

## 方形に対する偏差分方程式

を解くための直接法

広大理 新谷尚義

## § 1. まえがき

偏微分方程式を差分近似してえられる偏差分方程式の解法には、反復法と直接法とがある。通常、反復法が使われ、記憶容量の関係などの理由から、直接法は余り使われていない。G. E. Forsythe と W. R. Wasow [1] が述べているように、低次の逆行列を求める問題に帰着できる場合と、逆行列を一定の手順にしたがって発生させることができる場合に直接法は実用になる。したがって、直接法が使えるのは、特殊な形の領域に対する特殊な問題の場合に限定されるであらう。

ここでは、領域を直交座標軸に平行な辺をもつ方形に限って、直接法について考察をする。

## § 2. 準備

$\alpha$  が実数であるとき, 差分方程式

$$(2.1) \quad y_{r+1} - \alpha y_r + y_{r-1} = 0 \quad (r=0, 1, \dots)$$

の初期条件  $y_{-1} = 0, y_0 = 1$  をみたす解を  $U_r(\alpha)$ , 初期条件

$y_{-1} = 1, y_0 = \alpha/2$  をみたす解を  $V_r(\alpha)$  とする.

(補題 1)

$$U_r(\alpha) = \begin{cases} \frac{\sinh(r+1)\omega}{\sinh \omega}, & 2 \cosh \omega = \alpha \quad (\alpha \geq 2) \\ \frac{\sin(r+1)\theta}{\sin \theta}, & 2 \cos \theta = \alpha \quad (|\alpha| < 2) \\ \frac{(-1)^r \sinh(r+1)\omega}{\sinh \omega}, & 2 \cosh \omega = |\alpha| \quad (\alpha \leq -2) \end{cases}$$

$$V_r(\alpha) = \begin{cases} \cosh(r+1)\omega, & 2 \cosh \omega = \alpha \quad (\alpha \geq 2) \\ \cos(r+1)\theta, & 2 \cos \theta = \alpha \quad (|\alpha| < 2) \\ (-1)^{r+1} \cosh(r+1)\omega, & 2 \cosh \omega = \alpha \quad (\alpha \leq -2) \end{cases}$$

と表わされる. (2.1) の一般解は

$$y_r = c_1 U_{r-1}(\alpha) + c_2 V_{r-1}(\alpha)$$

によつて与えられる. たゞし,  $c_1, c_2$  は任意定数である.

$$I_k = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \quad J_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_k = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Z_k = \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & 0 & \\ & & & \\ 1 & & & \end{bmatrix}$$

$$U_k = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & c & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 & c \\ & & & & c & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad V_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ c & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 & c \\ & & & & c & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad L_k^J = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad V_k^J = \begin{bmatrix} c & & & \\ & c & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 & c \\ & & & & c & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

を  $k \times k$  ( $k \geq 3$ ) の行列とする.



$$D(k; \alpha, \beta) = \text{diag} (1/(1+\alpha), 1, \dots, 1, 1/(1+\beta))$$

と置く,

$$L(k; p, \delta; \alpha, \beta) = R(k; p, \delta; \alpha, \beta) G(k; p, \delta; \alpha, \beta) R(k; p, \delta; \alpha, \beta)^{-1}$$

$$R(k; p, \delta; \alpha, \beta)^{-1} = R(k; p, \delta; \alpha, \beta)^T D(k; \alpha, \beta)$$

である.

系 2  $aI_k - L(k; p, \delta; \alpha, \beta)$  が正則ならば,

$$(aI_k - L(k; p, \delta; \alpha, \beta))^{-1} = R(aI_k - G)^{-1} R^{-1}$$

である.

$p, \delta, \alpha, \beta$  が特殊な値をとる場合には,  $G$  と  $R$  をある形に書けることがある.

$$L_1(k) = L(k; 0, 0; 0, 0), \quad L_2(k) = L(k; 1, 1; 0, 0)$$

$$L_3(k) = L(k; 1, 0; 0, 0), \quad L_4(k) = L(k; 0, 0; 1, 1)$$

$$L_5(k) = L(k; 0, 0; 1, 0), \quad L_6(k) = L_1(k) + Z_k$$

$$G_i(k) = \text{diag} (2 \cos \theta_{i,1}, \dots, 2 \cos \theta_{i,k}) \quad (i=1, 3, \dots, 6)$$

