のようになる。次元をつけて

$$(76) \quad t_h \sim \frac{I_1(n\pi \hat{r}_0)}{I_0(n\pi \hat{r}_0)} \sqrt{s} N^{-1} E_N^{-1/2}.$$

これは  $r_0 \gg s$  のとき (14) に  $r_0 \ll \sqrt{s}$  のとき (15) に一致するので §1 の定性的議論が正しかった事が分る。  $\Delta T_c(z)$  の対称部分 ( $n$  偶数) には  $T^{(0)}$ ,  $\Psi_0^{(0)}$  の対称部分,  $q_0^{(0)}$  の反対称部分が  $\Delta T_c(z)$  の反対称部分にはその逆が対応する事が得られた式の形から分る。  $\Psi_E^{(0)}$  はしかし  $\Psi_B^{(0)}$  と反対の対称性を示す事が予想される。

## §5 議論

§3 の結果から分るように非回転の場合の heat-up の漸近状態では流体の温度分布は壁のそれと一致する。しかし §4 で分るように回転があると  $r$  方向の運動がさまたげられ流体の温度は壁附近のみが壁と一致する。また回転のある heat-

upの特徴は流体が容器に対して spin-up する事である。

この論文では  $F=0$  と  $F=O(1)$  の場合のみがとり扱われたが  $F=En^2$  として  $n > \frac{1}{3}$  の場合は  $F=0$ ,  $n < \frac{1}{3}$  の場合は  $F=O(1)$  の解析でよいが  $\frac{1}{4} < n < \frac{1}{3}$  では水平壁の境界層が三重構造にちり列のとりあつかいが必要であろう。しかし本質的な結果はこの論文の範囲でつくされてゐる。

謝辞 この論文の多くの部分は桜井健郎教授との共同研究に負っているのでここに感謝の意を表明します。

### 文献

- Greenspan, H.P. 1967 Theory of Rotating Fluids. Cambridge Univ. Press. 2.  
 Greenspan, H.P. & Howard, L.N. 1963 J. Fluid Mech. 17, 385.  
 Holton, J.R. 1965 J. Atmos. Sci. 22, 402.  
 Matsuda, T. & Sakurai, T. 1972 submitted to J. Fluid Mech.  
 Pedlosky, J. 1967 J. Fluid Mech. 28, 463.  
 Sakurai, T. 1969a J. Phys. Soc. Japan 26, 840.  
 Sakurai, T. 1969b J. Fluid Mech. 37, 689.  
 Sakurai, T., Clark, A. Jr. & Clark, P.A. 1971a J. Phys. Soc. Japan 30, 1517.  
 Sakurai, T., Clark, A. Jr. & Clark, P.A. 1971b J. Fluid Mech. 49, 753  
 Sakurai, T., & Matsuda, T. 1972 J. Fluid Mech. to be published.  
 Veronis, G. 1967a Tellus, 19, 326.  
 Veronis, G. 1967b Tellus, 19, 620  
 Walin, G. 1969 J. Fluid Mech. 36, 289.