と置く.  $T_k T_k^{-1}$ ,

$$\theta_{1j} = \frac{j\pi}{k+1}, \quad \theta_{2j} = \frac{(j-1)\pi}{k}, \quad \theta_{3j} = \frac{(2j-1)\pi}{2k+1}, \quad \theta_{4j} = \frac{(j-1)\pi}{k-1}$$

$$\theta_{5j} = \frac{(2j-1)\pi}{2k}, \quad \theta_{6j} = \frac{2(j-1)\pi}{k}$$

である. さらに

$$R_1(k) = (\sin i \theta_{1j}), \quad R_2(k) = (\sin \frac{(2i-1)}{2} \theta_{2j})$$

$$R_3(k) = (\sin (k+1-i) \theta_{3j}), \quad R_4(k) = (\cos (i-1) \theta_{4j})$$

$$R_5(k) = (\cos(i-1)\theta_{ij}), \quad R_6(k) = (r_{ij})$$

$$r_{01} = 1/\sqrt{2}, \quad r_{ij} = \cos(i-1)\theta_{ij} \quad (2 \leq j \leq l-1)$$

$$r_{i,l} = \delta \cos(i-1)\theta_{i,l}, \quad r_{ij} = \sin(i-1)\theta_{ij} \quad (l+1 \leq j \leq k)$$

とおく。 したがって

$$l = \left[ \frac{k}{2} \right], \quad \delta = \begin{cases} 1 & (k: \text{odd}) \\ 1/\sqrt{2} & (k: \text{even}) \end{cases}$$

である。 このとき、つぎの結果がえられる。

系 3  $L_i(k) = R_i(k) G_i(k) R_i(k)^{-1} \quad (i=1, 2, \dots, 6)$

が成り立つ。  $R_i(k)^{-1}$  はつぎのように表わされる。

$$R_1(k)^{-1} = \frac{2}{k+1} R_1(k), \quad R_2(k)^{-1} = \frac{2}{k} R_2(k)^T$$

$$R_3(k)^{-1} = \frac{4}{2k+1} R_3(k)^T, \quad R_4(k)^{-1} = \frac{2}{k-1} R_4(k)^T D_1$$

$$R_5(k)^{-1} = \frac{2}{k} R_5(k)^T D_2, \quad R_6(k)^{-1} = \frac{2}{k} R_6(k)^T$$

したがって、

$$D_1 = \text{diag}(1/2, 1, \dots, 1, 1/2), \quad D_2 = \text{diag}(1/2, 1, \dots, 1)$$

である。

$$L_7(k; p, \xi) = L(k; p, \xi; 0, 0), \quad L_8(k; p, \xi) = L(k; p, \xi; 1, 1)$$

$$L_9(k; p) = L(k; p, 0; 0, 0), \quad L_{10}(k; p) = L(k; p, 0; 1, 0)$$

とおく。  $G_i(k; p, \xi), R_i(k; p, \xi) \quad (i=7, 8), G_j(k; p), R_j(k; p)$

( $j=9, 10$ ) も同様に定義する。

(補題 3) 条件 (2.2) のもとで,  $aI_k - L(k; p, \beta; \alpha, \beta)$  が正則であるとする. このとき

$$(aI_k - L(k; p, \beta; \alpha, \beta))^{-1} = (r_{ij})$$

と表わされる. たゞし,

$$r_{ii} = \Delta^{-1}(U_{k-i} - \beta U_{k-i-1} - \beta U_{k-i-2})$$

$$r_{ij} = \begin{cases} \Delta^{-1}(U_{i-1} - pU_{i-2} - \alpha U_{i-3})(U_{k-j} - \beta U_{k-j-1} - \beta U_{k-j-2}) & (j \geq i) \\ \Delta^{-1}(U_{k-i} - \beta U_{k-i-1} - \beta U_{k-i-2})(U_{j-1} - pU_{j-2} - \alpha U_{j-3}) & (j < i) \end{cases}$$

( $2 \leq j \leq k-1$ )

$$r_{ik} = \Delta^{-1}(U_{i-1} - pU_{i-2} - \alpha U_{i-3})$$

$$\Delta = F_k(\alpha), \quad U_j = U_j(\alpha) \quad (j = -2, -1, \dots)$$

である.

(補題 4)  $W$  を  $k \times k$  の正則行列とし,  $p, \beta$  を定数とする.  $W - pU_k - \beta U_k^T$  が正則ならば

$$(W - pU_k - \beta U_k^T)^{-1} = W^{-1} + W^{-1}ZW^{-1}$$

と表わされる. ここで

$$Z = \begin{bmatrix} p\Delta^{-1}(1 - \beta W_{kk}), 0, \dots, 0, \beta\Delta^{-1}w_{kk} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta\Delta^{-1}w_{k1}, 0, \dots, 0, \beta\Delta^{-1}(1 - pw_{11}) \end{bmatrix}$$

$$W^{-1} = (w_{ij}), \quad \Delta = (1 - pw_{11})(1 - \beta w_{kk}) - \beta\gamma w_{1k}w_{k1}$$

である.

$A$  が  $m \times m$  の行列,  $B$  が  $n \times n$  の行列であるとき,  $m \times n$  の行列  $A \otimes B$  を

$$A \otimes B = (a_{ij} B)$$

により定義する.

今後, 記号を簡単にするために,  $A_k, A_j(k), A_j(k; p, \xi)$  を  $k=n$  のとき単に  $A, A_j, A_j(p, \xi)$  と書き,  $k=m$  のとき  $A_m, \hat{A}_j, \hat{A}_j(p, \xi)$  と書くことにする. また,

$$S = I_m \otimes R, \quad P = \hat{R} \otimes I$$

とおく.

(補題 5)  $W$  を  $m \times m$  の正則行列,  $p, \xi$  を定数とし,

$W - (pU_m + \xi U_m^J) \otimes I$  が正則であるとする. このとき

$$\{W - (pU_m + \xi U_m^J) \otimes I\}^{-1} = W^{-1} + W^{-1} Z W^{-1}$$

である.  $Z$  は

$$Z = \begin{bmatrix} p\Delta_1^{-1}, & 0 & \dots & \dots & 0, & p\xi(I - pW_{11})^{-1}W_{1m}\Delta_m^{-1} \\ 0 & & & & 0 & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & \vdots \\ 0 & & & & 0 & \vdots \\ p\xi(I - \xi W_{mm})^{-1}W_{m1}\Delta_1^{-1}, & 0 & \dots & \dots & 0, & \xi\Delta_m^{-1} \end{bmatrix}$$

$$W^{-1} = (W_{ij}) \quad (i, j = 1, 2, \dots, m)$$

$$\Delta_1 = (I - pW_{11}) - p\xi(I - \xi W_{mm})^{-1}W_{m1}$$

$$\Delta_m = (I - \xi W_{mm}) - p\xi(I - pW_{11})^{-1}W_{1m}$$

であり,  $W_{ij}$  は  $n \times n$  の行列である.

$\gamma, \delta$  を実数とし

$$M(k; p, \delta; \alpha, \beta; \gamma, \delta) = \gamma(K_k + pU_k + \alpha V_k) + \gamma\delta^2(K_k^T + \beta U_k^T + \alpha V_k^T)$$

$$= \begin{bmatrix} \gamma p, & \gamma\delta^2 + \gamma\alpha & & & \\ \gamma, & 0 & & \gamma\delta^2 & 0 \\ & \gamma & & 0 & \gamma\delta^2 \\ 0 & & & \gamma & 0 & \gamma\delta^2 \\ & & & & \gamma + \gamma\delta^2 p, & \gamma\delta^2 \beta \end{bmatrix}$$

とおく。  $k \geq 1$

$$(2.3) \quad \gamma \neq 0, \quad \delta > 0, \quad \delta \neq 1$$

とする。

$$(補題 6) \quad E_k = \text{diag}(1, \delta, \delta^2, \dots, \delta^{k-1})$$

とおくと、

$$M(k; p, \delta; \alpha, \beta; \gamma, \delta) = E_k^{-1} \gamma \delta L(k; p\delta^{-1}, \beta\delta; \alpha\delta^{-2}, \beta\delta^2) E_k$$

である。

この補題 6 より、 $M$  の標準形を求める問題は

$L(k; p\delta^{-1}, \beta\delta; \alpha\delta^{-2}, \beta\delta^2)$  の標準形を求める問題に帰着される。

$$L_{11}(k; \delta) = L(k; \delta^{-1}, \delta; 0, 0), \quad L_{12}(k; \delta) = L(k; 0, 0; \delta^{-2}, \delta^2)$$

$$G_{11}(k; \delta) = \text{diag}\left(2 \cos \frac{\pi}{k}, \dots, 2 \cos \frac{(k-1)\pi}{k}, \delta + \delta^{-1}\right)$$

$$G_{12}(k; \delta) = \text{diag}\left(2 \cos \frac{\pi}{k-1}, \dots, 2 \cos \frac{(k-2)\pi}{k-1}, \delta + \delta^{-1}, -(\delta + \delta^{-1})\right)$$

$$R_{11}(k; \delta) = (Y_j), \quad R_{12}(k; \delta) = (J_j)$$

とおく。  $k \geq 1$

$$Y_{ij} = \sqrt{\frac{2}{k}} \left( \delta \sin \frac{ij\pi}{k} - \sin \frac{(i-1)j\pi}{k} \right) / \left( 1 + \delta^2 - 2\delta \cos \frac{j\pi}{k} \right)$$

$$Y_{i,k} = \sqrt{(1-\delta^2)/(1-\delta^{2k})} \delta^{i-1} \quad (1 \leq j \leq k-1)$$

$$\Delta_{ij} = \left( \delta \sin \frac{ij\pi}{k-1} - \delta^{-1} \sin \frac{(i-2)j\pi}{k-1} \right) / \left\{ \left( \frac{k-1}{2} - \sin^2 \frac{j\pi}{k-1} \right) (\delta - \delta^{-1})^2 + (\delta + \delta^{-1})^2 \sin^2 \frac{j\pi}{k-1} \right\}^{1/2} \quad (1 \leq j \leq k-2)$$

$$\Delta_{i,k-1} = \sqrt{(1-\delta^4)/2(\delta^2-\delta^{2k})} \delta^{i-1}$$

$$\Delta_{i,k} = \sqrt{(1-\delta^4)/2(\delta^4-\delta^{2k})} (-\delta)^{i-1}$$

である。 すると,

$$L_j(k; \delta) = R_j(k; \delta) G_j(k; \delta) R_j(k; \delta)^{-1} \quad (j=11, 12)$$

$$R_{11}(k; \delta)^{-1} = R_{11}(k; \delta)^T, \quad R_{12}(k; \delta)^{-1} = R_{12}(k; \delta)^T D_3$$

$$D_3 = \text{diag}(\delta^2/(1+\delta^2), 1, \dots, 1, 1/(1+\delta^2))$$

である。

$$L_{13}(k; p, \beta; \delta) = L(k; p\delta^{-1}, \beta\delta; \delta, 0)$$

$$L_{14}(k; p, \beta; \delta) = L(k; p\delta^2, \beta\delta, \delta^{-2}, \delta^2)$$

よって、同様にして  $G_j(k; p, \beta; \delta)$ ,  $R_j(k; p, \beta; \delta)$  ( $j=13, 14$ ) を定義

する。

$$aI_k - M(k; p, \beta; \alpha, \beta, \gamma, \delta)$$

$$= E_k^{-1}(\gamma\delta) \left[ (\gamma\delta)^{-1} aI_k - L(k; p\delta^{-1}, \beta\delta; \alpha\delta^{-2}, \beta\delta^2) \right] E_k$$

であるから、補題 3.4.5.7  $(aI_k - M)^{-1}$  を求めることはできる。

る。

## §3. 2階の楕円型方程式

## 3.1 解法

方形上の2階の楕円型方程式を近似的に解く問題は、  
べき形式の偏差分方程式を解く問題に帰着されることか  
ら、

$$(3.1) \quad Mx = \begin{pmatrix} A_1 & -C_1 & & & \\ -B_2 & A_2 & -C_2 & & \\ & & & & \\ & & -B_{m-1} & A_{m-1} & -C_{m-1} \\ & & & & \\ & & & -B_m & A_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{m-1} \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{m-1} \\ f_m \end{pmatrix} = f$$

$A_i, B_i, C_i$  は  $n \times n$  の行列である。  $B_1 = C_m = 0$  であると考え  
こととする。 べき形式の場合も同様と考えよう。

1°  $M$  が  $n$  階対角行列に相似である場合。

$$(3.2) \quad M = E \operatorname{diag}(D_1, D_2, \dots, D_m) E^{-1}$$

と表わされるときは、

$$M^{-1} = E \operatorname{diag}(D_1^{-1}, D_2^{-1}, \dots, D_m^{-1}) E^{-1}$$

であるから、  $n \times n$  の行列  $D_i^{-1}$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) を求める問題に帰  
着される。

2°  $M$  が  $M = W + N$  と分解され、  $W^{-1}$  が容易に求められ  
る場合。 (1)式は

$$(3.3) \quad (I + W^{-1}N)x = W^{-1}f$$

と書き直される。 (3)式を解くことが低次の方程式を  
解く問題に帰着されるとき、この分解は有効である。

3° Mの主小行列

$$M_i = \begin{bmatrix} A_1 & -C_1 & & \\ -B_2 & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -B_{i-1} & A_{i-1} & \\ & & & & & -B_i & A_i \end{bmatrix} \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

がすべて正則である場合.

MはLU分解され,

$M=LU$  と書ける. 以下.

$$L = \begin{bmatrix} I & & & \\ -B_2 P_1^{-1} & I & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -B_m P_{m-1}^{-1} & I \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} P_1 & -C_1 & & \\ & P_2 & -C_2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & & -C_{m-1} & \\ & & & & & P_m \end{bmatrix}$$

$$P_1 = A_1$$

$$P_k = A_k - B_k P_{k-1}^{-1} C_{k-1} \quad (k=2, 3, \dots, m)$$

である. このとき,

$$Ux = L^{-1}f = g, \quad x = U^{-1}g$$

であるから,

$$g_1 = f_1, \quad g_k = f_k + B_k P_{k-1}^{-1} g_{k-1} \quad (k=2, 3, \dots, m)$$

$$x_m = P_m^{-1} g_m, \quad x_k = P_k^{-1} (g_k + C_k x_{k+1}) \quad (k=m-1, \dots, 1)$$

により,  $x_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) が求められる.

特殊な場合として,  $A_k, B_k, C_k$  が同一の相似変換で対角化できる場合, 可能なとき

$$A_k = F \hat{A}_k F^{-1}, \quad B_k = F \hat{B}_k F^{-1}, \quad C_k = F \hat{C}_k F^{-1} \quad (k=1, 2, \dots, m)$$

であるような行列  $F$  と対角行列  $\hat{A}_k, \hat{B}_k, \hat{C}_k$  が存在する場合

には, この方法は簡単に使える.

$$(3.4) \quad M = (I_n \otimes F) \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & -\tilde{C}_1 & 0 \\ -\tilde{B}_2 & \tilde{A}_2 & \vdots \\ \vdots & \vdots & -\tilde{C}_{m-1} \\ 0 & -\tilde{B}_m & \tilde{A}_m \end{bmatrix} (I_m \otimes F)^{-1}$$

であるから,  $z_i = F^{-1}x_i$ ,  $\tilde{f}_i = F^{-1}f_i$  とおくと, (1)式は

$$Mz = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & -\tilde{C}_1 & 0 \\ -\tilde{B}_2 & \tilde{A}_2 & \vdots \\ \vdots & \vdots & -\tilde{C}_{m-1} \\ 0 & -\tilde{B}_m & \tilde{A}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \\ \vdots \\ \tilde{f}_m \end{bmatrix} = \tilde{f}$$

と書き直される.  $\tilde{A}_k, \tilde{B}_k, \tilde{C}_k$  が対角行列であるから,  $P_k, P_k^{-1}$  は容易に求められる.

とくに

$$\tilde{A}_i = A = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (a_j > 0) \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

$$\tilde{B}_i = B = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n) \quad (b_j > 0) \quad (i=2, 3, \dots, m)$$

$$\tilde{C}_i = C = \text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_n) \quad (c_j > 0) \quad (i=1, 2, \dots, m-1)$$

である場合に, この系統の数値的安定性について調べよう.

[定理]  $a_i \geq \max(2\sqrt{b_i c_i}, 2b_i c_i, 2b_i, 2c_i, b_i + c_i, 1 + b_i c_i)$   
ならば, 前進過程 ( $i=1, 2, \dots, m$ )

$$g_k = \tilde{f}_k + B P_{k-1}^{-1} g_{k-1} \quad (k=2, 3, \dots, m)$$

と, 後進過程

$$z_k = P_k^{-1} C z_{k+1} + P_k^{-1} g_k \quad (k=m, m-1, \dots, 1)$$

と数値的に安定である.

### 3.2 例

以下の例では,  $x$  軸と  $y$  軸に平行な辺を  $l > 0$  長方形  $R$  の上

$\Omega$  の偏微分方程式を考えたこととする。  $R$  の上および  $\Omega$  の  
 水平側をそれぞれ  $UH, LH$  と記し、右および左の垂直側を  
 それぞれ  $RV, LV$  と記す。  $h, h_1$  をそれぞれ  $x, y$  方向への  
 mesh-size とし、

$$\sigma = h/h_1, \quad \rho = \sigma^2, \quad \alpha = 2(1+\rho)$$

とおく。未知関数  $u$  の値  $u_j = u(x_j, y_j)$  は  $\Omega$  のように並  
 べられ、  

$$\mathcal{U}^T = (u_{01}, u_{02}, \dots, u_{0n}) \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

ラプラス演算子  $\Delta$  は 5 点公式で近似する。

### 3.2.1 例 1

$$-\Delta u + \lambda u = f(x, y) \quad (\lambda \geq 0 \text{ 定数})$$

に  $\Omega$  を考える。このとき

$$M = I_m \otimes A - B \otimes I \quad , \quad A = (\alpha + \lambda h^2)I - \rho C$$

となる。ここで  $B$  は  $m \times m$  の行列、 $A, C$  は  $n \times n$  の行列で  
 ある。  $C$  は  $LH, UH$  上の境界条件  $u$  が  $\Omega$  のように並  
 る。

(a)  $u$  の値が  $LH, UH$  上で与えられる場合。  $C = L_1$

(b)  $u$  の値が  $y$  方向に周期的である場合。  $C = L_0$

(c)  $u$  の値が  $UH$  上で与えられる、 $u_y$  の値が  $LH$  上で与えら  
 れる場合。

(i)  $u_y(x, y)$  を前進差分  $(u(x, y+h_1) - u(x, y))/h_1$  または  
 後進差分  $(u(x, y) - u(x, y-h_1))/h_1$  で近似したとき、  $C = L_3$

(ii)  $u_y(x, y)$  を中心差分  $(u(x, y+h) - u(x, y-h))/2h$ ,  $z^{-1} \hat{u}_x / h$

としたとき,  $C = L_5$

(d)  $u_y$  の値が LH, UH 上で与えられる場合

(i) の場合  $C = L_2$ , (iii) の場合  $C = L_4$

(e)  $u_y + \sigma_1 u$  の値が LH 上で与えられ,  $u_y + \sigma_2 u$  の値が UH 上で与えられる場合. ( $\sigma_1, \sigma_2$  は定数)

(i) の場合  $C = L_7(p, \beta)$ ,  $p = 1+h, \sigma_1$ ,  $\beta = 1+h, \sigma_2$

(iii) の場合  $C = L_9(p, \beta)$ ,  $p = 2h, \sigma_1$ ,  $\beta = 2h, \sigma_2$

(f)  $u$  の値が UH 上で与えられる場合,  $u_y + \sigma_1 u$  の値が LH 上で与えられる場合

(i) の場合  $C = L_9(p)$ ,  $p = 1+h, \sigma_1$

(iii) の場合  $C = L_{10}(p)$ ,  $p = 2h, \sigma_1$

UH, LH,  $u_y$ ,  $L_i$ ,  $C$ ,  $p, \beta, \gamma, \sigma_1, \sigma_2$  をそれぞれ  $RV, LV, u_x, \hat{L}_i, B, \gamma, \delta, \alpha, \sigma_3, \sigma_4$  で置きかえたと, 同様に  $B$  が定められる. すると

$$M_{ij} = I_m \otimes \{(\alpha + \lambda h^2)I - hL_i\} - \hat{L}_i \otimes I \quad (i, j = 1, 2, \dots, 10)$$

がえられる.

$$M_{ij} = (I_m \otimes R) [I_m \otimes (\alpha + \lambda h^2)I - hL_i - \hat{L}_i \otimes I] (I_m \otimes R)^{-1}$$

であるから,  $j=6$  の場合を除いて (4) 式の形をとりうる.

また,

$$M_j = (I_n \otimes R_c)(\hat{R}_j \otimes I) \Lambda_j (\hat{R}_j \otimes I)^{-1} (I_n \otimes R_c)^{-1}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_j &= I_n \otimes \{ (a + \lambda h^2)I - bG_c \} - \hat{G}_j \otimes I \\ &= \text{diag}(\Lambda_j^{(1)}, \Lambda_j^{(2)}, \dots, \Lambda_j^{(n)}) \end{aligned}$$

$$\Lambda_j^{(k)} = \text{diag}(\lambda_{ij}^{(k)}, \lambda_{ij}^{(k)}, \dots, \lambda_{ij}^{(k)})$$

$$\lambda_{ij}^{(k)} = (a + \lambda h^2) - b\lambda_{ij} - \mu_{jk}$$

である。 2.2.1

$$G_c = \text{diag}(\lambda_{c1}, \lambda_{c2}, \dots, \lambda_{cn}), \quad \hat{G}_j = \text{diag}(\mu_{j1}, \mu_{j2}, \dots, \mu_{jn})$$

である。 2.2.2

$$\lambda_{ij}^{(k)} = \lambda h^2 + 4b \sin^2 \frac{1}{2} \theta_{ij} + 4 \sin^2 \frac{1}{2} \theta_{jk} \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6)$$

である。

$M_j$  が 2 対称 15, 逆行列 15.

$$M_j^{-1} = (I_n \otimes R_c)(\hat{R}_j \otimes I) \Lambda_j^{-1} (\hat{R}_j \otimes I)^{-1} (I_n \otimes R_c)^{-1}$$

15, 2 対称 15, 逆行列 15.

$$M_{c7} = M_{c1} - (\gamma U_n + \lambda U_n^J) \otimes I, \quad M_{c8} = M_{c4} - (\gamma U_n + \lambda U_n^J) \otimes I$$

$$M_{c9} = M_{c1} - \gamma U_n \otimes I, \quad M_{c10} = M_{c4} - \gamma U_n \otimes I$$

であるから,  $M_{c7}^{-1}, M_{c8}^{-1}, M_{c9}^{-1}, M_{c10}^{-1}$  はそれぞれ  $M_{c1}^{-1}, M_{c4}^{-1}, M_{c1}^{-1}, M_{c4}^{-1}$

から, 補題 5 15, 2 対称 15, 逆行列 15.

$$M_j = I_n \otimes \{ (a + \lambda h^2)I - bL_c(p, z) \} - \hat{L}_j \otimes I$$

$$= (\hat{R}_j \otimes I) \Omega_j (\hat{R}_j \otimes I)^{-1} \quad (i=7, 8, 9, 10; j=1, 4, 5)$$

$$\Omega_j = I_n \otimes \{ (a + \lambda h^2)I - bL_c(p, z) \} - \hat{G}_j \otimes I$$

$$= \text{diag}(\Omega_j^{(1)}, \Omega_j^{(2)}, \dots, \Omega_j^{(n)})$$

$$\Omega_j^{(k)} = (a + \lambda h^2 - \mu_j) I - h L_c(p, \beta)$$

$\tau$  があるから, 補数  $\lambda, \mu_j$  と  $\Omega_j^{-1}$  は求められる. (したがって,  $M_{i,1}^{-1}, M_{i,2}^{-1}, M_{i,3}^{-1}$  ( $i=1, 2, 3, \dots, m$ ) は  $L_c(p, \beta)$  の固有値を求めたことと等しい).

### 3.2.2 例 2

$$-\Delta u + d u_x + e u_y + g u = f(x, y)$$

(2) のようにする.

$$d = d(x), \quad e = \text{定数}, \quad g = g(x)$$

$\tau$  があるとすると,  $h$  は

$$\gamma = (1 - \frac{h}{2} e) > 0, \quad \gamma \delta = (1 + \frac{h}{2} e) > 0 \quad (\delta > 0)$$

となるように  $h$  を小さく選ぶ. すると,

$$A_1 = (a + h^2 g_1 - \gamma(1 + \frac{h}{2} d_1)) I - M(p, \beta; \alpha, \beta; \gamma, \delta)$$

$$A_i = (a + h^2 g_i) I - M(p, \beta; \alpha, \beta; \gamma, \delta) \quad (i=2, 3, \dots, m-1)$$

$$A_m = ((a + h^2 g_m) - \delta(1 - \frac{h}{2} d_m)) I - M(p, \beta; \alpha, \beta; \gamma, \delta)$$

$$C_1 = (1 - \frac{h}{2} d_1 + \omega(1 + \frac{h}{2} d_1)) I$$

$$C_i = (1 - \frac{h}{2} d_i) I, \quad B_i = (1 + \frac{h}{2} d_i) I \quad (i=2, 3, \dots, m-1)$$

$$B_m = (1 + \frac{h}{2} d_m + \varepsilon(1 - \frac{h}{2} d_m)) I$$

となる.  $p, \beta, \alpha, \beta$  は UH, LH の上の境界条件  $u, v, w$  の I とした.

$$(a) \text{ の場合} \quad p = \beta = \alpha = \beta = 0$$

$$(c) (i) \text{ の場合} \quad p = 1, \beta = 0, \alpha = \beta = 0$$

- (c) (ii) の場合  $p=0, \beta=0, \alpha=1, \beta=0$
- (d) (i) の場合  $p=\beta=1, \alpha=\beta=0$
- (d) (ii) "  $p=\beta=0, \alpha=\beta=1$
- (e) (i) の場合  $p=1+h_1\sigma_1, \beta=1+h_1\sigma_2, \alpha=\beta=0$
- (e) (ii) "  $p=2h_1\sigma_1, \beta=2h_1\sigma_2, \alpha=\beta=1$
- (f) (i) の場合  $p=1+h_1\sigma_1, \beta=0, \alpha=\beta=0$
- (f) (ii) "  $p=2h_1\sigma_1, \beta=0, \alpha=1, \beta=0$

LH, UH,  $U_3, p, \beta, \alpha, \beta, \sigma_1, \sigma_2, h_1$  を  $\{h_1\}$  の LV, RV,  $u_2, \gamma, \delta, w, z, \sigma_3, \sigma_4, h_2$  で置きかえたと  $\gamma, \delta, w, z$  の値が同様に定められる。このすべての場合も補題 6 の  $\beta=2$  の  $A_1$  に対応して置換することからわかる。

$$d = \text{定数}, e = e(y), g = g(y)$$

の場合も、 $x$  と  $y$  の役割を入れかえることにより同様に扱える。

$$d = \text{定数}, e = \text{定数}, g = \text{定数}$$

の場合を以下に示す。

$$\mu = (1 + \frac{p}{2}d) > 0, \mu p^2 = (1 - \frac{p}{2}d) > 0 \quad (p > 0)$$

となるように  $h_1$  を選ぶ。

$$F = \text{diag}(1, p, p^2, \dots, p^{n-1})$$

と置く。すると

$$M = I_n \otimes (a + h_1^2 g) I - M(p, \beta; \alpha, \beta; \gamma, \delta) - \hat{M}(\gamma, \delta; w, z; \mu, p) \otimes I$$



$$U_i = C_i - L_i E_{i-1}$$

$$P_i = A_i - L_i U_{i-1} - M_i E_{i-2} \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

である。  $A_i, B_i, C_i, D_i, E_i$  が同一の相似変換で対角化できる場合には、この方法は容易に使える。

$$(例) \quad \Delta \Delta u + 2\alpha \Delta u + \beta u = f(x, y) \quad (\alpha, \beta: \text{定数})$$

について考えよう。  $u$  の値は境界上で与えられるとする。

$$A = (\alpha^2 + 2\beta^2 + 2 + 2\alpha\beta h^2 + \beta h^4)I - 2(\alpha + \beta h^2)hJ + h^2(J^2 - 2I)$$

$$B = (\alpha + \beta h^2)I - hJ$$

とおく。

(i)  $LV, RV$  上で  $u_{xx}$ ,  $LH, UH$  上で  $u_{yy}$  の値が与えられる

場合

$$N_1 = I_m \otimes A - 2J_m \otimes B + (J_m^2 - 2I_m) \otimes I$$

となる。

$$N_1 = S [ I_m \otimes \{ (2 + (\beta - \alpha^2)h^4)I + \{ (\alpha + \beta h^2)I - hG_1 \}^2 \} + \\ + J_m \otimes 2\{ (\alpha + \beta h^2)I - hG_1 \} + (J_m^2 - 2I_m) \otimes I ] S^{-1}$$

であるから、 $A_i, B_i, C_i, D_i, E_i$  は対角化できる。 また、

$$N_1 = S \Lambda P^{-1} S^{-1}$$

$$\Lambda = I_m \otimes \{ (\beta - \alpha^2)h^4 I + \{ I_m \otimes ((\alpha + \beta h^2)I - hG_1) - \hat{G}_1 \otimes I \}^2 \} \\ = \text{diag}(\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_m)$$

$$\Lambda_k = (\beta - \alpha^2)h^4 I + \{ (\alpha + \beta h^2)I - hG_1 - 2 \cos \frac{2k\pi}{m+1} I \}^2$$

$$\Lambda_R = \text{diag}(\lambda_{R1}, \lambda_{R2}, \dots, \lambda_{Rn})$$

$$\lambda_{Ri} = (\beta - \alpha^2)h^4 + \left\{ \alpha h^2 + 4\ell \sin^2 \frac{i\pi}{2(m+1)} + 4\ell \sin^2 \frac{k\pi}{2(m+1)} \right\}^2$$

である。

(ii)  $UH, LH$  と  $v^T U_{jj}$ ,  $LV, RV$  と  $v^T U_{kk}$  の値が等しくなると、  
 場合  $U_n$  を中心差分近似したと

$$N_2 = N_1 + 2(U_m + U_m^J) \otimes I$$

となる。この場合も  $A, B, C$  は対角化できる。また、

$$N_2 = S [PAP^{-1} + 2(U_m + U_m^J) \otimes I] S^{-1}$$

であるから、補題 5 によって  $N_2^{-1}$  を求めたこともできる。

(iii)  $UH, LH$  と  $v^T U_j$ ,  $LV, RV$  と  $v^T U_k$  の値が等しくなると、  
 場合  $N_3 = N_4 + 2(U_m + U_m^J) \otimes I$

となる。また、

$$N_4 = I_m \otimes (A + 2\ell^2(U + U^J)) - 2J_n \otimes B + (J_m^2 - 2I_m) \otimes I$$

である。

$$N_4 = P \Omega P^{-1}$$

$$\Omega = I_m \otimes \left\{ A - 2I + 2\ell^2(U + U^J) \right\} - 2\hat{G}_1 \otimes B + \hat{G}_1^2 \otimes I$$

$$= \text{diag}(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m)$$

$$\Omega_R = \left\{ (2\ell + \alpha h^2 + 4\ell \sin^2 \frac{k\pi}{2(m+1)}) I - \ell J \right\}^2 +$$

$$+ (\beta - \alpha^2) h^4 I + 2\ell(U + U^J)$$

である。  $\Omega_R^{-1}$  は補題 4 によって、LU分解しよって

求めらるから、  $N_4^{-1}$  は容易に求めらる。  $N_3^{-1}$  は補題 5

に示すように、このことが示される。

#### References

- [1] Forsythe, G.E. and W.R. Wasow : Finite difference methods for partial differential equations, John Wiley & Sons (1960).
- [2] Keast, P. and A.R. Mitchell : On the instability of the Crank Nicholson formula under derivative boundary conditions, Computer J. 9(1966), 110 - 114 .
- [3] Nemchinov, S.V. : The solution of boundary problems for partial differential equations of the second order of the elliptic type using the network method, Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz., 2(1962), 418 - 436 .
- [4] Polozhii, G.N. : The method of summary representation for numerical solution of problems of mathematical physics, Pergamon (1965).
- [5] Sarzin, E.N. : Application of the straight line method to the solution of boundary value problem for some non-self-adjoint two-dimensional elliptic equations of the second order, Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz., 5(1965), 945 - 949.
- [6] Schechter, S. : Quasi-tridiagonal matrices and type-insensitive difference equations, Quart. Appl. Math., 18(1960-1961), 258 - 295.

